МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ В.Н. КАРАЗИНА

ПОТЕНЦИАЛЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОЙ И ВТОРОЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Методическое пособие

для студентов специальности "механика"

2006

УДК 531 : 539.3

Потенціали теорії пружності. Інтегральні рівняння першої та другої крайових задач. Методичний посібник для студентів III-IV курсів спеціальності “Механіка” / Укладач І.І. Ієвлев – Харків: ХНУ, 2006. – 24 с.

Даний методичний посібник містить опис розділу класичної лінійної теорії пружності, пов'язаного із застосуванням інтегральних рівнянь для рішення основних просторових крайових задач. Теорія опирається на поняття тензора впливу Кельвіна-Сомільяни, побудованого для безмежного пружного простору. Подання рішень рівняння рівноваги у формі векторних потенціалів простого й подвійного шару зводить задачу про рівновагу тіла до сингулярних інтегральних рівнянь.

Рекомендовано студентам 3-4 курсів університета, що вивчають теорію пружності.

Рецензент: кандидат фіз.мат.наук, доцент А.С. Пославський

Рекомендовано до друку кафедрою теоретичної механіки Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна (протокол №1 від 30.08. 2006)

Оглавление

Тензор влияния Кельвина – Сомильяны

В данном параграфе с помощью фундаментального решения уравнения равновесия Ляме вводятся два тензор: тензор влияния Кельвина-Сомильяны $\widehat{U}$ и силовой тензор $\widehat{\Phi}$ для упругого пространства. Для нахождения фундаментального решения уравнения Ляме используется представление Кирхгофа. Все выкладки проводятся в декартовой системе координат (x_1, x_2, x_3) с ортами $\vec{i}_k \ (k = 1, 2, 3)$.

<u>*Представление решения уравнения Ляме в форме Кирхгофа для безграничного упругого пространства*</u>

Рассмотрим равновесие упругого пространства, на которое действуют массовые силы $\vec{X}$. Будем считать, что массовые силы таковы, что перемещениям на бесконечности стремятся к нулю. Согласно представлению Кирхгофа вектор перемещений $\vec{u}$ будем разыскивать в виде суммы потенциальной и соленоидальной составляющих [5]

$$\vec{u} = \nabla\phi + rot\vec{\psi} \quad \left(u_i = \phi_{,i} + e_{ijk}\psi_{k,j}\right) \tag{1.1}$$

Соответственно, и массовые силы разобъем на потенциальную и соленоидальную составляющие

$$\vec{X} = \nabla\Pi + rot\,\vec{\chi} \quad \left(X_i = \phi_{,i} + e_{ijk}\chi_{k,j}\right) \tag{1.2}$$

где $\widehat{e} = \left\{e_{ijk}\right\}_{i,j,k=1}^{3}$ - тензор Леви-Чивита [5].

Подставляя выражение (1.1),(1.2) в уравнение (4.5) после очевидных преобразований, получим

$$\nabla\left(\frac{\lambda+2\mu}{\mu}\Delta\phi + \frac{1}{\mu}\Pi\right) + rot\left(-\nabla div\vec{\psi} + \Delta\vec{\psi} + \frac{1}{\mu}\vec{\chi}\right) = 0$$

Это равенство будет выполняться, если потребовать обращения в нуль выражений, стоящих в круглых скобках. Тогда получим два уравнения относительно неизвестных функций ϕ и $\vec{\psi}$

$$-\Delta\phi = \frac{1}{\lambda + 2\mu}\Pi$$
$$-\Delta\vec{\psi} = \frac{1}{\mu}\vec{\chi} \qquad (1.3)$$

В случае неограниченного пространства для функций ϕ и $\vec{\psi}$, устремляющихся к нулю на бесконечности, решение уравнений (1.3) можно представить в виде ньютонова потенциала [1]

$$\phi(x) = \frac{1}{4\pi(\lambda + 2\mu)}\int_V \frac{\Pi(\xi)}{R(x,\xi)} dV_\xi$$
$$\vec{\psi}(x) = \frac{1}{4\pi\mu}\int_V \frac{\vec{\chi}(\xi)}{R(x,\xi)} dV_\xi \qquad (1.4)$$

где $R(\xi, x) = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2}$ - расстояние между точками $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ и $x = (x_1, x_2, x_3)$.

Найдем функции $\Pi(x)$ и $\vec{\chi}(x)$. Из соотношения (1.2) следует, что имеют место равенства $div\,\vec{X} = \Delta\Pi, \quad rot\,\vec{X} = rot\,rot\,\vec{\chi}$, которые при дополнительном условии соленоидальности вектора $\vec{\chi}$ переходят в уравнения для нахождения функций $\Pi(x)$ и $\vec{\chi}(x)$

$$-\Delta\Pi = -div\,\vec{X}$$
$$-\Delta\vec{\chi} = rot\,\vec{X} \qquad (1.5)$$

Как и в предыдущем абзаце, функции $\Pi(x)$ и $\vec{\chi}(x)$ будем разыскивать в виде нютонова потенциала

$$\Pi(x) = -\frac{1}{4\pi}\int_V \frac{div_\xi(\vec{X}(\xi))}{R(\xi, x)} dV_\xi$$
$$\vec{\chi}(x) = \frac{1}{4\pi\mu}\int_V \frac{rot_\xi(\vec{X}(\xi))}{R(\xi, x)} dV_\xi \qquad (1.6)$$

Здесь нижний индекс ξ говорит, что дифференцирование и интегрирование проводятся по координатам точки $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Преобразуем правые части соотношений (1.6), перебрасывая операции div_ξ и rot_ξ с сомножителя $\vec{X}(\xi)$ подинтегрального выражения на сомножитель $1/R(x,\xi)$. Тогда, применяя формулу Гаусса-Остроградского (5.1) для бесконечной области, когда интеграл по бесконечно удаленной поверхности Σ устремляется к нулю, и, переходя от дифференцирования по координатам точки $\xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ к дифференцированию по $x=(x_1,x_2,x_3)$, получим следующие выражения для $\Pi(x)$ и $\vec{\chi}(x)$

$$\begin{aligned}
\Pi(x) &= -\frac{1}{4\pi}\int_V \vec{X}(\xi)\cdot\nabla_x \frac{1}{R(\xi,x)}dV_\xi = -\frac{1}{4\pi}div_x\int_V \frac{\vec{X}(\xi)}{R(\xi,x)}dV_\xi \\
\vec{\chi}(x) &= -\frac{1}{4\pi}\int_V \vec{X}(\xi)\times\nabla_x \frac{1}{R(\xi,x)}dV_\xi = \frac{1}{4\pi}rot_x\int_V \frac{\vec{X}(\xi)}{R(\xi,x)}dV_\xi
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Тензор влияния Кельвина-Сомильяны

Пусть массовые силы представлены единичной сосредоточенной силой $\vec{e}=e_k\vec{i}_k$, действующей в точке $\zeta=(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)$. В этом случае

$$\vec{X}(\xi,\zeta)=\vec{e}\delta(\xi,\zeta),\quad \left(X_k(\xi,\zeta)=e_k\delta(\xi,\zeta)\right)$$

где $\delta(\xi,\zeta)$ - дельта-функция [1]. Тогда из соотношений (1.7) следует

$$\begin{aligned}
\Pi(x,\zeta) &= -\frac{1}{4\pi}\vec{e}\cdot\int_V \delta(\xi,\zeta)\cdot\nabla_x\frac{1}{R(x,\xi)}dV_\xi = -\frac{1}{4\pi}div_x\frac{\vec{e}}{R(x,\zeta)} = \frac{1}{4\pi}\frac{\vec{e}\cdot\vec{R}(x,\zeta)}{R(x,\zeta)} \\
\vec{\chi}(x,\zeta) &= -\frac{1}{4\pi}\vec{e}\times\int_V \delta(\xi,\zeta)\nabla_x\frac{1}{R(x,\xi)}dV_\xi = \frac{1}{4\pi}rot_x\frac{\vec{e}}{R(x,\zeta)} = \frac{1}{4\pi}\frac{\vec{e}\times\vec{R}(x,\zeta)}{R(x,\zeta)}
\end{aligned} \tag{1.8}$$

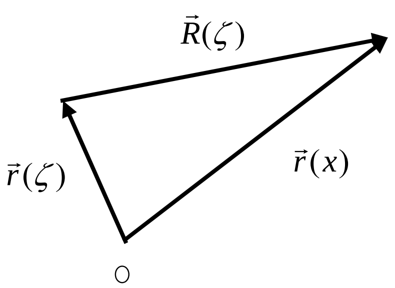

Рис.1

где $\vec{R}(\zeta,x)=\vec{r}(x)-\vec{r}(\zeta)=(x_k-\zeta_k)\vec{i}_k$ - вектор, соединяющий точки ζ и x (рис.1).

Непосредственной подстановкой можно проверить, что решениями уравнений (1.3) с правыми частями, задаваемыми формулами (1.8), являются

$$\phi(x,\zeta)=\frac{\vec{e}\cdot\vec{R}(x,\zeta)}{8\pi(\lambda+2\mu)R(x,\zeta)}$$
$$\vec{\psi}(x,\zeta)=\frac{\vec{e}\times\vec{R}(x,\zeta)}{8\pi\mu R(x,\zeta)} \qquad (1.9)$$

Найдем $\nabla_x\phi$ и $rot_x\vec{\psi}$

$$\nabla_x\phi=\frac{1}{8\pi(\lambda+2\mu)}\nabla_x\left(\frac{\vec{e}\cdot\vec{R}}{R}\right)=\frac{1}{8\pi(\lambda+2\mu)}\left(\frac{\vec{e}}{R}-\frac{\vec{e}\cdot\vec{R}\vec{R}}{R}\right)$$
$$rot_x\vec{\psi}=\frac{1}{8\pi\mu}rot_x\left(\frac{\vec{e}\times\vec{R}}{R}\right)=\frac{1}{8\pi\mu}\left[\frac{\nabla_x\times(\vec{e}\times\vec{R})}{R}+\nabla_x\frac{1}{R}\times(\vec{e}\times\vec{R})\right]=$$
$$=\frac{1}{8\pi\mu}\left[\frac{3\vec{e}+\vec{e}\cdot\hat{\delta}}{R}-\frac{\vec{R}}{R^3}\times(\vec{e}\times\vec{R})\right]=\frac{1}{8\pi\mu}\left(\frac{\vec{e}}{R}+\frac{(\vec{e}\cdot\vec{R})\vec{R}}{R^3}\right)$$

Тогда вектор перемещений $\vec{U}$, определяемый соотношением (1.1), принимает вид

$$\vec{U}(x,\zeta)=\frac{1}{8\pi(\lambda+2\mu)}\left(\frac{\vec{e}}{R}-\frac{\vec{e}\cdot\vec{R}\vec{R}}{R^3}\right)+\frac{1}{8\pi\mu}\left(\frac{\vec{e}}{R}+\frac{\vec{e}\cdot\vec{R}\vec{R}}{R^3}\right)=\frac{(\lambda+\mu)}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)}\left[\frac{(\lambda+3\mu)}{(\lambda+\mu)}\frac{\vec{e}}{R}+\frac{\vec{R}\vec{R}\cdot\vec{e}}{R^3}\right]$$

Учтем формулы (4.3), для констант λ и μ, вынесем в виде общего сомножителя вектор $\vec{e}$ вправо за квадратные скобки. Тогда, обозначая через $\hat{\delta}$ единичный тензор, получим соотношение для вектора $\vec{U}$

$$\vec{U}(x,\zeta)=\frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)}\left[(3-4\nu)\frac{\hat{\delta}}{R}+\frac{\vec{R}\vec{R}}{R^3}\right]\cdot\vec{e} \qquad (1.10)$$

Тензор, стоящий здесь сомножителем при векторе $\vec{e}$, является тензором влияния Кельвина-Сомильяны. Обозначим его через $\hat{U}$ и запишем в виде

$$\hat{U}(x,\zeta)=\frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)}\left[(3-4\nu)\frac{\hat{\delta}}{R}+\frac{\vec{R}\vec{R}}{R^3}\right] \qquad (1.11)$$

Силовой тензор

С тензором Кельвина-Сомильяны связан другой тензор – силовой. Строится он следующим образом. По вектору $\vec{U}(x,\zeta)$ вычисляем тензор деформаций $\hat{\varepsilon}$, а по нему тензор напряжений $\hat{\sigma}$ в соответствии с законом Гука. Далее, выбирая произвольную площадочку с единичной нормалью $\vec{n}$, записываем произведение $\vec{n}\cdot\hat{\sigma}$. Т.к. тензор напряжений линейно зависит от вектора $\vec{e}$, то это произведение можно представить в виде произведения другого тензора $\hat{\Phi}$ на вектор $\vec{e}$: $\vec{n}\cdot\hat{\sigma}=\hat{\Phi}\cdot\vec{e}$. Указанный тензор $\hat{\Phi}$ и носит название силового тензора.

По вектору перемещений $\vec{U}(x,\zeta)$ находим тензор деформаций как "деформацию вектора" $def_x\vec{U}(x,\zeta)$ - симметричную часть градиента вектора [3]

$$\hat{\varepsilon}=\hat{\varepsilon}(x,\zeta)=def_x(\vec{U}(x,\zeta))=\frac{1}{2}\left[\nabla_x\vec{U}(x,\zeta)+(\nabla_x\vec{U}(x,\zeta))^T\right]$$
$$\left(\varepsilon_{ik}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_k(x,\zeta)}{\partial x_i}+\frac{\partial U_i(x,\zeta)}{\partial x_k}\right)\right) \tag{1.12}$$

Привлекая соотношение (1.10), получим выражение

$$\nabla_x\vec{U}=\frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)}\left[(3-4\nu)\nabla_x\left(\frac{\vec{e}}{R}\right)+\nabla_x\left(\frac{\vec{R}\vec{R}\cdot\vec{e}}{R^3}\right)\right]=$$
$$=\frac{1}{16\mu(1-\nu)}\left[(4\nu-3)\frac{\vec{e}\vec{R}}{R^3}+\frac{\vec{R}\vec{e}}{R^3}+\frac{\vec{R}\cdot\vec{e}}{R^3}\hat{\delta}-3\frac{\vec{R}\cdot\vec{e}}{R^5}\vec{R}\vec{R}\right]$$

а, затем

$$\hat{\varepsilon}=\frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)}\left[+\frac{\vec{R}\cdot\vec{e}}{R^3}\hat{\delta}-(1-2\nu)\frac{\vec{e}\vec{R}+\vec{R}\vec{e}}{R^3}-3\frac{\vec{R}\cdot\vec{e}}{R^5}\vec{R}\vec{R}\right] \tag{1.13}$$

Отсюда, согласно закону Гука (4.1), получаем выражение для тензора напряжений

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{8\pi(1-\nu)}\left[(1-2\nu)\frac{\vec{R}\cdot\vec{e}\,\hat{\delta} - (\vec{R}\vec{e} + \vec{e}\vec{R})}{R^3} - 3\frac{\vec{R}\cdot\vec{e}}{R^5}\vec{R}\vec{R}\right] \tag{1.14}$$

Теперь возьмем произвольную элементарную площадочку, ориентированную единичной нормалью $\vec{n}$, и рассмотрим в произвольной точке этой площадрочки внутреннее произведение нормали с тензором напряжений (1.14)

$$\vec{n}\cdot\hat{\sigma} = 2\mu A\left\{(1-2\nu)\left[\frac{\vec{n}\vec{R}\cdot\vec{e}}{R^3} - \frac{\vec{n}\cdot\vec{R}\vec{e} + \vec{R}\vec{n}\cdot\vec{e}}{R^3}\right] - 3\frac{\vec{n}\cdot\vec{R}\vec{R}\vec{R}\cdot\vec{e}}{R^5}\right\} =$$

$$= 2\mu A\left\{\left[(1-2\nu)\frac{\vec{n}\vec{R} - \vec{R}\vec{n}}{R^3} - \frac{\vec{n}\cdot\vec{e}}{R^3}\hat{\delta}\right] - 3\frac{\vec{n}\cdot\vec{R}\vec{R}\vec{R}}{R^5}\right\}\cdot\vec{e}$$

где для краткости введено обозначение

$$A = 1/16\pi\mu(1-\nu) \tag{1.15}$$

Это соотношение представлено в виде произведения тензора второго ранга, который в дальнейшем будем обозначать через $\hat{\Phi}$, на вектор $\vec{e}$

$$\vec{n}\cdot\hat{\sigma} = \hat{\Phi}\cdot\vec{e} \tag{1.16}$$

где

$$\begin{aligned}\hat{\Phi} &= \frac{1}{8\pi(1-\nu)}\left[(1-2\nu)\frac{\vec{n}\vec{R} - \vec{R}\vec{n} - \vec{n}\cdot\vec{R}\,\hat{\delta}}{R^3} - 3\frac{\vec{n}\cdot\vec{R}}{R^5}\vec{R}\vec{R}\right] = \\ &= \frac{1}{8\pi(1-\nu)}\left[(1-2\nu)\frac{\vec{n}\vec{R} - \vec{R}\vec{n}}{R^3} - \vec{n}\cdot\vec{R}\;\nabla_x\nabla_x\frac{1}{R}\right] - \frac{1}{4\pi}\frac{\vec{n}\cdot\vec{R}}{R^3}\hat{\delta} = \\ &= \frac{1}{8\pi(1-\nu)}\left[(1-2\nu)\frac{\vec{n}\vec{R} - \vec{R}\vec{n}}{R^3} - \vec{n}\cdot\vec{R}\;\nabla_x\nabla_x\frac{1}{R}\right] + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{R}\;\hat{\delta}\end{aligned} \tag{1.17}$$

представляет собой силовой тензор влияния (здесь в последнем равенстве использовано тождество $3\vec{R}\vec{R}/R^5 = \nabla_x\nabla_x(1/R) + \hat{\delta}/R^3$).

Свойство силового тензора влияния

Рассмотрим область V_i, ограниченную поверхностью Σ с внешней нормалью $\vec{n}$ (рис.2). Через V_e обозначим область, внешнюю по отношению к V_i. Найдем интеграл от выражения $\Phi \cdot \vec{e} - \dfrac{\vec{e}}{4\pi}\dfrac{\partial}{\partial n}\dfrac{1}{R}$ по поверхности Σ. Преобразуем его, используя формулу Гаусса-Остроградского и уравнение равновесия

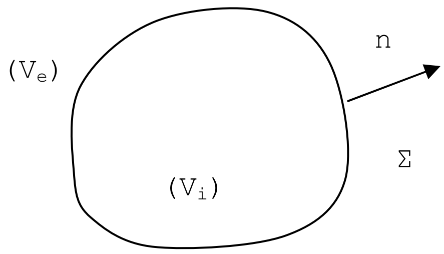

Рис.2

$$div_x \hat{\sigma} + \vec{e}\delta(x,\zeta) = 0$$

$$\oiint\limits_{\Sigma}\left[\hat{\Phi}(x,\zeta)\cdot\vec{e} - \frac{\vec{e}}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{R(\zeta,x)}\right]d\Sigma_x = \oiint\limits_{\Sigma}\vec{n}(x)\cdot\left[\hat{\sigma}(x,\zeta) - \frac{\vec{e}}{4\pi}\nabla_x\frac{1}{R(\zeta,x)}\right]d\Sigma_x =$$

$$= \int\limits_{V_i} div_x\hat{\sigma}(x,\zeta) + \vec{e}\delta(x,\zeta)\, dV_x = 0$$

Тогда, в силу произвола выбора вектора $\vec{e}$, из последнего равенства следует соотношение

$$\oiint\limits_{\Sigma}\hat{\Phi}(x,\zeta)\, d\Sigma_x = \frac{\hat{\delta}}{4\pi}\oiint\limits_{\Sigma}\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{R(x,\zeta)}d\Sigma_x \tag{1.18}$$

где правая часть содержит интеграл, представляющий собой интегралом Гаусса и равный [1])

$$\oiint\limits_{\Sigma}\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{R(x,\zeta)}d\Sigma_x = -\begin{cases} 4\pi & (\zeta \in V_i) \\ 2\pi & (\zeta \in \Sigma) \\ 0 & (\zeta \in V_e) \end{cases}$$

Из (1.18) следует окончательное выражение

---

[1]) см. [1], стр.367.

$$\oiint_{\Sigma} \hat{\Phi}(x,\zeta) d\Sigma_x = -\hat{\delta} \begin{cases} 1 & (\zeta \in V_i) \\ 1/2 & (\zeta \in \Sigma) \\ 0 & (\zeta \in V_e) \end{cases} \qquad (1.19)$$

Покажем, что для силового тензора влияния $\hat{\Phi}$ имеет место еще одно полезное соотношение

$$\oiint_{\Sigma} \vec{R}(\zeta,x) \times \hat{\Phi}(x,\zeta) d\Sigma_x = 0 \qquad (1.20)$$

Для доказательства, умножим обе части последнее равенства на постоянный вектор $\vec{e}$ и учтем равенство (1.16). Используя координатную форму записи тензорных величин и тензор Леви-Чивита $\hat{\hat{\varepsilon}} = \varepsilon_{ijk}\vec{i}_i\vec{i}_j\vec{i}_k$ [2]) произведем следующие очевидные действия

$$\left(\oiint_{\Sigma} \vec{R}(\zeta,x) \times \hat{\Phi}(x,\zeta)\cdot\vec{e}\, d\Sigma_x\right)_i = \left(\oiint_{\Sigma} \vec{R}(\zeta,x) \times [\vec{n}(x)\cdot\hat{\sigma}(x,\zeta)] d\Sigma_x\right)_i =$$
$$= \oiint_{\Sigma} \varepsilon_{ijk} R_j(\zeta,x) n_m(x) \sigma_{mk}(x,\zeta) d\Sigma_x = \int_V \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_m} R_j(\zeta,x)(x)\sigma_{mk}(x,\zeta) dV_x =$$
$$= \int_V \left[\varepsilon_{ijk}\left(\frac{\partial}{\partial x_m} R_j(\zeta,x)\right)\sigma_{mk}(x,\zeta) + \varepsilon_{ijk} R_j(\zeta,x)\left(\frac{\partial}{\partial x_m}\sigma_{mk}(x,\zeta)\right)\right] dV_x =$$
$$= \int_V \varepsilon_{ijk}\sigma_{jk}(x,\zeta) dV_x - \int_V \left(\varepsilon_{ijk} R_j(\zeta,x)\delta(x,\zeta) e_k\right) dV_x$$

После последнего знака равенства первый интеграл равен нулю в силу антисимметрии тензора Леви-Чивита $\hat{\hat{\varepsilon}}$ и симметрии тензора напряжений $\hat{\sigma}$, второй интеграл равен нулю в силу свойства δ- функции. Отсюда следует соотношение (1.20).

[2]) см. [6]

Потенциалы теории упругости

Формула Сомильяны

Пусть упругое тело заполняет некоторую область V пространства (это может быть как внутренняя область V_i, так и внешняя V_e по отношению к замкнутой поверхности Σ, см. рис.2). Рассмотрим два напряженно деформированого состояния тела, характеризуемых векторами перемещения $\vec{u}$ и $\vec{u}'$, возникающих под действием внешних массовых сил $\vec{X}$ и $\vec{X}'$, поверхностных сил $\vec{p}$ и $\vec{p}'$, соответственно. Здесь нештрихованные величины относятся к первому состоянию, а штрихованные – ко второму. Воспользуемся формулами Бетти [3,5]

$$\int_V \vec{X}\cdot\vec{u}'dV + \oint_\Sigma \vec{p}\cdot\vec{u}'d\Sigma = \int_V \vec{X}'\cdot\vec{u}dV + \oint_\Sigma \vec{p}'\cdot\vec{u}d\Sigma$$

Пусть второе состояние вызывается сосредоточенной силой $\vec{e}$, действующей в точке ζ неограниченного пространства:

$$\vec{X}' = \vec{e}\,\delta(x,\zeta),\quad \vec{u}' = \widehat{U}(x,\zeta)\cdot\vec{e},\quad \vec{p}' = \vec{n}(x)\cdot\widehat{\sigma}(x,\zeta)$$

Тогда формула Бетти дает следующее выражение

$$\vec{u}(\zeta)\cdot\vec{e} = \int_V \vec{X}(x)\cdot\widehat{U}(x,\zeta)\cdot\vec{e}dV_x + \oint_\Sigma \left[\vec{p}(x)\cdot\widehat{U}(x,\zeta)\cdot\vec{e} - \vec{n}(x)\cdot\widehat{\sigma}(x,\zeta)\cdot\vec{u}(x)\right]d\Sigma_x$$

Учитывая формулу (1.16) и произвол в выборе вектора $\vec{e}$, последнее соотношение можно представить в виде

$$\vec{u}(\zeta) = \int_V \vec{X}(x)\cdot\widehat{U}(x,\zeta)dV_x + \oint_\Sigma \left[\vec{p}(x)\cdot\widehat{U}(x,\zeta) - \vec{u}(x)\cdot\widehat{\Phi}(x,\zeta)\right]d\Sigma_x \quad (2.1)$$

Соотношение (2.1) представляет собой формулу Сомильяны и выражает значения вектора перемещений внутри объема V через значения этого вектора на поверхности Σ, массовые силы и поверхностные силы $\vec{p}$.

Как нетрудно заметить из соотношений (1.11), (1.17), тензор влияния $\widehat{U}(x,\zeta)$ имеет особенность на бесконечости вида $1/R$, а силовой тензор влияния $\widehat{\Phi}(x,\zeta)$ особенность вида $1/R^2$. Такого же типа особенности имеют скалярные потенциалы теории потенциала в математической физике [1].

Введем три функции $\vec{\psi}(\zeta)$, $\vec{V}(\zeta)$ и $\vec{W}(\zeta)$, которые по аналогии с теорией скалярных потенциалов будем называть

$$\vec{\psi}(\zeta) = \int_V \vec{X}(x) \cdot \widehat{U}(x,\zeta) dV_x \tag{2.2}$$

векторным объемным потенциалом

$$\vec{V}(\zeta) = \oint_\Sigma \vec{a}(y) \cdot \widehat{U}(y,\zeta) d\Sigma_y \tag{2.3}$$

векторными потенциалами простого

$$\vec{W}(\zeta) = \oint_\Sigma \vec{b}(y) \cdot \widehat{\Phi}(y,\zeta) d\Sigma_y \tag{2.4}$$

и двойного слоя.

Здесь $\vec{X}(x)$, $\vec{a}(y)$, $\vec{b}(y)$ - векторные плотности потенциалов, $y = (y_1, y_2, y_3)$ - точка, лежащая на поверхности Σ. Очевидно, что объемный потенциал удовлетворяет уравнению равновесия (4.5), когда на упругое тело действуют массовые силы интенсивности $\vec{X}$, а потенциалы простого и двойного слоя являются решениями однородного уравнения равновесия.

Предельные значения векторного потенциала двойного слоя.
Формулы Племели

Векторный объемный потенциал (2.2) в проекциях на оси декартовых координат можно рассматривать как три скалярных выражения, содержащих несобственные интегралы со слабой особенностью вида

$$\int_V \frac{\rho(x)}{R(x,\zeta)} dV_x$$

с непрерывной функцией $\rho(x)$. Интегралы такого типа являются непрерывными функциями координат точки $\zeta \in E_3$ [3]). Аналогичные утверждения о непрерывности по координатам точки $\zeta \in E_3$ можно сделать относительно векторного потенциала простого слоя, который в скалярной форме сводится к трем интегралам типа

$$\int_{\Sigma} \frac{\mu(y)}{R(y,\zeta)} d\Sigma_y$$

В частности, непрерывность векторного потенциала (2.3) имеет место и в точках $\zeta \in \Sigma$, когда интеграл становится несобственным [4]).

Векторный потенциал двойного слоя (2.4) является непрерывной функцией координат точки ζ в любой точке области V, не лежащей на поверхности Σ. Когда точка ζ принадлежит поверхности Σ, интеграл (2.4) становится сингулярным из-за слагаемых

$$\frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)} \frac{\vec{n}\vec{R} - \vec{R}\vec{n}}{R^3}$$

входящих в ядро $\hat{\Phi}$ потенциала двойного слоя [5]).

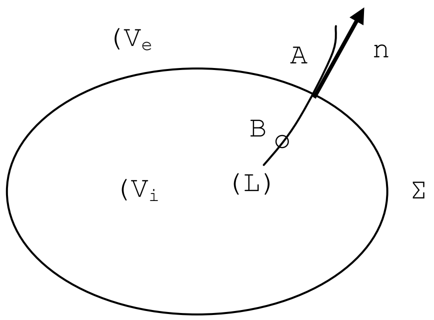

Рис.3

Выберем пространственную кривую (L), пересекающую поверхность Σ под прямым углом (рис.2). Обозначим через s дуговую координату этой линии, возрастающую в направлении нормали $\vec{n}$. Тогда предельным значением потенциала двойного слоя изнутри $\vec{W}_i(\eta)$ называют

$$\vec{W}_i(\eta) = \lim_{s \to -0} \vec{W}[\zeta(s)]$$

а его предельным значением снаружи $\vec{W}_e(\eta)$

---

[3]) см. [1], стр.234.

[4]) см. [1], стр.374.

[5]) см. [7], стр.223.

$$\vec{W}_i(\eta) = \lim_{s \to +0} \vec{W}[\zeta(s)]$$

где $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ - координаты точки A. Предельные значения $\vec{W}_i(\eta)$ и $\vec{W}_e(\eta)$ не совпадают, т.е. как и в случае скалярного потенциала двойного слоя, векторный потенциал $\vec{W}(\zeta)$ претерпевает скачок при переходе через поверхность Σ [6]). Действительно, представим потенциал двойного слоя в виде суммы

$$\vec{W}(\zeta) = \oiint_{\Sigma} \left[\vec{b}(y) - \vec{b}(\eta) \right] \cdot \widehat{\Phi}(y, \zeta) d\Sigma_y + \vec{b}(\eta) \cdot \oiint_{\Sigma} \widehat{\Phi}(y, \zeta) d\Sigma_y$$

В этом выражении первый интеграл представляет собой непрерывную функцию и при стремлении точки B к точке A как изнутри, так и снаружи (при $s \to \pm 0$) может быть заменен своим прямым значением [7])

$$\oiint_{\Sigma} \left[\vec{b}(y) - \vec{b}(\eta) \right] \cdot \widehat{\Phi}(y, \eta) d\Sigma_y = \oiint_{\Sigma} \vec{b}(y) \cdot \widehat{\Phi}(y, \eta) d\Sigma_y - \vec{b}(\eta) \cdot \oiint_{\Sigma} \widehat{\Phi}(y, \eta) d\Sigma_y \ .$$

Во втором слагаемом интеграл принимает соответствующие значения согласно формуле (1.19). Окончательно имеем следующие соотношения, носящие название формул Племели

$$\begin{aligned} \vec{W}_i(\eta) &= \vec{W}(\eta) - \frac{1}{2}\vec{b}(\eta) \\ \vec{W}_e(\eta) &= \vec{W}(\eta) + \frac{1}{2}\vec{b}(\eta) \end{aligned} \qquad (2.5)$$

Интегральные уравнения краевых задач теории упругости

Если на упругое тело действуют массовые силы $\vec{X}$, то всегда можно найти частное решение $\vec{\psi}$, удовлетворяющее неоднородному уравнений равновесия (4.5), например, в форме векторного объемного потенциала (2.2). Тогда замена $\vec{u} = \vec{v} + \vec{\psi}$ приводит к однородному уравнению равновесия относи-

---

[6]) см. [1], стр.370.

[7]) см. [1], стр.371.

тельно функции $\vec{v}$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что массовые силы отсутствуют, а тело нагружено только поверхностными силами. В этом случае решения таких задач можно разыскивать в форме потенциалов (2.3), (2.4).

Первая краевая задача

Пусть область V ограничена поверхностью Σ, на которой задан вектор перемещений $\vec{u}$

$$\vec{u}(\eta) = \vec{g}(\eta) \quad (\eta \in \Sigma) \tag{3.1}$$

Если область V совпадает с V_i, то будем говорить о *первой внутренней краевой задаче* (I_i), а, если V совпадает с V_e, то о *внешней задаче* ((I_e) (см.рис.2). Нормаль $\vec{n}$ будем всегда выбирать внешней по отношению к объему V_i. Представим решение данной задачи в форме потенциала двойного слоя (2.4) с неизвестной плотностью $\vec{b}(y)$. Т.к. уравнение равновесия таким способом удовлетворяется, то остается потребовать выполнения граничного условия (3.1). Используя формулы Племели (2.5), получим следующие уравнения относительно плотности $\vec{b}(y)$

$$\frac{1}{2}\vec{b}(\eta) - \oint\!\!\!\oint_{\Sigma} \vec{b}(y) \cdot \hat{\Phi}(y,\eta) d\Sigma_y = -\vec{g}(\eta) \tag{3.2}$$

для внутренней задачи

$$\frac{1}{2}\vec{b}(\eta) + \oint\!\!\!\oint_{\Sigma} \vec{b}(y) \cdot \hat{\Phi}(y,\eta) d\Sigma_y = \vec{g}(\eta) \tag{3.3}$$

для внешней задачи.

Зададим плотность потенциала $\vec{b}(y)$ формулой (рис.4)

$$\vec{b}(y) = -\left(\vec{v}^0 + \vec{\omega} \times \vec{r}(y)\right) = -\left(\vec{v}^0 + \vec{\omega} \times \vec{r}(\eta)\right) - \vec{\omega} \times \vec{R}(\eta, y) \tag{3.4}$$

где $\vec{v}^0, \vec{\omega}$ - постоянные векторы, а η, y координаты точек B и A, лежащие на поверхности Σ. Подставим данную плотность в левую часть интегрального уравнения (3.2) задачи (I_i). Тогда с помощью формул (1.19)-(1.20) получим

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\left(\vec{v}^0 + \vec{\omega}\times\vec{r}(\eta)\right) + \oint\!\!\oint_{\Sigma}\left[\vec{v}^0 + \vec{\omega}\times\vec{r}(\eta) + \vec{\omega}\times\vec{R}(\eta,y)\right]\cdot\hat{\Phi}(y,\eta)d\Sigma_y = \\
&= -\frac{1}{2}\left(\vec{v}^0 + \vec{\omega}\times\vec{r}(\eta)\right) + \left(\vec{v}^0 + \vec{\omega}\times\vec{r}(\eta)\right)\cdot\oint\!\!\oint_{\Sigma}\hat{\Phi}(y,\eta)d\Sigma_y + \vec{\omega}\times\oint\!\!\oint_{\Sigma}\left[\vec{R}(\eta,y)\cdot\hat{\Phi}(y,\eta)\right]d\Sigma_y = \\
&= -\left(\vec{v}^0 + \vec{\omega}\times\vec{r}(\eta)\right) + \vec{\omega}\cdot\oint\!\!\oint_{\Sigma}\left[\vec{R}(\eta,y)\times\hat{\Phi}(y,\eta)\right]d\Sigma_y = -\left(\vec{v}^0 + \vec{\omega}\times\vec{r}(\eta)\right)
\end{aligned}
$$

Т.о. заданной плотности потенциала отвечают перемещения точек поверхности Σ как твердой поверхности. Покажем, что и внутренние точки области V_i движутся как твердое тело. Перемещения внутренних точек определяются формулой (2.4) с плотностью $\vec{b}(y) = -\left(\vec{v}^0 + \vec{\omega}\times\vec{r}(y)\right)$, а, следовательно, применяя соотношения (1.19)-(1.20), придем к выражению

$$
\begin{aligned}
&\vec{u}(x) = \oint\!\!\oint_{\Sigma}\left[\vec{v}^0 + \vec{\omega}\times\vec{r}(y)\right]\cdot\hat{\Phi}(y,\eta)d\Sigma_y = \oint\!\!\oint_{\Sigma}\left[\vec{v}^0 + \vec{\omega}\times\vec{r}(x) + \vec{\omega}\times\vec{R}(x,y)\right]\cdot\hat{\Phi}(y,x)d\Sigma_y = \\
&= \left(\vec{v}^0 + \vec{\omega}\times\vec{r}(x)\right)\cdot\oint\!\!\oint_{\Sigma}\hat{\Phi}(y,x)d\Sigma_y + \vec{\omega}\times\oint\!\!\oint_{\Sigma}\left[\vec{R}(x,y)\cdot\hat{\Phi}(y,x)\right]d\Sigma_y = \left(\vec{v}^0 + \vec{\omega}\times\vec{r}(x)\right)
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Подставим выражение для плотности потенциала (3.4) в левую часть интегрального уравнения (3.3) задачи (I_e). Используя соотношения (1.19)-(1.20), преобразуем ее следующим образом

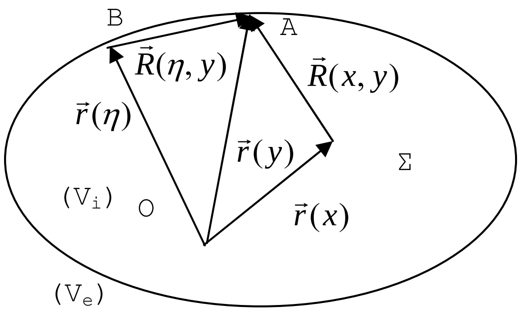

Рис.4

$$-\frac{1}{2}\left(\vec{v}^{0}+\vec{\omega}\times\vec{r}(\eta)\right)-\iint\limits_{\Sigma}\left[\vec{v}^{0}+\vec{\omega}\times\vec{r}(\eta)+\vec{\omega}\times\vec{R}(\eta,y)\right]\cdot\widehat{\Phi}(y,\eta)d\Sigma_{y}=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\vec{v}^{0}+\vec{\omega}\times\vec{r}(\eta)\right)-\left(\vec{v}^{0}+\vec{\omega}\times\vec{r}(\eta)\right)\cdot\iint\limits_{\Sigma}\widehat{\Phi}(y,\eta)d\Sigma_{y}-\vec{\omega}\times\iint\limits_{\Sigma}\left[\vec{R}(\eta,y)\cdot\widehat{\Phi}(y,\eta)\right]d\Sigma_{y}=0$$

Т.о. однородное уравнение (3.3) имеет нетривиальное решение в виде векторного потенциала (3.4).

Вторая краевая задача

Во второй краевой задаче на границе Σ задаются напряжения

$$\vec{n}(\eta)\cdot\widehat{\sigma}(\eta)=\pm\vec{p}(\eta)\quad(\eta\in\Sigma)\tag{3.6}$$

Здесь знак плюс относится к внутренней, а знак минус ко внешней задачам (нормаль $\vec{n}$ является внешней по отношению к V_i и внутренней к V_e). Будем разыскивать решение в виде векторного потенциала простого слоя (2.3). Т.к. уравнение равновесия выполняется, остается потребовать выполнения граничных условий (3.6). Для этого требуется определить тензор деформаций

$$\widehat{\varepsilon}=def\ \vec{u}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)\vec{i}_i\,\vec{i}_k\tag{3.7}$$

и с привлечением закона Гука найти тензор напряжений

$$\widehat{\sigma}=2\mu\left(\frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{mm}\widehat{\delta}+\widehat{\varepsilon}\right)=2\mu\left(\frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{mm}\delta_{ik}+\varepsilon_{ik}\right)\vec{i}_{\,i}\vec{i}_k\tag{3.8}$$

Вначале найдем компоненты градиента $\nabla\vec{u}=\dfrac{\partial u_k}{\partial x_i}\vec{i}_i\,\vec{i}_k$ вектора перемещений $\vec{u}$, заданного формулами (2.3), (1.11)

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_i}=\frac{\partial u_k}{\partial x_i}(x)=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\oiint_{\Sigma}\vec{a}(y)\cdot\widehat{U}(y,x)d\Sigma_y\right)_k=\oiint_{\Sigma}a_m(y)\frac{\partial}{\partial x_i}U_{mk}(y,x)d\Sigma_y=$$

$$=\oiint_{\Sigma}a_m(y)A\frac{\partial}{\partial x_i}\left[(3-4\nu)\frac{\delta_{mk}}{R(x,y)}+\frac{(y_m-x_m)(y_k-x_k)}{R^3(x,y)}\right]d\Sigma_y=$$

$$=\oiint_{\Sigma}a_m(y)A\left[(3-4\nu)\frac{(y_i-x_i)\delta_{mk}}{R^3(x,y)}-\frac{\delta_{im}(y_k-x_k)+(y_m-x_m)\delta_{ik}}{R^3(x,y)}+3\frac{(y_m-x_m)(y_i-x_i)(y_k-x_k)}{R^5(x,y)}\right]d\Sigma_y=$$

$$=\oiint_{\Sigma}A\begin{bmatrix}(3-4\nu)\dfrac{(y_i-x_i)a_k(y)}{R^3(x,y)}-\dfrac{a_i(y)(y_k-x_k)+a_m(y)(y_m-x_m)\delta_{ik}}{R^3(x,y)}+\\+3\dfrac{a_m(y)(y_m-x_m)(y_i-x_i)(y_k-x_k)}{R^5(y,x)}\end{bmatrix}d\Sigma_y=$$

$$=\left\{\oiint_{\Sigma}A\left[(3-4\nu)\frac{\vec{R}\vec{a}}{R^3}-\frac{\vec{a}\vec{R}+\vec{a}\cdot\vec{R}\,\widehat{\delta}}{R^3}+3\frac{\vec{a}\cdot\vec{R}}{R^5}\vec{R}\vec{R}\right]d\Sigma_y\right\}_{ik}$$

где постоянная A определяется соотношением (1.15). Тензор деформаций $\widehat{\varepsilon}$ образуется из тензора $\dfrac{\partial u_k}{\partial x_i}$ выделением его симметричной части

$$\varepsilon_{ik}=\varepsilon_{ik}(x)=\left\{\oiint_{\Sigma}A\left[(1-2\nu)\frac{\vec{R}\vec{a}+\vec{a}\vec{R}}{R^3}-\frac{\vec{a}\cdot\vec{R}}{R^3}\widehat{\delta}+3\frac{\vec{a}\cdot\vec{R}}{R^5}\vec{R}\vec{R}\right]d\Sigma_y\right\}_{ik}\qquad(3.9)$$

Дилатация θ (или след тензора $\widehat{\varepsilon}$) равна

$$\theta=\varepsilon_{mm}=\oiint_{\Sigma}2(1-2\nu)A\frac{\vec{a}\cdot\vec{R}}{R^3}d\Sigma_y$$

Окончательно, тензор напряжений равняется

$$\widehat{\sigma}=\widehat{\sigma}(x)=\oiint_{\Sigma}2\mu A\left[(1-2\nu)\frac{\vec{R}\vec{a}+\vec{a}\vec{R}-\vec{a}\cdot\vec{R}\,\widehat{\delta}}{R^3}+3\frac{\vec{a}\cdot\vec{R}}{R^5}\vec{R}\vec{R}\right]d\Sigma_y\qquad(3.10)$$

Пусть $\vec{n}(\eta)$ - нормаль к поверхности Σ в какой либо ее точке с координатами η. Найдем выражение для произведения $\vec{n}(\eta)\cdot\widehat{\sigma}(x)$

$$\vec{n}(\eta)\cdot\hat{\sigma}(x)=$$
$$=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}2\mu A\left[\begin{array}{l}(1-2\nu)\dfrac{\vec{n}(\eta)\cdot\vec{R}(x,y)\vec{a}(y)+\vec{n}(\eta)\cdot\vec{a}(y)\,\vec{R}(x,y)-\vec{a}(y)\cdot\vec{R}(x,y)\,\vec{n}(\eta)}{R^3(x,y)}+\\ +3\dfrac{\vec{a}(y)\cdot\vec{R}(x,y)}{R^5(x,y)}\vec{n}(\eta)\cdot\vec{R}(x,y)\,\vec{R}(x,y)\end{array}\right]d\Sigma_y=$$
$$=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}2\mu A\vec{a}(y)\cdot\left[\begin{array}{l}(1-2\nu)\dfrac{\vec{n}(\eta)\cdot\vec{R}(x,y)\,\hat{\delta}+\vec{n}(\eta)\vec{R}(x,y)-\vec{R}(x,y)\,\vec{n}(\eta)}{R^3(x,y)}+\\ +3\dfrac{\vec{n}(\eta)\cdot\vec{R}(x,y)}{R^5(x,y)}\vec{R}(x,y)\,\vec{R}(x,y)\end{array}\right]d\Sigma_y$$

Обозначим тензор, стоящий сомножителем при векторе $\vec{a}(y)$ под знаком интеграла, через $\hat{\Psi}(y,x,\eta)$. Рассмотрим интеграл суммы

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}\vec{a}(y)\cdot\left[\hat{\Psi}(y,x,\eta)+\hat{\Phi}(y,x)\right]d\Sigma_y=$$
$$=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}2\mu A\vec{a}(y)\cdot\left\{\left[(1-2\nu)\frac{\vec{n}(\eta)\cdot\vec{R}(x,y)\,\hat{\delta}+\vec{n}(\eta)\vec{R}(x,y)-\vec{R}(x,y)\vec{n}(\eta)}{R^3(x,y)}+\right.\right.$$
$$\left.+3\frac{\vec{n}(\eta)\cdot\vec{R}(x,y)}{R^5(x,y)}\vec{R}(x,y)\,\vec{R}(x,y)\right]-$$
$$-\left[(1-2\nu)\frac{\vec{n}(y)\cdot\vec{R}(x,y)\,\hat{\delta}+\vec{R}(x,y)\,\vec{n}(y)-\vec{n}(y)\,\vec{R}(x,y)}{R^3(x,y)}+\right.$$
$$\left.\left.+3\frac{\vec{n}(y)\cdot\vec{R}(x,y)}{R^5(x,y)}\vec{R}(x,y)\,\vec{R}(x,y)\right]\right\}d\Sigma_y=$$

$$=2\mu A\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}\vec{a}(y)\cdot\left[(1-2\nu)\frac{\big(\vec{n}(\eta)-\vec{n}(y)\big)\cdot\vec{R}(x,y)\,\hat{\delta}+\vec{R}(x,y)\big(\vec{n}(\eta)-\vec{n}(y)\big)-\big(\vec{n}(\eta)-\vec{n}(y)\big)\vec{R}(x,y)}{R^3(x,y)}+\right.$$
$$\left.+3\frac{\big(\vec{n}(\eta)-\vec{n}(y)\big)\cdot\vec{R}(x,y)}{R^5(x,y)}\vec{R}(x,y)\,\vec{R}(x,y)\right]d\Sigma_y$$

Данная функция координат является непрерывной в области V, включая точку поверхности Σ, имеющую координаты η [8]). Следовательно, при устремлении

[8]) см. [[1]], стр.371.

$x \to \eta$ последний интеграл принимает свое прямое значение. Воспользуемся доказаным обстоятельством и запишем выражение $\vec{n}(\eta)\cdot\hat{\sigma}(x)$ в виде

$$\vec{n}(\eta)\cdot\hat{\sigma}(x)=\oiint_{\Sigma}\left[\hat{\Psi}(y,x,\eta)+\hat{\Phi}(y,x)\right]\cdot\vec{a}(y)d\Sigma_y-\oiint_{\Sigma}\hat{\Phi}(y,x)\cdot\vec{a}(y)d\Sigma_y \tag{3.11}$$

Перейдем в последнем соотношении к пределу, когда $x \to \eta$. Тогда, учитывая формулы Племели (2.5), получим значения $\vec{n}(\eta)\cdot\hat{\sigma}(x)$ изнутри области V_i $\left(\vec{n}(\eta)\cdot\hat{\sigma}(x)\right)_i$

$$\begin{aligned}\left(\vec{n}(\eta)\cdot\hat{\sigma}(x)\right)_i&=\oiint_{\Sigma}\vec{a}(y)\cdot\left[\hat{\Psi}(y,\eta,\eta)+\hat{\Phi}(y,\eta)\right]d\Sigma_y-\oiint_{\Sigma}\vec{a}(y)\cdot\hat{\Phi}(y,\eta)d\Sigma_y+\frac{1}{2}\vec{a}(\eta)=\\&=\oiint_{\Sigma}\vec{a}(y)\cdot\hat{\Psi}(y,\eta,\eta)d\Sigma_y+\frac{1}{2}\vec{a}(\eta)\end{aligned} \tag{3.12}$$

и снаружи $\left(\vec{n}(\eta)\cdot\hat{\sigma}(x)\right)_e$

$$\begin{aligned}\left(\vec{n}(\eta)\cdot\hat{\sigma}(x)\right)_e&=\oiint_{\Sigma}\vec{a}(y)\cdot\left[\hat{\Psi}(y,\eta,\eta)+\hat{\Phi}(y,\eta)\right]d\Sigma_y-\oiint_{\Sigma}\vec{a}(y)\cdot\hat{\Phi}(y,\eta)d\Sigma_y-\frac{1}{2}\vec{a}(\eta)=\\&=\oiint_{\Sigma}\vec{a}(y)\cdot\hat{\Psi}(y,\eta,\eta)d\Sigma_y-\frac{1}{2}\vec{a}(\eta)\end{aligned} \tag{3.13}$$

Непосредственным сравнением выражений для $\hat{\Psi}$ и $\hat{\Phi}$ можно убедиться в том, что $\Psi_{mk}(y,\eta,\eta)\equiv\Phi_{km}(\eta,y)$, а, следовательно, $a_m(y)\Psi_{mk}(y,\eta,\eta)\equiv\Phi_{km}(\eta,y)\,a_m(y)$. Используя граничные условия (3.6), соотношения (3.12), (3.13), получим интегральные уравнения

$$\frac{1}{2}\vec{a}(\eta)+\oiint_{\Sigma}\hat{\Phi}(y,\eta)\cdot\vec{a}(y)d\Sigma_y=\vec{p}(\eta) \tag{3.14}$$

для внутренней (II_i) и

$$\frac{1}{2}\vec{a}(\eta)-\oiint_{\Sigma}\hat{\Phi}(y,\eta)\cdot\vec{a}(y)d\Sigma_y=\vec{p}(\eta) \tag{3.15}$$

внешней (II_e) краевых задач.

Свойства интегральных уравнений

Уравнения (3.2), (3.3), (3.14), (3.15) представляют собой сингулярные интегральные уравнения, причем уравнение (3.15) является сопряженным по отношению к уравнению (3.2), а (3.14) сопряженным по отношению к (3.3) [2,4,7]. Для этих уравнений выполняются теоремы Фредголма [9]) и имеют место следующие утверждения:

- уравнения (3.2), (3.15) задач (I_i) и (II_e) всегда разрешимы и притом единственным образом;
- уравнение (3.14) задачи (II_i) разрешимо только тогда, когда выполнены условия

$$\iint_{\Sigma} \vec{p}(y) d\Sigma_y = 0, \quad \iint_{\Sigma} \vec{r}(y) \times \vec{p}(y) d\Sigma_y = 0 \qquad (3.16)$$

  выражающие собой необходимые условия равновесия тела – равенство нулю главного вектора и векторного момента внешних сил;
- уравнение (3.3) в общем случае неразрешимо из-за того, что не любое решение задачи (I_e) имеет такую же быстроту убывания на бесконечности как и потенциал двойного слоя .

Для доказательства первого утверждения предположим, что однородное уравнение (3.15) задачи (II_e) имеет нетривиальное решение $\vec{a}^0(y)$

$$\frac{1}{2}\vec{a}^0(\eta) - \iint_{\Sigma} \vec{a}^0(y) \cdot \widehat{\Phi}(y,\eta) d\Sigma_y = 0 \qquad (3.17)$$

Рассмотрим вектор перемещений $\vec{u}(x)$ в области V_e в форме потенциала простого слоя (2.3). Вектор $\vec{u}(x)$ на бесконечности имеет порядок $O(R^{-1})$, найденный по этому вектору тензор деформаций, а, следовательно, и тензор напряжений имеют порядок $O(R^{-2})$. Потенциальная энергия упругого тела определяется интегралом [3]

[9]) см. [7], стр. 224.

$$\int_{V_e} \sigma_{ik}\varepsilon_{ik} dV = \int_{V_e} 2\mu \left[\frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{mm} + \varepsilon_{ik} \right] \varepsilon_{ik} dV = \int_{V_e} 2\mu \left[\frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_{mm})^2 + \varepsilon_{ik}\varepsilon_{ik} \right] dV =$$
$$= \int_{V_e} \sigma_{ik} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) dV = \int_{V_e} \sigma_{ik} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} dV = -\int_{V_e} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_i} u_k dV + \oiint_{\Sigma} p_k u_k d\Sigma = \int_{V_e} X_k u_k dV = 0 \qquad (3.18)$$

Здесь учтено то, что массовые и поверхностные силы для таких деформаций равны нулю. Отсюда следует равенство нулю компонент тензора деформаций, что соответствует пермещению тела как твердого. Но перемещения тела на бесконечности равны нулю. Следовательно, $\vec{u}(x) = 0 \quad (x \in V_e)$. Соотношение, аналогичное уравнению (3.18), имеет место и для области V_i, а, значит, $\vec{u}(x) = 0 \quad (x \in V_i)$. Т.о. внутри области V_i тензор деформаций и тензор напряжений также равны нулю. Представляя вектор перемещений внутри V_i в форме потенциал простого слоя (2.3), используя равенство нулю выражения (3.12) (отсутствие напряжений на поверхности Σ), получим

$$\frac{1}{2}\vec{a}^0(\eta) + \oiint_{\Sigma} \vec{a}^0(y) \cdot \hat{\Phi}(y,\eta) d\Sigma_y = 0$$

Складывая левые и правые части этого уравнения и уравнения (3.17), получим, что $\vec{a}^0 = 0$. Отсюда следует единственность решения уравнения (3.15) и сопряженного ему уравнения (3.2).

Как отмечалось выше, однородное уравнение (3.3) имеет ненулевое решение

$$\vec{b}^0(y) = -\left(\vec{v}^0 + \vec{\omega} \times \vec{r}(y) \right)$$

Следовательно, и сопряженное однородное уравнение (3.14) имеет ненулевое решение $\vec{a}^0(y)$. Для выяснения механического смысла данного решения рассмотрим перемещения $\vec{u}(x)$ точек области V_e в виде потенциала простого слоя с плотностью потенциала, равной $\vec{a}^0(y)$. Определяя предельное значение $(\vec{n} \cdot \hat{\sigma})_e$, придем к соотношению (3.15) с $\vec{a}(y) = \vec{a}^0(y)$. Складывая полученное уравнение с однородным уравнением (3.14), получим равенство $\vec{a}^0(y) = \vec{p}(y)$. Т.о. решение однородного уравнения (3.14) представляет собой напряжения на поверхности Σ, которые относятся к краевой задаче, называемой _задачей Робена._ Эта задача формулируется следующим образом:

найти пермещения, равные нулю на бесконечности, упругого тела, заполняющего пространство вне замкнутой поверхности Σ *(область* V_e*) при заданном перемещении* $\vec{g}(\eta) = \vec{v}^0 + \vec{\omega} \times \vec{r}(y)$ *точек поверхности* Σ *как поверхности твердого тела, расположенного в области* V_i*, с заданными постоянными векторами* $\vec{v}^0$ *- трансляционного перемещения и* $\vec{\omega}$ *- поворота этого тела вокруг начала координат.*

Необходимым условием разрешимости уравнения (3.3) является ортогональность правой части $\vec{g}(\eta)$ данного уравнения (перемещений точек поверхности Σ) к напряжениям $\vec{p}^0(\eta) = \vec{a}^0(\eta)$ на этой поверхности, определяемым в результате решения задачи Робена,

$$\oint_{\Sigma} \vec{u}(y) \cdot \vec{p}^0(y) d\Sigma = 0$$

Приложение I. Основные соотношения линейной теории упругости

Здесь приведены основные соотношения теории упругости в виде справочного материала, используемые в основном тексте [3,5].

1^0. Закон Гука, определяющий связь между компонентами тензора напряжений $\widehat{\sigma}$ и тензора деформаций $\widehat{\varepsilon}$

$$\widehat{\sigma} = \lambda\theta\widehat{\delta} + 2\mu\widehat{\varepsilon} = 2\mu\left(\frac{\nu}{1-2\nu}\theta\widehat{\delta} + \widehat{\varepsilon}\right) \quad \left(\sigma_{ik} = \lambda\theta\delta_{ik} + 2\mu\varepsilon_{ik} = 2\mu\left(\frac{\nu}{1-2\nu}\theta\delta_{ik} + \varepsilon_{ik}\right)\right) \qquad (4.1)$$

$$\widehat{\varepsilon} = \frac{1}{2\mu}\left(\widehat{\sigma} - \frac{3\nu}{1+\nu}\sigma\widehat{\delta}\right) \quad \left(\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{ik} - \frac{3\nu}{1+\nu}\sigma\delta_{ik}\right)\right) \qquad (4.2)$$

где

$$2\mu = E/(1+\nu), \quad \lambda = 2\mu\nu/(1-2\nu) \qquad (4.3)$$

- физические константы упругого материала, E,ν - модуль Юнга и коэффициент Пуассона, соответсвенно, $\theta = \varepsilon_{mm}$ - дилатация (след тензора деформаций), $\sigma = \sigma_{mm}/3$ - среднее напряжение (одна треть следа тензора напряжений).

2^0. Уравнение равновесия

$$div\,\widehat{\sigma} + \mathbf{X} = 0 \quad \left(\sigma_{ki,i} + X_i = 0\right) \qquad (4.4)$$

уравнение Лямэ

$$(\lambda+\mu)\nabla div\,\mathbf{u} + \mu\Delta\mathbf{u} + \mathbf{X} = 0 \quad \left((\lambda+\mu)u_{ki,k} + \mu u_{i,kk} + X_i = 0\right) \qquad (4.5)$$

для вектора пермещений u_i.

Здесь $\vec{X}$ – объемная плотность массовых сил, запятая перед индексом, означает ковариантное дифференцирование по соответствующей координате.

Приложение II. Сводка применяемых формул и теорем.

1[0]. Обобщенная формула Гаусса-Остроградского [6]

$$\int\limits_V T^{k\,j_1\ldots}_{i_1\ .\ \ldots,k}dV = \oint\limits_\Sigma n_k T^{k\,j_1\ldots}_{i_1\ .\ \ldots}d\Sigma \qquad (5.1)$$

где $T^{.\,j_1\ldots}_{i_1\,.\ \ldots}$ - тензор n-го ранга, индекс после запятой означает ковариантное дифференцирование по соответствующей переменной, Σ - поверхность, охватывающая объем V, $\vec{n}$ - ковариантный вектор нормали, внешней по отношению к объему V. В случае безграничной области, когда тензор $T^{.\,j_1\ldots}_{i_1\,.\ \ldots}$ имеет порядок убывания на бесконечности $O(\frac{1}{R^{2+\alpha}}),\ \ (\alpha > 0)$, правая часть в соотношении (5.1) обращается в нуль.

2[0]. Интеграл Гаусса.

$$W_0(\zeta) = \oint\limits_\Sigma \frac{\partial}{\partial n_x}\frac{1}{R(x,\zeta)}d\Sigma_x = \begin{cases} -4\pi & (\zeta \in V_i) \\ -2\pi & (\zeta \in \Sigma) \\ 0 & (\zeta \in V_e) \end{cases} \qquad (5.2)$$

Литература

1. Михлин С.Г. Курс математической физики. М.: Наука, 1968. - 576 с.
2. Забрейко П.П., Кошелев А.И., Красносельский М.А. и др. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. - 448 с.
3. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука.-1970. 939 с.
4. Купрадзе В.Д. Методы потенциала в теории упругости. Физматгиз, 1963.
5. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир.-1975. 872 с.
6. Борисенко А.И., Тарапов И.Е. Векторный анализ и начала тензорного исчисления. Харьков: Выща школа, Изд-во при Харьк. ун-те, 1986. - 216 с.
7. Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. Л.: Физматгиз, 1962. – 256 с.

Навчальне видання

ПОТЕНЦІАЛИ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ
ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОЇ ТА ДРУГОЇ
КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

Методичний посібник
для студентів III-IV курсів
спеціальності "Механіка"

Укладач ІЄВЛЕВ Іван Іванович

Відповідальний за випуск І. І. Ієвлев