МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

Харьковский национальный университет
им. В.Н. Каразина

Л.П. ЯЦУК

ПРАВИЛО ПЕРЕХОДА ОТ СИСТЕМЫ ЕДИНИЦ СИ К СИСТЕМЕ ГАУССА В ФОРМУЛАХ ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

Методические указания
для самостоятельной работы студентов
по курсу «ТЕОРИЯ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ»

Харьков – 2002

УДК 621.396.677

Л.П. Яцук. Правило перехода от системы единиц СИ к системе Гаусса в формулах для электромагнитных полей. Методические указания для самостоятельной работы студентов по курсу «Теория волновых процессов». Харьков, 2002. 30 с.

Анализируются причины различия в форме записи уравнений Максвелла и энергетических соотношений для электромагнитных полей при использовании систем единиц СИ и Гаусса. Предложено и обосновано правило перехода в решениях задач электродинамики от системы СИ к системе Гаусса.

Для студентов радиофизического факультета ХНУ им. В.Н.Каразина.

Л.П. Яцук. Правило переходу від системи одиниць СІ до системи Гауса в формулах для електромагнітних полів. Методичні вказівки для самостійної роботи студентів за курсом «Теорія хвильових процесів». Харків, 2002. 30 с.

Аналізуються причини неоднаковості у формі запису рівнянь Максвела та енергетичних співвідношень для електромагнітних полів використанні систем одиниць СІ і Гауса. Запропоновано і обґрунтовано правило переходу у розв'язках задач електродинаміки від системи СІ до системи Гауса.

Для студентів радіофізичного факультету ХНУ ім. В.Н.Каразіна.

Lyudmyla P. Yatsuk. The Rule of Transition from the SI Units System to the Gauss-System in Formulas for the Electromagnetic Fields. The methodical instructions for the personal students work on the subject "The theory of Wave Processes". Kharkov, 2002. 30 P.

The reasons of the difference between representations of the Maxwell equations and energetic correlation for electromagnetic fields while using SI-Units System and Gauss one are analysed. The rule of transition from the SI-System to the Gauss-System in electrodynamic problem solutions is suggested and well grounded.

For Kharkov V. Karasin National University Schools of Radiophysics students.

Рекомендовано ученым советом радиофизического факультета Харьковского национального университета (протокол № от 03.02)

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

1**. ПРАВИЛО ПЕРЕХОДА ОТ СИСТЕМЫ ЕДИНИЦ СИ К СИСТЕМЕ ГАУССА В УРАВНЕНИЯХ МАКСВЕЛЛА**

1.1 Уравнения Максвелла в системах СИ и Гаусса.

1.2 Поле точечного заряда в системах СИ и Гаусса

2. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ПОЛЕЙ В СИСТЕМАХ СИ И ГАУССА

2.1 Вводные замечания

2.2 Вывод теоремы Пойнтига в системах СИ и Гаусса

2.3 Физический смысл слагаемых, входящих в теорему Пойнтинга

2.4 Физическая интерпретация теоремы Пойнтинга

2.5 Сопоставление основных физических величин для электромагнитного поля в системах СИ и Гаусса

3. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ КОМПЛЕКСНЫХ АМПЛИТУД В СИСТЕМАХ СИ И ГАУССА

3.1 Уравнения Максвелла для комплексных амплитуд

3.2 Средние за период квадратурные характеристики поля, изменяющегося по гармоническому закону, в системах единиц СИ и Гаусса

3.3 Уравнение баланса для средней за период мощности

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В научной физико-математической литературе наиболее часто используются системы единиц СИ и Гаусса. В середине 19 в. К.Ф.Гаусс и В.Вебер предложили систему единиц для электрических и магнитных величин, основными единицами которой были миллиметр, миллиграмм и секунда. Во второй половине 19 в. Британская ассоциация по развитию наук приняла две системы единиц: электростатическую (СГСЕ) и электромагнитную (СГСМ) с основными единицами сантиметр (*см*), грамм (*г*), секунда (*с*). Со второй половины 20 в. наибольшее распространение получила так называемая СГС симметричная система единиц (система единиц Гаусса), широко используемая в научных исследованиях. Неудобство этой системы состоит в том, что размерности электрических и магнитных величин в ней выражаются через *см*, *г*, *с*. Наряду с системой СГС развивалась практическая система единиц. В 1901 году Дж.Джоржи предложил систему единиц с основными единицами метр, килограмм, секунда и одной электрической единицей Кулон. Эта система была положена в основу Международной системы единиц СИ, принятой в 1960 году на 11-й Генеральной конференции по мерам и весам. В СИ приняты 7 основных единиц: метр, килограмм, секунда, Ампер, Кельвин, кандела, моль. Международная система единиц СИ введена в СССР в 1982 году.

Исторически сложилось так, что многие фундаментальные научные издания написаны в системе единиц Гаусса. В качестве примера можно привести многотомное издание по теоретической физике Л.Д.Ландау и Е.М.Лифшица. Часть литературы, в которой излагаются вопросы теории волновых процессов, написана в системе единиц Гаусса [1-4], [10-12]. Другие книги написаны с использованием системы СИ [5-9]. И в настоящее время научные работы пишут с использованием систем единиц Си или Гаусса в зависимости от того, в какой научной школе прошло научное становление данного специалиста. При изучении научной литературы, при сравнении результатов исследований разных авторов часто возникают затруднения из-за необходимости перехода от системы СИ к системе Гаусса или наоборот. Целью настоящей методической разработки является выяснение истоков различия записи уравнений для электромагнитных полей в системах единиц СИ и Гаусса, а также построение алгоритма перехода в формулах от одной системы единиц к другой.

Методическая разработка предназначена для студентов старших курсов радиофизических факультетов и научных работников, занимающихся вопросами теории электромагнитных волновых процессов.

1. ПРАВИЛО ПЕРЕХОДА ОТ СИСТЕМЫ ЕДИНИЦ СИ К СИСТЕМЕ ГАУССА В УРАВНЕНИЯХ МАКСВЕЛЛА

1.1. Уравнения Максвелла в системах СИ и Гаусса.

Согласно основным положениям макроскопической электродинамики электромагнитное поле в любой среде в каждый момент времени определяется четырьмя величинами: векторами $\vec{E}$ и $\vec{D}$, характеризующими электрическое поле, и векторами $\vec{H}$ и $\vec{B}$, характеризующими магнитное поле. В уравнениях электромагнитного поля помимо этих векторов фигурируют еще две величины: плотность заряда ρ и плотность тока $\vec{j}$. В вакууме это, соответственно, плотность свободных электрических зарядов и плотность электрического тока (тока проводимости). Эти токи и заряды являются источниками поля, их часто называют сторонними токами и зарядами. В среде под действием поля появляются наведенные токи и заряды, величина которых зависит от свойств среды, описываемых макроскопическими параметрами ε, μ, σ.

Известно, что векторы $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{H}$ и $\vec{B}$, а также ρ и $\vec{j}$ связаны между собой уравнениями Максвелла, материальными уравнениями и уравнением непрерывности. Вид уравнений Максвелла в системах СИ и Гаусса различен. Постараемся выяснить первопричину этого различия. Начнем с того, что запишем уравнения Максвелла для среды в системах СИ и Гаусса и постараемся построить алгоритм перехода из одной системы к другой.

<u>Система СИ</u>	<u>Система Гаусса</u>	
$rot\vec{H} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}$	$rot\vec{H} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \dfrac{4\pi}{c}\vec{j}$	(1.1)
$rot\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$rot\vec{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	(1.2)

Система СИ	Система Гаусса	
$div\vec{D} = \rho$	$div\vec{D} = 4\pi\rho$	(1.3)
$div\vec{B} = 0$	$div\vec{B} = 0$	(1.4)

Эти уравнения дополняются материальными уравнениями, которые в системах СИ и Гаусса тоже различаются:

Система СИ	Система Гаусса	
$\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E}$, $\vec{B} = \mu_0\mu\vec{H}$	$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, $\vec{B} = \mu\vec{H}$	(1.5)

Здесь $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi}10^{-9}\frac{Ф}{м}$ и $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}\frac{Гн}{м}$ – электрическая и магнитная константы, фигурирующие только в системе СИ, в системе Гаусса они равны единице; ε и μ – диэлектрическая и магнитная проницаемости вещества, одинаковые в системах СИ и Гаусса. В системе СИ для краткости записи формул часто вводят величины

$$\varepsilon_a = \varepsilon_0\varepsilon \quad \text{и} \quad \mu_a = \mu_0\mu, \tag{1.6}$$

именуемые как абсолютная диэлектрическая и магнитная проницаемости. При этом ε и μ носят название относительных проницаемостей.

Очень важную роль при решении задач электродинамики играют уравнение непрерывности

$$\frac{d\rho}{dt} + div\,\vec{j} = 0 \tag{1.7}$$

и дифференциальный закон Ома

$$\vec{j} = \sigma\vec{E}, \tag{1.8}$$

формулировка которых инвариантна относительно выбора системы единиц.

Заметим, что инвариантность ряда соотношений влияет на конкретный вид записи физических величин в разных системах единиц. С этим мы встретимся при записи выражений для плотности энергии электромагнитного поля в объеме и плотности потока энергии (вектора Умова-Пойнтинга) через поверхность.

Выясним, в чем проявляется коренное различие систем единиц СИ и Гаусса и как это различие влияет на вид записи уравнений Максвелла. Начнем с основных величин. В системе Гаусса в качестве основных единиц выбраны грамм, сантиметр, секунда (*г, см, с*), и все электрические величины выражаются через них. В системе СИ к исходным единицам *кг, м, с* добавляется электрическая величина – единица силы тока Ампер (*А*), которая однозначно связана с единицей заряда Кулон (*Кл*): *А=Кл/с*. Различие выбора основных единиц обусловливает различие записи основного закона электростатики – закона Кулона.

Система СИ — Система Гаусса

$$F = k\frac{q_1 q_2}{\varepsilon r^2} \qquad\qquad F = \frac{q_1 q_2}{\varepsilon r^2} \tag{1.9}$$

Здесь q_1 и q_2 – величины взаимодействующих зарядов, F – сила взаимодействия, r – расстояние между зарядами. В системе СИ каждая из входящих в (1.9) величин имеет свою размерность. Сила взаимодействия в вакууме между зарядами величиной в 1 *Кл* каждый, расположенными на расстоянии в 1 *м* друг от друга, найдена опытным путем. Для того чтобы в (1.9) выполнялось равенство левой и правой частей, в системе СИ потребовалось ввести размерный коэффициент k, величина которого на основании опытных данных оказалась такой

$$k = 9\cdot 10^9\left[\frac{Н\cdot м^2}{Кл^2}\right] = \frac{кг\cdot м^3}{с^2 Кл^2}, \tag{1.10}$$

где буквой *Н* обозначена единица силы Ньютон.

Для коэффициента k введено новое обозначение:

$$k = 1/\left(4\pi\varepsilon_0\right). \tag{1.11}$$

Из (1.11) с учетом (1.10) находим величину постоянной ε_0 и ее размерность

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi}10^{-9}; \tag{1.12}$$

$$[\varepsilon_0] = \frac{c^2 \cdot Кл^2}{кг \cdot м^3} = \frac{Кл \cdot Кл}{Н \cdot м \cdot м} = \frac{Кл \cdot Кл}{Дж \cdot м} = \frac{Кл}{В \cdot м} = \frac{Ф}{м}. \qquad (1.13)$$

В системе Гаусса среди основных единиц отсутствует единица измерения электрических величин. Поэтому на основании закона Кулона выводится электростатическая единица заряда q, размерность которой выражается через основные единицы *г, см, с* таким образом

$$[q] = г^{1/2} см^{3/2} сек^{-1}. \qquad (1.14)$$

Полезно знать связь между единицами зарядов в системах СИ и Гаусса:

1 *Кл* =$3 \cdot 10^9$ *ед. зар. SGSE*

Для получения магнитной постоянной μ_0 перепишем уравнения (1.1) и (1.2) для вакуума ($\varepsilon = 1$, $\mu = 1$) с учетом (1.5), полагая в них $\vec{j} = 0$ (однородные уравнения).

Система СИ	Система Гаусса	
$rot\vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	$rot\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	(1.15)
$rot\vec{E} = \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$	$rot\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$	(1.16)

Исключим из этих уравнений вектор $\vec{H}$. В результате получаем уравнения такого вида:

в системе Гаусса $$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0; \qquad (1.17)$$

в системе СИ $$\Delta\vec{E} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad (1.18)$$

Решение уравнения (1.17), является функцией времени t и координат точек пространства, определяемых радиусом-вектором $\vec{r}$. Оно принимает форму функции, зависящей от определённой комбинации аргументов [3]:

$$\vec{E} = \vec{E}_1\left(t - \frac{\vec{r}\vec{n}}{c}\right) + \vec{E}_2\left(t + \frac{\vec{r}\vec{n}}{c}\right), \qquad (1.19)$$

где $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ –векторы электрического поля волн, распространяющихся в противоположных направлениях, $\vec{n}$- орт, параллельный направлению распространения, скалярное произведение $\vec{r}\vec{n}=\xi$ имеет смысл координаты вдоль направления $\vec{n}$. Амплитуды полей $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ сохраняются постоянными, если постоянны аргументы описывающих их функций. Из условия $t-\dfrac{\xi}{c}=const$ получаем $\dfrac{d\xi}{dt}=c$. Следовательно c – скорость распространения волны. Известно, что в вакууме это скорость света, которая определена опытным путем.

$$c{=}3\ 10^8 м/с = 3\ 10^{10}\ см/с. \tag{1.20}$$

Сравнивая уравнения (1.17) и (1.18), замечаем, что в уравнении (1.18) роль множителя $1/c^2$ играет произведение $\varepsilon_0\mu_0$. Физический смысл множителя $\varepsilon_0\mu_0$ должен быть таким же, как и в (1.17), следовательно

$$c=1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\,. \tag{1.21}$$

Из (21) с учетом (20) и (12) получаем

$$\mu_0=\frac{1}{c^2\varepsilon_0}=\frac{36\pi\cdot 10^9}{9\cdot 10^{16}}=4\pi\cdot 10^{-7} \tag{1.22}$$

Выясним размерность магнитной постоянной μ_0. Подставляя в (1.22) размерности c и ε_0, получаем

$$[\mu_0]=\frac{сек^2 В\cdot м}{м^2 Кл}=\frac{В\cdot сек}{А\cdot м}=\frac{Гн}{м}. \tag{1.23}$$

При выводе размерности μ_0 (1.23) учтено, что напряжение самоиндукции V определяется в соответствии с законом самоиндукции

$$V=L\frac{\partial I}{\partial t}, \tag{1.24}$$

где L –индуктивность контура, имеющая размерность

$$[L]=\frac{В\cdot сек}{А}=Гн. \tag{1.25}$$

Используя (1.12), (1.13), а также (1.22), (1.23), найдем значение величины

$$W_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi \tag{1.26}$$

и ее размерности $\left[W_0\right] = B/A = Ом$. Благодаря своей размерности физическая величина W_0 получила название «характеристическое сопротивление свободного пространства».

В системе Гаусса, по определению, ε_0=1, μ_0=1 – величины безразмерные. Из уравнений Максвелла, записанных в системе Гаусса, следует, что размерности векторов полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ оказываются одинаковыми, а характеристическое сопротивление свободного пространства $W_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = 1$ – тоже величина безразмерная. В этих уравнениях присутствует постоянная *c,* имеющая смысл скорости света*,* перед плотностью тока $\vec{j}$ в уравнении (1.1) стоит множитель $4\pi/c$, перед плотностью заряда ρ в уравнении (1.3) – множитель 4π. В системе СИ этих множителей нет, зато присутствуют отличные от единицы константы ε_0 и μ_0. Подчеркнем, что решения любой электродинамической задачи (задачи дифракции, рассеяния, излучения, распространения), полученные в системах СИ и Гаусса, по форме записи отличаются друг от друга. Это затрудняет сверку вновь полученного решения задачи с ранее известным, если эти задачи решались в разных системах единиц. Поэтому очень важно найти алгоритм перехода в уравнениях макроскопической электродинамики от одной системы единиц к другой. Попытаемся сделать это, исходя из различия записи закона Кулона в системах СИ и Гаусса.

1.2. Поле точечного заряда в системах СИ и Гаусса

Запишем в системах СИ и Гаусса выражения для вектора напряженности электрического поля $\vec{E}$, создаваемого точечным зарядом, и постараемся найти правило перехода в этих выражениях от одной системы к другой.

Система СИ — Система Гаусса

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}\vec{r}^{\,0} \qquad \vec{E} = \frac{q}{\varepsilon r^2}\vec{r}^{\,0} \tag{1.27}$$

Здесь $\vec{r}^{\,0}$ – орт вдоль линии, соединяющей взаимодействующие заряды. Примем во внимание, что в системе СИ $W_0 = 120\pi$, а в системе Гаусса $W_0 = 1$. Выразим ε_0 и μ_0 через W_0 и скорость света c. С учетом (1.21) и (1.26) получаем

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{W_0 c}; \tag{1.28}$$

$$\mu_0 = \frac{W_0}{c}. \tag{1.29}$$

Подставим ε_0 из (1.28) в выражение для поля $\vec{E}$ (1.27), записанное в системе СИ

$$\vec{E} = \frac{cW_0 q}{4\pi \cdot \varepsilon r^2}\vec{r}^{\,0} \tag{1.30}$$

Видим, что если в этой формуле положить W_0=1, а заряд q заменить на $\frac{4\pi}{c}q_g$, получим формулу для поля $\vec{E}$ точечного заряда, тождественно совпадающую с полем $\vec{E}$ (1.27) в системе Гаусса (условимся, что нижний индекс g указывает на принадлежность q системе Гаусса). Это эквивалентно тому, что в исходной формуле мы одновременно заменим ε_0 на $\frac{1}{W_0 c}$, а q – на $\frac{4\pi}{c}\cdot q_g$ и затем положим W_0=1.

В уравнениях Максвелла, записанных в системе СИ, в отличие от закона Кулона, присутствуют еще μ_0, плотность тока $\vec{j}$ и плотность заряда ρ. При переходе к системе Гаусса μ_0, записанное в виде (1.29), можно заменить таким же образом, как ε_0 (выражая через c и W_0, и полагая затем W_0=1). Поскольку, по определению, ток $I = \frac{dq}{dt}$, то и плотность тока $\vec{j}$ тоже следует заменить на $\frac{4\pi}{c} \cdot \vec{j}_g$; так же точно следует заменить плотность заряда ρ. Легко проверить, что после таких замен в уравнениях Максвелла, представленных в системе СИ, мы получаем уравнения Максвелла, записанные в системе Гаусса. Обратный процесс оказывается более затруднительным ввиду того, что сложно установить, где должно появиться $W_0 = 120\pi$ (ведь в системе Гаусса W_0=1) и где константу c следует заменить на $1/\varepsilon_0$, а где – на $1/\mu_0$.

Итак, формальное правило перехода от уравнений Максвелла и их решений, записанных в системе СИ, к уравнениям Максвелла и их решениям в системе Гаусса сводится к следующему: следует произвести такие формальные замены:

$$\varepsilon_0 \Rightarrow 1/c, \quad \mu_0 \Rightarrow 1/c, \quad W_0 \Rightarrow 1, \quad \vec{j} \Rightarrow \frac{4\pi}{c}\vec{j}, \quad \rho \Rightarrow \frac{4\pi}{c}\rho. \qquad (1.31)$$

2. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ПОЛЕЙ В СИСТЕМАХ СИ И ГАУССА

2.1. Роль энергетических соотношений при постановке и решении задач рассеяния электромагнитных волн на неоднородностях

В процессе решения задач электродинамики (например, задач рассеяния на неоднородностях) очень важную роль играют энергетические соотношения для полей. Эти соотношения дают сведения о распределении мощности источника между различными каналами и могут использоваться для проверки правильности решения задачи. Так, например, пусть от высокочастотного генератора по волноводу распространяется волна и попадает в область с неоднородностью в виде некого отверстия. На этом отверстии полем первичной волны наводится электрическое поле, которое становится вторичным источником электромагнитного поля. От отверстия в оба конца волновода побегут возбужденные им волны. Кроме того, часть энергии излучится в смежный электродинамический объем. Если среда, заполняющая волновод, имеет потери, часть энергии израсходуется на нагрев диэлектрика. В этом процессе должен выполняться закон сохранения энергии. Мощность падающей волны должна равняться сумме мощностей отраженной, прошедшей по волноводу за неоднородность волн, мощности излучения и мощности, израсходованной за счет потерь в среде. Выполнение баланса мощности является одним из критериев правильности решения задачи. Энергетические соотношения для данного электродинамического объема определяются теоремой Пойнтинга. Форма записи этих соотношений зависит от выбора системы единиц. Поставим перед собой задачу проследить процесс вывода формул для энергии электромагнитного поля, потока энергии, мощности потерь в системах единиц СИ и Гаусса и осознать закономерность перехода от одной формы записи (например, в системе СИ) к другой (в системе Гаусса).

2.2. Вывод теоремы Пойнтинга в системах СИ и Гаусса

Начнем с системы Гаусса как более сложной, чтобы проследить за промежуточными выкладками. Выберем некоторый объем *V*, однородно заполненный средой с макроскопическими параметрами ε, μ, σ и ограниченный замкнутой поверхностью *S*. Запишем роторные уравнения Максвелла для этого объема, а также материальные уравнения.

$$rot\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}\,; \tag{2.1}$$

$$rot\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\,; \tag{2.2}$$

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}\,, \qquad \vec{B} = \mu\vec{H}\,. \tag{2.3}$$

Полагаем, что ток $\vec{j}$ включает в себя сторонний ток $\vec{j}^{\,st}$ и наведенный ток проводимости $\vec{j}^{\,nav} = \sigma\vec{E}$:

$$\vec{j} = \vec{j}^{\,st} + \vec{j}^{\,nav} \tag{2.4}$$

Умножим скалярно уравнение (2.1) на $\vec{E}$, а уравнение (2.2) – на $\vec{H}$, и вычтем из первого результата второй.

$$\vec{E}rot\vec{H} - \vec{H}rot\vec{E} = \frac{1}{c}E\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \frac{1}{c}\vec{H}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}\vec{E}\,. \tag{2.5}$$

Для среды не изменяющейся, во времени получаем из (2.5) с учетом (2.3)

$$div\left[\vec{E},\vec{H}\right] = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon\left|\vec{E}\right|^2}{2} + \frac{\mu\left|\vec{H}\right|^2}{2}\right) + \frac{4\pi}{c}\vec{j}\vec{E}\,. \tag{2.6}$$

Проинтегрируем это выражение по объёму *V*, предварительно разделив его на множитель $4\pi/c$ при $\vec{j}\vec{E}$ для того чтобы выделить интеграл $\int\limits_V \vec{j}\vec{E}dV$ в чистом виде. Физический смысл этого интеграла рассмотрим ниже. После интегрирования в (2.6) с учетом (2.4) и теоремы Остроградского-Гаусса $\int\limits_V div\vec{A}dV = \oint\limits_S \vec{A}\vec{n}dS$ получаем

$$-\int_V \vec{j}^{\,st}\vec{E}dV = \int_V \vec{j}^{\,nav}\vec{E}dV + \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{8\pi}\int_V\left(\varepsilon\left|\vec{E}\right|^2 + \mu\left|\vec{H}\right|^2\right)dV + \frac{c}{4\pi}\oint_S\left[\vec{E},\vec{H}\right]\vec{n}dS\,. \tag{2.7}$$

В системе СИ после аналогичного рассмотрения приходим к выражению

$$-\int_V \vec{j}^{\,st}\vec{E}dV = \int_V \vec{j}^{\,nav}\vec{E}dV + \frac{\partial}{\partial t}\int_V\left(\frac{\varepsilon_a\left|\vec{E}\right|^2}{2} + \frac{\mu_a\left|\vec{H}\right|^2}{2}\right)dV + \oint_S\left[\vec{E},\vec{H}\right]\vec{n}dS\,. \tag{2.8}$$

Здесь $\vec{n}$ – орт внешней нормали к поверхности, ограничивающей объём V. Равенства (2.7) и (2.8) являются математическим эквивалентом теоремы Пойнтинга.

2.3. Физический смысл слагаемых, входящих в теорему Пойнтинга.

Выясним физический смысл всех интегралов, входящих в выражения (2.7) и (2.8). Начнем с интеграла $\int_V \vec{j}\vec{E}dV$. Физический смысл этого интеграла не зависит от выбора системы единиц. И в системе СИ, и в системе Гаусса этот интеграл имеет смысл мощности, отдаваемой током с плотностью $\vec{j}$ полю или забираемой у него (в зависимости от знака интеграла). Покажем это на примере элементарного цилиндра с током длиной Δl и площадью поперечного сечения ΔS (объем этого цилиндра $\Delta V = \Delta l \cdot \Delta S$). В пределах рассматриваемого цилиндра плотность тока $\vec{j}$ и напряженность электрического поля $\vec{E}$ можно считать постоянными. Тогда скалярная величина $E\Delta l = U$ имеет смысл напряжения между торцами цилиндра, а $j\Delta S = I$ – полный ток, текущий по нему. Известно, что $U \cdot I = P$ – мощность, постоянного тока на участке цепи с напряжением U между его концами. Следовательно, подынтегральное выражение $\vec{j}\vec{E}dV$ в интеграле $\int_V \vec{j}\vec{E}dV$ имеет смысл мощности тока в элементе объема $dV = \lim \Delta V\big|_{\Delta S\to 0, \Delta l\to 0}$, а весь интеграл определяет мощность, отдаваемую током полю, или забираемую у него. Рассмотрим отдельно интегралы $\int\limits_V \vec{j}\vec{E}dV$, содержащие в подынтегральных выражениях $\vec{j}^{st}$ и $\vec{j}^{nav}$.

Ток $\vec{j}^{st}$ черпает энергию у стороннего источника и отдает ее полю. Сторонним источником может служить высокочастотный генератор или поле удаленного излучателя. Интеграл $-\int\limits_V \vec{j}^{st}\vec{E}dV$ (с минусом перед интегралом) имеет смысл мощности, отдаваемой сторонними источниками полю в объёме *V*. Это можно объяснить следующим образом. Ток проводимости – это упорядоченное движение положительно заряженных частиц. Ток отдаёт энергию полю при торможении этих частиц. Положительно заряженные частицы тормозятся полем, если направление их движения (направление вектора $\vec{j}^{st}$), противоположно направлению вектора $\vec{E}$. При этом скалярное произведение $\vec{E}\vec{j}^{st} < 0$, следовательно, $-\int\limits_V \vec{j}^{st}\vec{E}dV > 0$ (является положительной величиной).

Интеграл $\int\limits_V \vec{j}^{nav}\vec{E}dV$ – это мощность потерь, определяемая по закону Джоуля -Ленца. Здесь поле стимулирует появление тока $\vec{j}^{nav}$, который забирает энергию у поля и превращает ее в тепло. Это тоже можно показать на примере бесконечно малого цилиндра с длиной Δl, поперечным сечением ΔS, и удельной проводимостью σ. Пусть по этому цилиндру течет наведенный ток с плотностью $\vec{j}^{nav} = \sigma\vec{E}$. В этом случае направление тока и вектора электрического поля совпадают, поскольку наведенный ток возникает под действием поля $\vec{E}$, которое затрачивает свою энергию, приводя положительные заряды к упорядоченному движению и ускоряя их. Мощность *p*, выделяющаяся в виде тепла в элементарном цилиндре с током $\vec{I} = \vec{j}^{nav}\Delta S = \sigma\vec{E}\Delta S$ и сопротивлением *R*, по закону Джоуля-Ленца определяется как:

$$p = \left|\vec{I}\right|^2 R = \vec{I}\vec{I}R = \vec{j}^{\,nav}\Delta S\sigma\vec{E}\Delta SR\,. \qquad (2.9)$$

Подставляя в (2.9) $R = \Delta l/(\sigma\Delta S)$, получаем $p = \vec{j}^{\,nav}\vec{E}\Delta S\Delta l = \vec{j}^{\,nav}\vec{E}\Delta V$, что в пределе при переходе к бесконечно малому цилиндру сводится к $p = \vec{j}^{\,nav}\vec{E}dV$. Для получения мощности, затрачиваемой во всем объеме V, надо провести по нему интегрирование. Таким образом, становится ясным указанный выше физический смысл интеграла $\int\limits_V \vec{j}^{\,nav}\vec{E}dV$.

В силу инвариантности физического смысла интеграла $\int\limits_V \vec{j}\vec{E}dV$ относительно выбора системы единиц мы получаем разные формы записи правых частей уравнений (2.7) и (2.8). Однако от уравнения (2.8), записанного в системе СИ, можно перейти к уравнению (2.7), полученному в системе Гаусса, с использованием тех же формальных замен (1.31), которые были предложены в разделе 1.

Последовательность операций при переходе от (2.8) к (2.7).

1. Введем временно для токов нижние индексы “si” и “g” для идентификации систем СИ и Гаусса.
2. Произведем в (2.8) замены $\vec{j}_{si}^{\,st} \Rightarrow \frac{4\pi}{c}\vec{j}_g^{\,st}$, $\vec{j}_{si}^{\,nav} \Rightarrow \frac{4\pi}{c}\vec{j}_g^{\,nav}$, $\varepsilon_a = \varepsilon_0\varepsilon \Rightarrow \frac{\varepsilon}{c}$; $\mu_a = \mu_0\mu \Rightarrow \frac{\mu}{c}$.

   Уравнение (2.8) после подстановок принимает вид:

$$-\frac{4\pi}{c}\int\limits_V \vec{E}\,\vec{j}_g^{\,st}dV = \frac{4\pi}{c}\int\limits_V \vec{E}\,\vec{j}_g^{\,nav} + \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int\limits_V\left(\frac{\varepsilon\left|\vec{E}\right|^2}{2} + \frac{\mu\left|H\right|^2}{2}\right)dV + \oint\limits_S \vec{S}\vec{n}dS \qquad (2.10)$$

3. Разделим левую и правую части уравнения (2.10) на $\frac{4\pi}{c}$. Видим, что в результате получается уравнение, тождественно совпадающее с уравнением (2.7), если в нем плотность тока $\vec{j}$ снабдить индексом g.

Мы уже выяснили физический смысл интегралов со сторонними и наведенными токами в подынтегральных выражениях: мощность сторонних токов и мощность потерь. Введем для них обозначения

$$P^{st} = -\int\limits_V \vec{j}^{\,st}\vec{E}dV\ , \tag{2.11}$$

$$P^{pot} = \int\limits_V \vec{j}^{\,nav}\vec{E}dV = \int\limits_V \sigma\left|\vec{E}\right|^2 dV\ . \tag{2.12}$$

Поскольку эти интегралы имеют одинаковый физический смысл в системах СИ и Гаусса, то и объемный, и поверхностный интегралы в правых частях равенств (2.7) и (2.8) вместе с коэффициентами, стоящими при них, должны иметь одинаковый физический смысл. Рассмотрим физический смысл этих интегралов несколько подробнее. Начнем с анализа интегралов в равенстве (2.8).

Для уяснения смысла второго объемного интеграла в правой части (2.8) рассмотрим частный случай:

а) Объём V окружен идеально проводящей оболочкой. Тогда в силу граничных условий для поля $\vec{E}$ на идеальном металле ($\vec{E}_\tau = 0$) подынтегральное выражение в поверхностном интеграле равно нулю. Следовательно $\oint\limits_S\left[\vec{E},\vec{H}\right]\vec{n}dS$ =0.

б) Среда внутри области V не имеет потерь ($\sigma = 0$).

Тогда первый интеграл в правой части равенства (2.9) тоже равен нулю. В результате получаем:

$$-\int\limits_V \vec{j}^{\,st}\vec{E}dV = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V\left(\frac{\varepsilon_a\left|\vec{E}\right|^2}{2}+\frac{\mu_a\left|\vec{H}\right|^2}{2}\right)dV\ . \tag{2.13}$$

Это значит, что мощность сторонних источников может расходоваться только на изменение энергии электромагнитного поля. Следовательно, то, что стоит под знаком производной, а именно: интеграл

$$W = \int\limits_V\left(\frac{\varepsilon_a\left|\vec{E}\right|^2}{2}+\frac{\mu_a\left|\vec{H}\right|^2}{2}\right)dV\ . \tag{2.14}$$

имеет смысл энергии электромагнитного поля в объёме *V*. Подынтегральное выражение в скобках можно интерпретировать как плотность энергии *w*, которая складывается из плотности электрической энергии

$$w^e = \frac{\varepsilon_a \left|\vec{E}\right|^2}{2} \tag{2.15}$$

и плотности магнитной энергии

$$w^m = \frac{\mu_a \left|\vec{E}\right|^2}{2}, \tag{2.16}$$

$$w = w^e + w^m. \tag{2.17}$$

Физический смысл поверхностного интеграла.

Рассмотрим теперь такой частный случай.
а) Внутри объёма *V* отсутствуют потери ($\sigma = 0$).

б) Энергия электромагнитного поля в объёме *V* остается постоянной ($W = const,\ \partial W/\partial t = 0$).

В этом случае энергия сторонних источников должна расходоваться на излучение в окружающее пространство. Тогда

$$-\int\limits_V \vec{j}^{\,st}\vec{E}dV = \oint\limits_S \vec{S}\vec{n}dS = P_\Sigma. \tag{2.18}$$

Следовательно, интеграл $\oint\limits_S \vec{S}\vec{n}dS$ имеет смысл потока энергии через поверхность *S*, а вектор

$$\vec{S} = \left[\vec{E}, \vec{H}\right] \tag{2.19}$$

есть плотность потока энергии. Вектор $\vec{S}$ принято называть вектором Умова-Пойнтинга. Поверхностный интеграл в (2.8) дает значение мощности P_Σ, уходящей в пространство из объёма *V*.

Таким образом, уравнение (2.8) может быть представлено в виде

$$P^{st} = P^{pot} + \frac{\partial W}{\partial t} + P_\Sigma \tag{2.20}$$

где P^{st} – мощность стороннего источника P^{pot} – мощность потерь в среде, заполняющей область V, P_Σ – мощность излученной волны.

2.4. Физическая интерпретация теоремы Пойнтинга

Интерпретируя равенство (2.19), следует подчеркнуть, что как и любая форма материи, электромагнитное поле обладает энергией. Эта энергия может распространяться в пространстве и преобразовываться в другие формы энергии. Пусть в объёме V, ограниченном поверхностью S, заполненном однородной изотропной средой, выделяется электромагнитная энергия за счет сторонних источников. На основе общих физических соображений понятно, что мощность, выделяемая сторонними источниками, может расходоваться на потери, на изменение электромагнитной энергии в объёме V, а также излучаться, уходя в окружающую среду через поверхность S. При этом выполняется равенство (2.19), вытекающее из (2.8).

Уравнение (2.8) было получено Пойнтингом в 1885 году и носит название теоремы Пойнтинга. Иногда его называют теоремой Умова-Пойнтинга, так как закон сохранения энергии с введением понятия потока энергии в общей форме был дан Н.А.Умовым в 1874 году.

Энергия может поступать в объём V не только за счет сторонних источников. Поток энергии может быть направлен из окружающего пространства в объём V. Тогда поток энергии, проходящий через поверхность S, $P_\Sigma = \oint\limits_S \vec{S}\vec{n}dS$ будет отрицательной величиной, поскольку вектор $\vec{S}$ и орт внешней нормали $\vec{n}$ направлены в противоположные стороны.

Сторонние источники могут не только отдавать энергию, но и получать её от электромагнитного поля, как это бывает при возбуждении токов в антенне падающим полем. При этом $-\int\limits_V \vec{j}^{\,st}\vec{E}dV$ будет отрицательной величиной, поскольку теперь поле $\vec{E}$ падающей волны ускоряет движение заряженных частиц, образующих ток. При этом ток и поле $\vec{E}$ сонаправлены, благодаря чему скалярное произведение $\vec{j}^{st}\vec{E} > 0$. В данном случае токи, о которых идет речь, являются наведенными. Название «сторонние токи» сохраняется здесь чисто условно лишь потому, что текут они по идеальному металлу. Для них нельзя написать простое выражение, аналогичное $\vec{j}^{nav} = \sigma\vec{E}$. Эти токи, как правило, находят из решений сложных краевых задач.

Рассмотрим частный случай, когда энергия поступает в объём V из окружающего пространства, причем одна часть её расходуется на джоулевы потери в этом объёме, другая отбирается сторонними источниками (приёмная антенна) так, что количество электромагнитной энергии в объёме V остаётся постоянным, т.е. $\partial W/\partial t = 0$. При этом уравнение (2.19) удобно переписать в виде:

$$-\oint\limits_S \vec{S}\vec{n}dS = \int\limits_V \vec{j}^{st}\vec{E}dV + \int\limits_V \vec{j}^{nav}\vec{E}dV. \qquad (2.21)$$

Левая часть уравнения (2.15) определяет мощность, поступающую в объём V, а правая часть – мощность, расходуемую в этом объёме.

Возможна ситуация, когда в объём, заполненный диэлектриком с потерями, через одно отверстие энергия поступает, на другом отверстии наводится поле, которое затем становится вторичным источником и переизлучается через все имеющиеся отверстия. Тогда уравнение (2.18) принимает вид:

$$\int\limits_{S_1} \vec{S}\vec{n}dS = \int\limits_V \vec{j}^{nav}\vec{E}dV + \sum_{i=1}^{N}\int\limits_{S_i} \vec{S}'\vec{n}_i dS_i, \qquad (2.22)$$

где $\vec{S}'$ – вектор Умова-Пойнтинга, порожденный вторичным источником, N – общее число отверстий.

Такое уравнение может быть записано для участка волновода со щелью.

Приведенные примеры иллюстрируют многообразие вариантов записи теоремы Умова-Пойнтинга. Но во всех случаях она отражает закон сохранения энергии, а потому ее выполнение является необходимым условием правильности полученного решения любой краевой задачи.

Физический смысл второго и третьего слагаемых в уравнении (2.7) совпадает с таковым в уравнении (2.8), но форма записи изменяется. Из сравнения уравнений (2.7) и (2.8) легко получить выражения основных энергетических характеристик поля (плотности энергии, вектора Умова-Пойнтинга) в системе Гаусса.

2.5. Сопоставление основных физических величин для электромагнитного поля в системах СИ и Гаусса.

Параметры среды и поля

Назв. физической Величины	Система единиц СИ	Система единиц Гаусса
Диэлектрическая проницаемость. В среде В вакууме	Размерная величина $\varepsilon_a = \varepsilon_0 \varepsilon$, $\varepsilon_0 = (1/36\pi)10^{-9}$	Безразмерная Величина ε $\varepsilon_0 = 1$
Магнитная проницаемость. В среде В вакууме	Размерная величина $\mu_a = \mu_0 \mu$ $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$	Безразмерная Величина μ $\mu_0 = 1$
Векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ электрического и магнитного поля	Размерность векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ разная	Размерность векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ одинаковая
Характеристическое сопротивление свободного пространства W_0	$W_0 = 120\pi$ Размерность *Ом*	$W_0 = 1$ Безразмерная величина

Квадратурные характеристики поля:

Назв. физической Величины	Система единиц СИ	Система единиц Гаусса
Плотность электрической энергии	$w^{э} = \dfrac{\varepsilon_a \left\vert \vec{E} \right\vert^2}{2}$	$w^{э} = \dfrac{1}{8\pi} \varepsilon \left\vert \vec{E} \right\vert^2$
Плотность магнитной энергии	$w^{m} = \dfrac{\mu_a \left\vert \vec{H} \right\vert^2}{2}$	$w^{m} = \dfrac{1}{8\pi} \mu \left\vert \vec{H} \right\vert^2$
Плотность потока энергии $\vec{S}$ (вектор Умова-Пойнтинга)	$\vec{S} = \left[\vec{E}\vec{H}\right]$	$\vec{S} = \dfrac{c}{4\pi}\left[\vec{E}\vec{H}\right]$

Все приведенные выражения соответствуют произвольной зависимости от времени для мгновенных значений поля.

3. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ КОМПЛЕКСНЫХ АМПЛИТУД В СИСТЕМАХ СИ И ГАУССА

3.1. Уравнения Максвелла для комплексных амплитуд

В радиотехнике большую роль играют гармонические колебания, когда все величины изменяются во времени по гармоническому закону

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_m \cos(\omega t + \varphi); \tag{3.1}$$

$$\vec{H}(t) = \vec{H}_m \cos(\omega t + \varphi).$$

Все эти функции могут быть представлены в таком виде:

$$\vec{E}(t) = \operatorname{Re} \vec{E}_m e^{i\varphi} e^{i\omega t}, \qquad \vec{H}(t) = \operatorname{Re} \vec{H}_m e^{i\varphi} e^{i\omega t}. \tag{3.2}$$

Такое представление легло в основу так называемого метода комплексных амплитуд. В соответствии с этим методом вместо действительной функции, например, $\vec{E}(t)$ в виде (3.1) рассматривается комплексная функция,

$$\dot{\vec{E}}(t) = \vec{E}_m e^{i\omega t} \tag{3.3}$$

где

$$\dot{\vec{E}}_m = \vec{E}_m e^{i\varphi} \tag{3.4}$$

Такая же замена используется для поля $\vec{H}(t)$, токов и зарядов.

Действительные функции $\vec{E}(t) = \vec{E}_m \cos(\omega t + \varphi)$, $\vec{H}(t) = \vec{H}_m \cos(\omega t + \varphi)$ связаны с комплексными функциями $\dot{\vec{E}}(t) = \vec{E}_m e^{i\omega t}$, $\dot{\vec{H}}(t) = \dot{\vec{H}}_m e^{i\omega t}$ соотношениями

$$\vec{E}(t) = \operatorname{Re} \dot{\vec{E}}(t), \tag{3.5}$$

$$\vec{H}(t) = \operatorname{Re} \dot{\vec{H}}(t). \tag{3.6}$$

Уравнения Максвелла можно записать относительно комплексных векторов $\dot{\vec{E}}(t)$, $\dot{\vec{H}}(t)$ типа (3.3) В этих уравнениях множитель $e^{i\omega t}$ сокращается, и уравнения Максвелла сводятся к уравнениям относительно комплексных амплитуд $\dot{\vec{E}}_m, \dot{\vec{H}}_m$ (3.4), более простым, чем уравнения для действительных функций вида (3.1). После решения этих уравнений можно опять перейти к реальным полям, пользуясь соотношениями (3.5) и (3.6).

Все сказанное относилось к гармоническим колебаниям. В случае немонохроматических процессов аналогичные результаты получают, используя спектральные разложения, например, представление функций с помощью интегралов Фурье: $\vec{E}(t) = \mathrm{Re} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dot{\vec{E}}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$. Уравнения относительно $\dot{\vec{E}}(\omega)$ ничем не отличаются от уравнений относительно комплексных амплитуд.

3.2. Средние за период квадратурные характеристики поля, изменяющегося по гармоническому закону, в системах единиц СИ и Гаусса.

Теорема Пойнтинга была сформулирована для мгновенных значений входящих в неё величин. В случае периодических полей большой интерес представляют энергетические отношения для средних за период величин, которые для любой функции $f(t)$ определяются таким образом:

$$f_{sr} = \frac{1}{T} \int\limits_{0}^{T} f(t) dt. \tag{3.7}$$

Здесь нижний индекс “*sr*” выбран для обозначения средней величины.

Составим уравнение баланса мощности для средних за период значений мощности монохроматического поля. Заметим, что метод комплексных амплитуд применим непосредственно лишь в случае линейных уравнений.

Пусть имеются две произвольные векторные функции $\vec{a}_1, \vec{a}_2$, гармонически изменяющиеся во времени, и $\dot{\vec{a}}_1, \dot{\vec{a}}_2$ – соответствующие им комплексные функции. Пусть реальные векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ связаны с комплексными векторами $\dot{\vec{a}}_1$, $\dot{\vec{a}}_2$ соотношениями $\vec{a}_1 = \mathrm{Re}\,\dot{\vec{a}}_1$, $\vec{a}_2 = \mathrm{Re}\,\dot{\vec{a}}_2$, Легко показать, что для скалярных и векторных произведений этих векторов справедливы неравенства: $(\vec{a}_1, \vec{a}_2) \neq \mathrm{Re}(\dot{\vec{a}}_1, \dot{\vec{a}}_2)$, $[\vec{a}_1, \vec{a}_2] \neq \mathrm{Re}[\dot{\vec{a}}_1, \dot{\vec{a}}_2]$.

К комплексным функциям в нелинейном соотношении можно перейти, используя очевидное равенство:

$$\vec{a} = \frac{1}{2}(\dot{\vec{a}} + \dot{\vec{a}}^*). \qquad (3.8)$$

Рассмотрим вектор Умова-Пойнтинга $\vec{S}$ для полей, гармонически изменяющихся во времени. Представим его с помощью комплексных векторных функций, следуя алгоритму (3.8).

$$\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}] = \frac{1}{4}[\dot{\vec{E}} + \dot{\vec{E}}^*, \dot{\vec{H}} + \dot{\vec{H}}^*] = \frac{1}{4}\{[\dot{\vec{E}}, \dot{\vec{H}}] + [\dot{\vec{E}}, \dot{\vec{H}}^*] + [\dot{\vec{E}}^*, \dot{\vec{H}}] + [\dot{\vec{E}}^*, \dot{\vec{H}}^*]\}$$

.(3.9)

Рассмотрим отдельно

$$[\dot{\vec{E}}, \dot{\vec{H}}^*] + [\dot{\vec{E}}^*, \dot{\vec{H}}] = [\dot{\vec{E}}, \dot{\vec{H}}^*] + [\dot{\vec{E}}, \dot{\vec{H}}^*]^* = 2\,\mathrm{Re}[\dot{\vec{E}}, \dot{\vec{H}}^*]. \qquad (3.10)$$

Эта величина не зависит от времени, тогда как

$$[\dot{\vec{E}}, \dot{\vec{H}}] = [\dot{\vec{E}}_m, \dot{\vec{H}}_m]e^{i2\omega t}, \qquad [\dot{\vec{E}}^*, \dot{\vec{H}}^*] = [\dot{\vec{E}}_m^*, \dot{\vec{H}}_m^*]e^{-i2\omega t} \qquad (3.11)$$

изменяются во времени с удвоенной частотой.

Средние за период значения слагаемых (3.11) в выражении (3.9) для вектора Умова-Пойнтинга равны нулю. Следовательно, *среднее за период значение вектора Умова-Пойнтинга* в соответствии с (3.10) принимает вид

$$\vec{S}_{sr} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\dot{\vec{E}}, \dot{\vec{H}}^*]. \qquad (3.12)$$

Соответственно *среднее за период значение* <u>*потока*</u> *вектора Умова-Пойнтинга* через поверхность S определяется выражением

$$P_{\Sigma sr} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_S [\dot{\vec{E}}, \dot{\vec{H}}^*]\vec{n}\,dS. \qquad (3.14)$$

Здесь $\vec{n}$ – орт внешней нормали к поверхности S.

Для всех остальных величин, входящих в теорему Пойнтинга, можно провести аналогичное рассмотрение. В результате получаем следующие выражения.

Средняя мощность джоулевых потерь:

$$P_{sr}^{pot} = \frac{1}{2}\int_V \left(\dot{\vec{j}}^{\,nav}\right)^* \dot{\vec{E}}dV = \frac{1}{2}\int_V \sigma\dot{\vec{E}}^*\dot{\vec{E}}dV = \frac{1}{2}\int_V \sigma\left|\dot{\vec{E}}\right|^2 dV\,. \tag{3.15}$$

Средняя мощность, выделяемая в объеме V сторонними источниками:

$$P_{sr}^{st} = \frac{1}{2}\int_V \dot{\vec{j}}_{sr}^{\,st\,*}\dot{\vec{E}}dV\,. \tag{3.15}$$

Средние за период значения электрической W_{sr}^e и магнитной W_{sr}^m энергии.

$$W_{sr}^e = \frac{1}{4}\int_V \varepsilon_a \dot{\vec{E}}\dot{\vec{E}}^* dV\,, \qquad W_{sr}^m = \frac{1}{4}\int_V \mu_a \dot{\vec{H}}\dot{\vec{H}}^* dV\,. \tag{3.16}$$

Подстановка полученных выражений в усредненное по периоду уравнение Пойнтинга приводит к такому равенству:

$$-\frac{1}{2}\int_V \dot{\vec{j}}_{sr}^{\,st\,*}\dot{\vec{E}}dV = \frac{1}{2}\int_V \left(\dot{\vec{j}}^{\,nav}\right)^* \dot{\vec{E}}dV + \left\{\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4}\int_V \varepsilon_a \dot{\vec{E}}\dot{\vec{E}}^* dV + \frac{1}{4}\int_V \mu_a \dot{\vec{H}}\dot{\vec{H}}^* dV\right]\right\}_{sr} +$$

$$+\frac{1}{2}\operatorname{Re}\int_S \left[\dot{\vec{E}},\dot{\vec{H}}^*\right]\vec{n}dS \tag{3.17}$$

Приведенные выше выражения для средних значений мощности получены в системе СИ. Представляет интерес их запись в системе Гаусса. Переведем уравнение (3.17) в систему Гаусса, используя предложенные замены (1.31). Разделим затем все уравнение на $4\pi/c$, чтобы оставить в чистом виде интегралы $-\frac{1}{2}\int_V \dot{\vec{j}}_{sr}^{\,st\,*}\dot{\vec{E}}dV$ и $\frac{1}{2}\int_V \left(\dot{\vec{j}}^{\,nav}\right)^* \dot{\vec{E}}dV$, которые имеют одинаковый физический смысл в обеих системах единиц. В результате уравнение Пойнтинга сводится к виду

$$-\frac{1}{2}\int_V \dot{\vec{j}}_{sr}^{\,st\,*}\dot{\vec{E}}dV = \frac{1}{2}\int_V \left(\dot{\vec{j}}^{\,nav}\right)^* \dot{\vec{E}}dV + \left\{\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{16\pi}\int_V \varepsilon \dot{\vec{E}}\dot{\vec{E}}^* dV + \frac{1}{16\pi}\int_V \mu \dot{\vec{H}}\dot{\vec{H}}^* dV\right]\right\}_{sr} +$$

$$+\frac{c}{8\pi}\operatorname{Re}\int_S \left[\dot{\vec{E}},\dot{\vec{H}}^*\right]\vec{n}dS \tag{3.18}$$

Сравнивая между собой одинаковые по физическому смыслу слагаемые в правых частях уравнений (3.17) и (3.18), получаем искомые квадратурные характеристики поля в системе Гаусса:

Среднее за период значение вектора Пойнтинга в системе Гаусса

$$\vec{S}_{sr} = \frac{c}{8\pi}\operatorname{Re}\left[\dot{\vec{E}},\dot{\vec{H}}\right], \tag{3.19}$$

и, соответственно, *средний за период поток энергии* через поверхность S

$$\vec{S}_{sr} = \frac{c}{8\pi}\operatorname{Re}\int\limits_{S}\left[\dot{\vec{E}},\dot{\vec{H}}^{*}\right]\vec{n}\,dS\,. \tag{3.20}$$

Средние за период значения электрической и магнитной энергии в объеме V.

$$W_{sr}^{e} = \frac{1}{16\pi}\int\limits_{V}\varepsilon\left|\dot{\vec{E}}\right|^{2}dV \tag{3.21}$$

$$W_{sr}^{m} = \frac{1}{16\pi}\int\limits_{V}\mu\left|\dot{\vec{H}}\right|^{2}dV \tag{3.22}$$

3.3 Уравнение баланса для средней за период мощности.

Полезно показать, что среднее за период изменение электромагнитной энергии равно нулю:

$$\frac{\partial W_{sr}}{\partial t} = \frac{1}{T}\int\limits_{0}^{T}\frac{\partial W}{\partial t}dt = \frac{1}{T}\left(W\big|_{t=T} - W\big|_{t=0}\right) = 0 \tag{3.23}$$

Видим, что в случае гармонических колебаний усреднение по периоду уравнения Пойнтинга (3.18) приводит к такой формулировке теоремы:

$$P_{sr}^{st} = P_{sr}^{pot} + P_{\Sigma sr} \tag{3.24}$$

Энергия, затрачиваемая сторонними источниками в объеме V, расходуется на излучение из объема и на преобразование в другие формы энергии за счет потерь.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решение любой электродинамической задачи, полученное в системе СИ, можно преобразовать к форме записи в системе Гаусса путем ряда замен, предложенных в разделе 1, формулы (1.31):

$$\varepsilon_0 \Rightarrow 1/c, \quad \mu_0 \Rightarrow 1/c, \quad W_0 \Rightarrow 1, \qquad \vec{j} \Rightarrow \frac{4\pi}{c}\vec{j}, \quad \rho \Rightarrow \frac{4\pi}{c}\rho..$$

Чтобы получить выражения для энергетических характеристик поля в системе Гаусса, если известна их запись в системе СИ, рекомендуется следующее.

1. Помнить или уметь выводить теорему Пойнтинга в системе СИ и знать физический смысл каждого слагаемого в формулировке этой теоремы.
2. Иметь в виду, что выражение для мощности электрического тока в объеме V инвариантно относительно выбора системы единиц.
3. Для перевода соотношения Пойнтинга, записанного в системе СИ, в систему Гаусса, необходимо произвести в исходном равенстве все замены, предложенные в разделе 1, а затем разделить преобразованное уравнение на $(4\pi/c)$. Это обеспечит присутствие в уравнении слагаемого, имеющего смысл мощности тока. Тогда все остальные слагаемые тоже приобретают смысл мощности (уже в системе Гаусса), и из них легко выделить выражения для плотности энергии в объеме V и плотностии потока энергии через поверхность S (вектора Умова-Пойнтинга).

В заключение автор выражает благодарность доц. А.Н.Думину и ст. науч. сотр. Т.Г.Назаренко за помощь в работе и ценные обсуждения рукописи.

РЕКОМЕНДОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА (ОСНОВНАЯ)
к лекционному курсу “Теория волновых процессов”

1. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. – М.: Радио и связь, 1988.– 440 с.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика, т.8. Электродинамика сплошных сред. – М: Наука, 1982.– 620 с.
3. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. – М.: Наука, 1990.– 432 с.
4. Хижняк Н.А. Интегральные уравнения макроскопической электродинамики. – Киев: Наукова думка, 1986.– 280 с.
5. Вольман В.И., Пименов Ю.В. Техническая электродинамика.– М.: Связь, 1971.– 487с.
6. Никольский В.В., НикольскаяТ.И. Электродинамика и распространение радиоволн.– М.: Наука, 1989.– 543 с.
7. Фельд Я.Н., Бененсон Л.С. Антенно-фидерные устройства, ч.2,.– М.: Изд-во ВВИА им. Н.Е.Жуковского, 1959.– 551с.
8. Шубарин Ю.В. Антенны сверхвысоких частот.– Харьков, Изд-во ХГУ им. А.М.Горького, 1960.– 284 с.
9. Черный Ф.Б. Распространение радиоволн.– М.: Сов. радио, 1972.– 462 с.
10. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах.– М.: Изд-во АН СССР, 1957.– 502 с. Второе издание – М.: Наука, 1973.– 343 с.
11. Фок В.А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн.– М.: Сов. радио, 1970.– 517 с.
12. Борн М., Вольф Э. Основы оптики.– М.: Наука, 1973.– 720 с.

РЕКОМЕНДОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА
о Международной системе единиц СИ
(ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ)

1. Чертов А.Г. Международная система единиц измерения.– Росвузиздат, 1963.– 167 с.
2. Лабутин А.А. Краткие сведения о международной системе единиц измерений (СИ).– К., Вища школа, 1975.– 88 с.
3. Новосильцев В.Н.. К истории основных единиц СИ.– Ростов н/Д.: Изд-во Рост.у-та, 1975.– 71 с.
4. Бурдун Г.Д. Справочник по Международной системе единиц.– М.: Изд-во стандартов, 1980.– 232 с.
5. Сена Л.А. Единицы физических величин и их размерности.– М.: Наука 1988.– 430 с.