МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени В. Н. КАРАЗИНА

Конспект лекций по физике, раздел «Механика», для студентов геолого-географического факультета

Кафедра общей физики
физического факультета
доц. Палехин Вячеслав Петрович

Харьков 2004 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Сегодня мы приступаем к изучению физики, главная задача которой, изучение основных состояний материи и основных форм её движения.

Материя есть объективная реальность, данная нам в ощущениях и существующая вне и независимо от нашего сознания. Таково философское определение материи с позиций диалектического материализма.

В настоящее время известны две формы материи: вещество и поле. Поле – это такая форма материи, посредством которой осуществляются любые взаимодействия между любыми телами природы, т.е. поле является переносчиком взаимодействий. Взаимодействие происходит по схеме: частица → поле → частица. В некоторых условиях поле может «оторваться» от своего источника и свободно распространяться в пространстве (например, электромагнитные волны).

Вещество – это вид материи, обладающий массой покоя – электроны, протоны, нейтроны и другие частицы, представляющие собой структурные элементы атомов и молекул. Иначе говоря – к веществу относятся атомы и молекулы и построенные из них тела (большие скопления атомов или молекул).

Различные виды материи могут превращаться друг в друга. Например, электрон и позитрон, представляющие собой вещество, могут превращаться в гамма-фотоны, т.е. в электромагнитное поле.

Вещество может находиться в таких состояниях: твёрдое, жидкое, газообразное и плазменное. Основным критерием принадлежности вещества к одному из указанных состояний является соотношение между средними значениями кинетической энергии и потенциальной энергии взаимодействия частиц данного вещества. Свойства указанных состояний веществ мы будем изучать на протяжении этого курса.

Поле, как мы уже говорили, является переносчиком взаимодействий. Сегодня можно говорить о четырёх основных типах взаимодействий: гравитационном (тяготение); электромагнитном; сильном (ядерное) и слабом взаимодействии. Эти взаимодействия лежат в основе всех известных сил в природе.

Явления и процессы, происходящие с взаимодействующими телами, протекают в пространстве и времени. Пространство и время являются той своеобразной «ареной», на которой разыгрываются события.

В классической механике (она изучает движение тел со скоростями, намного меньшими скорости распространения света в вакууме $C = 3 \cdot 10^8\ {}^{м}/_{с}$) пространству и времени приписывается абсолютный характер. Так, например, считается, что пространство – это абсолютная пустота, обладающая тремя измерениями. Время рассматривается обособленно – как характеристика длительности.

В теории относительности, пространство и время взаимосвязаны и связь эта устанавливается непрерывным движением материи в пространстве и во времени. Теория относительности отрицает изолированность и абсолютность этих понятий. Теория относительности устанавливает, что пространственно-временные характеристики события, происходящего в той или иной системе, зависят от скорости движения данной системы относительно наблюдателя, а также от концентрации масс, в поле которых система движется.

Пространство и время обладают определёнными свойствами, и это несомненно влияет на ход физических явлений. Важнейшим из этих свойств является так называемая однородность. Однородность пространства означает, что любая его точка физически равноценна, т.е. перенос любого объекта в пространстве никак не влияет на процессы, происходящие с этим объектом. Например, мы совершенно уверены, что свойство атомов не Земле и на Луне одни и те же.

Под однородностью времени будем понимать как физическую неразличимость всех моментов времени для свободных объектов. Иначе говоря, если объекты не взаимодействуют с окружением, то для них любой момент времени может быть принят за начальный. Это значит, что изученные сегодня закономерности в поведении атомов были теми же самыми и раньше.

Если бы эти кажущиеся столь очевидными свойства однородности пространства и времени отсутствовали, то было бы почти бессмысленными заниматься наукой. В самом деле, представим себе, к чему бы вело отсутствие однородности пространства – законы физики в Харькове были бы одни, в Полтаве другие, а в Киеве третьи. Отсутствие однородности времени вело бы к тому, что наука не могла бы прогрессировать в познании. Открытый позавчера, скажем, закон плавания тел сегодня был бы уже несправедлив и нужно было бы вновь вести исследования.

Неотъемлемым всеобщим свойством материи является движение. Под движением материи понимают любые её изменения в пространстве и во времени. Но предметом изучения физики является изучение простых форм движения материи таких как: механическое, тепловое, волновое и т.д. Эти формы движения материи составляют основу сколь угодно сложных видов движения. поэтому законы физики являются универсальными законами природы для всего естествознания и техники, в том числе и для вашей будущей работы. Поэтому моя задача заключается в том, чтобы ввести Вас в курс основных идей физики, которые будут полезны для Вас.

Физика «выросла» из потребностей практики и её рост часто стимулировался практическими требованиями. Теория тепла (термодинамика) появилась после создания тепловых машин и повышения их коэффициента полезного действия; успехи спектроскопии связаны с практически важным спектральным анализом и т.д.

Иногда бывало и наоборот. Например, сначала было открыто явление электромагнитной индукции, а уже потом это явление легло в основу всей электротехники и передачи электрической энергии от производителя к потребителю. К сожалению, всем открытиям в физике сначала ищут применение в военных целях, а уже потом для блага человека. Например, расщепление атома привело к созданию атомного оружия, а после к построению атомных электростанций.

Для установления количественной связи между физическими величинами нужно уметь измерять их и соответственно установить единицы для них.

Международной конвенцией принята в настоящее время система единиц (СИ), в которой основными единицами являются: единица длины – метр (м), единица времени – секунда (сек), единица массы – килограмм (кг), единица силы тока – ампер (А), единица температуры – кельвин (К), единица количества вещества – моль (моль), единица силы света – кандела (кд). Остальные единицы называются производными и выражаются через основные единицы, например сила $F = ma =$ кг · м · с$^{-2}$ (ньютон).

Физика имеет дело с физическими величинами разных классов, порою очень сложных. В этом курсе мы будем встречаться в основном с двумя видами физических величин: скалярными и векторными. Скалярная величина полностью количественно определена, если заданно её численное значение. Например, скалярными величинами являются: температура, энергия, масса, плотность, время, давление. Векторные величины, кроме численного значения ещё характеризуются направлением. Примерами векторных величин являются: сила, скорость, ускорение, напряжённости электрического и магнитного полей. Направление векторной величины изображают стрелкой, длина которой при выбранном масштабе даст численное значение вектора.

Геометрической суммой $\vec{C}$ двух векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$ мы называем диагональ параллелограмма, построенного на векторах $\vec{A}$ и $\vec{B}$. Можно дать ещё и такое правило сложения векторов: сумма $\vec{A} + \vec{B}$ изображается вектором $\vec{C}$, направленным из начала вектора $\vec{A}$ к концу вектора $\vec{B}$. Иначе говоря, сложение двух векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$ геометрически изображается треугольником.

Для нахождения суммы нескольких векторов из конца первого вектора строят вектор второй, из конца второго – третий вектор и т.д. Результирующий вектор $\vec{C}$ будет направлен из начала первого вектора к концу последнего вектора и замыкает ломаную линию, состоящую из слагаемых векторов, т.е. векторное равенство в данном случае геометрически изображается многоугольником.

Чтобы вычесть из вектора $\vec{A}$ вектор $\vec{B}$, нужно к вектору $\vec{A}$ прибавить вектор (-$\vec{B}$), т.е. вектор, равный по длине и противоположный по направлению вектору $\vec{B}$.

При умножении вектора на вектор различают два произведения векторов – скалярное и векторное.

Скалярным произведением векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$ называют скалярную величину AB cos φ, т.е :

$$\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right) = A\cdot B\cos\varphi,$$

где A и B – модули векторов, φ – угол между направлениями этих векторов.

Векторным произведением векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$ называют вектор $\vec{C}$, численное значение которого равно

$$AB\ \mathrm{Sin}\ \varphi,\ \text{т.е.}\ \vec{C} = \left[\vec{A}\vec{B}\right]\ \text{и}\ C = ABSin\varphi.$$

Вектор $\vec{C}$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат вектор $\vec{A}$ и $\vec{B}$ и его направление определяется по правилу правого винта: если головку винта кратчайшим путём повернуть от $\vec{A}$ к $\vec{B}$, то направление поступательного движения винта укажет направление вектора $\vec{C}$. В векторном произведении нельзя менять местами вектора (изменится направление вектора $\vec{C}$) и обозначают обычно квадратными скобками. Если векторы $\vec{A}$ и $\vec{B}$ параллельны или антипараллельны, то их векторное произведение, очевидно, равно нулю, так $Sin0^0 = Sin180^0 = 0$. Если векторы $\vec{A}$ и $\vec{B}$ взаимно перпендикулярны, модуль их векторного произведения равен произведению их модулей, так как Sin $90^0 = 1$.

Раздел I. Механика

В механике изучаются закономерности наиболее простых форм движения тел и причин вызывающих эти движения. Механику принято подразделять на три раздела: кинематику, динамику и статику.

Кинематика изучает перемещение тел без учёта тех причин (сил), которые вызывают движение, т.е. исследует пространственно-временное перемещение тел. Она оперирует такими величинами, как пройденный путь, траектория, скорость $\vec{v}$ и ускорение $\vec{a}$.

Динамика исследует причины, вызывающие движение тел, т.е. изучает движение тел под действием приложенных к ним сил и связь их с перемещениями тел. Здесь к кинематическим величинам добавляются величины – силы $\vec{F}$, масса тела m, импульс, момент импульса.

В статике исследуются условия равновесия системы тел, на которую воздействуют силы и моменты сил. Статика изучается в специальных курсах механики.

§1 Кинематика поступательного движения материальной точки

Простейшей формой движения материи – есть механическое движение. Им называется изменение со временем расположения тел в пространстве относительно друг друга.

Механическое движение удобно изучать на примере идеализированного объекта – материальной точки – это тело, размерами и формой которого в условиях данной задачи можно пренебречь. Материальную точку мы иногда будем называть частицей или просто точкой. Так, можно пренебречь формой и размерами Земли, рассматривая её движение вокруг Солнца.

Знать движение материальной точки – это значит знать её положение в пространстве в данный момент времени. Движется ли данное тело или находится в состоянии покоя, определяется только телом отсчёта – тело по отношению, к которому рассматривается данное движение. Абсолютного покоя в природе не существует. Можно утверждать, что механическое движение всегда относительно.

Кроме тела отсчёта для изучения движения материальной точки в пространстве необходимо с телом отсчёта жёстко связать систему координат, например, декартову систему x, y, z. Можно выбрать из соображения удобств и другие координаты, например, сферические $-r, \theta, \varphi$. Для временного описания движения с телом отсчёта надо связать также часы. В нашей системе координат они неподвижны и показывают собственное время данной системы координат. Поэтому трёхмерная система координат и часы (см. рис. 1.1), связанные с телом отсчёта образуют систему отсчёта.

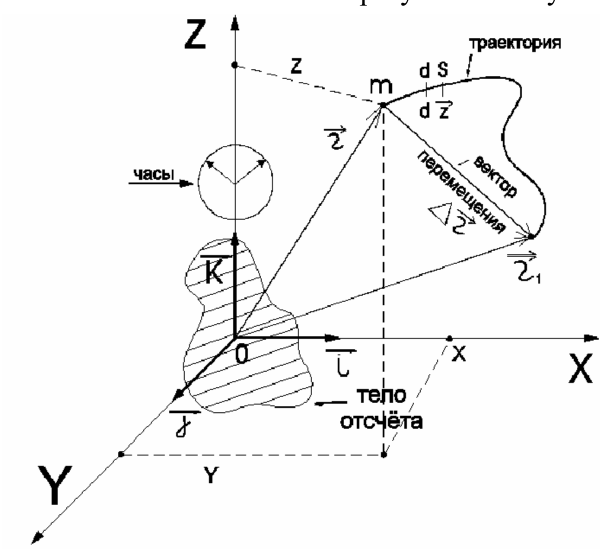

Рис. 1.1

Другими словами под системой отсчёта мы будем понимать совокупность системы координат, жёстко связанной с телом отсчёта и часов для отсчёта времени, т.к. любое механическое движение происходит в пространстве и во времени.

Понятие системы отсчёта в физике является фундаментальным. Так как с каждым телом можно связать систему отсчёта, то систем отсчёта для описания движения данного тела может быть бесчисленное множество. Эти системы движутся относительно друг друга, поэтому описание движения в них будет иметь различный характер и законы движения, следовательно, будут различными.

Пусть в некоторой точке пространства находится материальная точка m (см. рис. 1.1). Для того, чтобы задать её положение в пространстве, выберем удобным образом систему отсчёта и проведём радиус-вектор $\vec{r}$ из начала координат в данную точку. Таким образом, положение материальной точки в пространстве определяется либо заданием одного вектора $\vec{r}$, либо тремя скалярными величинами – координатами (x, y, z), которые являются координатами конца радиус-вектора $\vec{r}$ (см. рис. 1.1).

Радиус-вектор $\vec{r}$ выражается через координаты (x, y, z) следующим образом:

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + Z \cdot \vec{K}, \tag{1.1}$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{K}$ - единичные векторы – это векторы, у которых абсолютное значение равно единице, а направления соответствуют направлениям осей выбранной системы координат (рис. 1.1).

При движении материальной точки m её положение в пространстве изменяется. Соответственно этому радиус-вектор $\vec{r}$ будет функцией времени, т.е.

$$\vec{r} = \vec{r}\ (t). \tag{1.2}$$

Соотношение (1.2) есть закон движения материальной точки в векторной форме. Иногда его называют кинематическим законом движения.

Векторная запись закона (1.2) равносильна заданию трёх скалярных функций:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t). \qquad (1.3)$$

Таким образом, можно записать кинематический закон (1.2) в скалярном виде (1.3).

Кривая, которую описывает движущаяся точка в выбранной системе отсчёта, называется траекторией движения (рис. 1.1). Тогда можно сказать, что конец радиус-вектора $\vec{r}$ как бы, «следит» за движущейся точкой, скользит по её траектории. В зависимости от формы траектории движения бывают прямолинейными и криволинейными.

Участок траектории, пройденный точкой за время t, называют длинной пути S. Путь есть скалярная величина, причём всегда положительная.

Положение материальной точки в двух точках пространства зададим радиус-векторами $\vec{r}$ и $\vec{r}_1$ (рис. 1.1). Пусть такое перемещение точки m в пространстве произошло за время Δt. Тогда вектором перемещения назовём - направленный отрезок $\Delta\vec{r}$, характеризующий изменение положения материальной точки в пространстве за это время, т.е.

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}. \qquad (1.4)$$

Вектор перемещения $\Delta\vec{r}$ направлен от радиус-вектора $\vec{r}$ к радиусу $\vec{r}_1$ (рис. 1.1). В случае прямолинейного движения вектор перемещения $\Delta\vec{r}$ совпадает с соответствующим участком траектории.

Механические движения могут отличаться быстротой изменения координат со временем. В связи с этим вводят понятие скорости $\vec{v}$. Рассмотрим движение точки по произвольной траектории (рис. 1.1).

Пусть в момент времени t её положение характеризуется радиус-вектором $\vec{r}$. Через некоторое время Δt точка m занимает новое положение в пространстве, характеризуемое радиус-вектором $\vec{r}_1$, а радиус-вектор $\vec{r}$ получил приращение $\Delta\vec{r}$ (рис.1.1).

Тогда разделив вектор перемещения $\Delta\vec{r}$ на время Δt, получим среднюю скорость этого движения:

$$\vec{v}_{cp} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \qquad (1.5)$$

Более содержательным является понятие мгновенной скорости, т.е. скорости в данный момент времени и в данной точке траектории. Ей назовём предел, к которому стремится отношение (1.5) при $\Delta t \to 0$, т.е.:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}. \qquad (1.6)$$

Таким образом, скорость поступательного движения материальной точки равна первой производной от радиус-вектора по времени. Здесь учли, что в математике предел, выражаемый формулой (1.6), называется производной. Направлен вектор скорости $\vec{v}$ по касательной к траектории в данной точке.

При движении материальной точки её скорость может быть как постоянной, так и переменной. Движение с постоянной скоростью является равномерным.

Модуль вектора скорости $|\vec{v}|$ равен

$$\left|\vec{v}\right| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\,, \tag{1.7}$$

где v_x, v_y, v_z - проекции вектора скорости на соответствующие оси. Они равны:

$$v_x = \frac{dx}{dt}\,,\ v_y = \frac{dy}{dt} \text{ и } v_z = \frac{dz}{dt}\,, \tag{1.8}$$

т.е. первым производным от координат по времени.

Модуль малого (элементарного) приращения $d\vec{r}$ радиус-вектора $\vec{r}$ равен длине dS соответствующей ему дуги траектории (рис. 1.1), т.е.

$$\left|d\vec{r}\right| = dS\,.$$

Из сказанного следует, что численное значение скорости точки m будет равно первой производной от длины её пути по времени

$$v = \frac{dS}{dt}\,. \tag{1.9}$$

В классической механике в каждой точке траектории материальная точка (частица) имеет определённые значения координат и составляющих скорости. В квантовой механике частица не имеет одновременно точных значений координат и составляющих скорости.

Скорость материальной точки в процессе движения может изменяться как по величине , так и по направлению. Поэтому сначала введём величину, характеризующую быстроту изменения скорости со временем, т.е. ускорение $\vec{a}$.

Пусть точка движется прямолинейно, и в момент времени t_1 скорость её была $\vec{v}_1$, а к моменту времени t_2 она стала равной $\vec{v}_2$. Приращение скорости $\Delta\vec{v}$ за время Δt составит

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1\,.$$

Отношение приращения скорости $\Delta\vec{v}$ к промежутку времени Δt , в течение которого произошло, выражает среднее ускорение

$$\vec{a}_{ср} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\,. \tag{1.10}$$

Используя рассуждения, аналогичные изложенным раннее при определении мгновенной скорости (1.6), получим, что мгновенное ускорение

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}\,. \tag{1.11}$$

Значит, что ускорение точки в данный момент времени есть первая производная от скорости по времени или с учётом (1.6)

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}\,, \tag{1.12}$$

т.е. ускорение $\vec{a}$ есть вторая производная от радиус-вектора по времени.

Ускорение, как и скорость, является векторной величиной, т.е. помимо числового значения (модуля), имеет направление, определяемое не вектором скорости $\vec{v}$, а направлением вектора изменения скорости $d\vec{v}$. Это значит, что только при прямолинейном движении векторы $\vec{a}$ и $\vec{v}$ сонаправлены в случае ускоренного движения и противонаправлены при замедленном движении. При любом криволинейном движении вектор ускорения $\vec{a}$ всегда направлен в сторону вогнутости траектории.

Модуль вектора ускорения равен

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x^{\ 2} + a_y^{\ 2} + a_z^{\ 2}}, \qquad (1.13)$$

где $a_x^{\ 2}$, $a_y^{\ 2}$ и $a_z^{\ 2}$ проекции вектора ускорения на соответствующие оси. Они равны:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2X}{dt^2};\ a_x = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2};\ a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2Z}{dt^2}, \qquad (1.14)$$

т.е. первым производным от скорости по времени или вторым производным от соответствующих координат по времени.

При криволинейном движении скорость может изменяться и по величине (модулю) и по направлению.

Пусть материальная точка движется по криволинейной траектории (рис. 1.2) и в момент времени t_1 имеет скорость $\vec{v}_1$, а к моменту времени t_2 её скорость $\vec{v}_2$. Перенесём вектор $\vec{v}_1$ параллельно самому себе, совмещая его начало с точкой 1 на траектории.

Как известно, разность двух векторов равна вектору, соединяющему их концы. В данном случае разность $\Delta\vec{v}$ будет равна стороне BC треугольника ABC, построенного на векторах скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ как на векторах. Разложим вектор $\Delta\vec{v}$, который характеризует изменение скорости, как по величине, так и по направлению, на две составляющие.

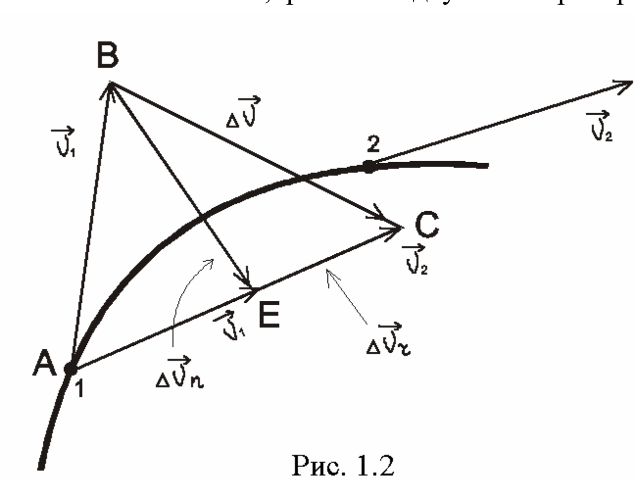

Рис. 1.2

Для этого отложим от точки A в направлении AC отрезок $AE = \left|\vec{v}_1\right|$. Соединим точки B и E и обозначим: $\vec{BE} = \Delta\vec{v}_n$; а $\vec{EC} = \Delta\vec{v}_\tau$. Здесь вектор $\Delta\vec{v}_n$ характеризует изменение скорости по направлению и называется нормальной составляющей вектора изменения скорости, а вектор $\Delta\vec{v}_\tau$ характеризует изменение скорости по величине за время Δt и называется тангенциальной составляющей вектора изменения скорости.

Таким образом, вектор изменения скорости $\Delta\vec{v}$ равен сумме двух векторов:

$$\Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}_n + \Delta\vec{v}_\tau, \tag{1.15}$$

а среднее ускорение за время Δt получим так:

$$\vec{a}_{ср} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{v}_n}{\Delta t} + \frac{\Delta\vec{v}_\tau}{\Delta t}.$$

Перейдя к пределу при $\Delta t \to 0$, определим мгновенное значение полного ускорения

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta\vec{v}_n}{\Delta t} + \frac{\Delta\vec{v}_\tau}{\Delta t}\right) = \frac{d\vec{v}_n}{dt} + \frac{d\vec{v}_\tau}{dt} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau. \tag{1.16}$$

Из (1.16) следует, что полное ускорение $\vec{a}$ имеет две взаимно перпендикулярные составляющие: $\vec{a}_n$ - нормальное (центростремительное) ускорение точки, вектор которого направлен перпендикулярно к вектору скорости $\vec{v}$ и характеризует быстроту изменения скорости только по направлению; $\vec{a}_\tau$ - тангенциальное ускорение точки, вектор которого направлен по касательной к траектории в данной точке (по одной прямой с вектором скорости $\vec{v}$) и, следовательно, характеризует быстроту изменения скорости по величине (модулю), т.е.

$$a_\tau = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}.$$

Расчёты, которые мы здесь опускаем, показывают, что модуль вектора нормального ускорения определяется формулой

$$a_n = \frac{v^2}{r}, \text{ а его вектор } \vec{a}_n = \frac{v^2}{r}\vec{n}, \tag{1.17}$$

где r – радиус кривизны траектории, $\vec{n}$ - нормаль к траектории.

Так как полное ускорение определяется векторной суммой нормального и тангенциального ускорений, а вектора этих ускорений взаимно перпендикулярны, следовательно, модуль полного ускорения равен:

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_n^2 + a_r^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{r}\right)^2}. \tag{1.18}$$

Рассмотрим частные случаи:

При равномерном прямолинейном движении $\vec{a} = 0$, $\vec{a}_n = 0$ и $\vec{a}_\tau = 0$, т.е. нормальное и тангенциальное ускорения отсутствуют.

При прямолинейном, но неравномерном движении $\vec{a}_n = 0$, $\vec{a}_\tau = \vec{a} \neq 0$, т.е. нормальное ускорение отсутствует.

При криволинейном равномерном движении обязательно $\vec{a}_n \neq 0$ и $\vec{a}_\tau = 0$, а в случае неравномерного криволинейного движения $\vec{a}_n \neq 0$ и $\vec{a}_\tau \neq 0$.

§2 Кинематические характеристики вращательного движения

Вращением абсолютно твёрдого тела (тело расстояния, между частицами которого не изменяются в процессе вращения) назовём вращение, при котором каждая точка тела движется в плоскости, перпендикулярной неподвижной прямой, называемой осью вращения (рис. 2.1).

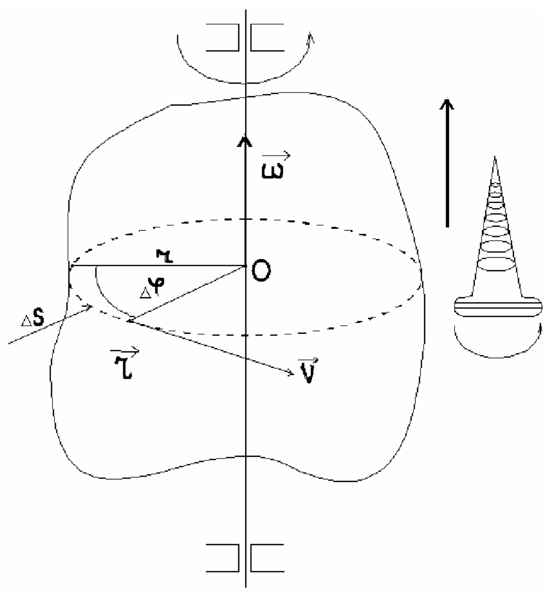

Рис. 2.1

При вращении такого тела вокруг неподвижной оси линейные скорости $\vec{v}$ и ускорения $\vec{a}$ для разных его точек будут различны. Поэтому вращательное движение принято характеризовать угловыми величинами, одинаковыми в данный момент времени для всех точек вращающегося тела.

Если за время Δt тело поворачивается на угол $\Delta\varphi$, то быстрота его вращения в данный момент характеризуется значением мгновенной угловой скорости или же просто угловой скоростью

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}. \quad (2.1)$$

Итак, значение угловой скорости тела равно первой производной от угла его поворота по времени.

Угловая скорость $\vec{\omega}$ представляет собой осевой вектор $\vec{\omega}$, всегда направленный вдоль оси вращения. Его направление определяется правилом правого винта (вращение по часовой стрелке): если направление вращения головки винта совпадает с направлением вращение тела, то поступательное движение винта указывает направление вектора $\vec{\omega}$ (рис. 2.1). Иначе говоря, вектор $\vec{\omega}$ направлен вдоль оси вращения так, что глядя вдоль оси вращения, мы видим вращение тела совершающимся по часовой стрелке.

Модуль угловой скорости выражается в радианах в секунду (рад/с). Радиан – это угол, дуга которого равна радиусу. Если вращение тела происходит с постоянной угловой скоростью, то это равномерное вращение. Найдём связь угловой скорости ω с периодом вращения Т и частотой вращения ν. Периодом вращения назовём время, в течение которого тело поворачивается вокруг оси вращения на угол $\varphi = 2\pi$. Так как за время $\Delta t = T$ тело совершает полный оборот и $\varphi = 2\pi$, то из соотношения

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \quad (2.2)$$

следует

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (2.3)$$

Очевидно, что частота вращения ν и период вращения Т связаны соотношением:

$$\nu = \frac{1}{T}. \qquad (2.4)$$

Тогда из соотношений (2.3) и (2.4) получим, что

$$\omega = 2\pi\nu. \qquad (2.5)$$

При неравномерном вращении тела изменение угловой скорости характеризуется угловым ускорением. Если за промежуток времени Δt угловая скорость изменится на величину $\Delta\omega$, то при $\Delta t \to 0$ отношение $\Delta\omega/\Delta t$ стремится к пределу, называемому мгновенным угловым ускорением тела или же просто угловым ускорением, т.е.

$$\vec{\beta} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \qquad (2.5)$$

Итак, значение углового ускорения тела равно первой производной от его угловой скорости по времени или же второй производной от угла поворота по времени.

Угловое ускорение также представляет собой осевой вектор. Направления векторов $\vec{\beta}$ и $\vec{\omega}$ совпадают при ускоренном вращении и противоположны при замедленном. Угловое ускорение β выражается в радианах на секунду в квадрате (рад/с^2).

Найдём связь между линейной и угловой скоростью. Путь, пройденный какой-либо точкой вращающегося тела за промежуток времени Δt, можно измерить длинной дуги окружности ΔS (рис. 2.1). Выражая угол поворота этой точки $\Delta\varphi$ в радианах, и обозначая через r радиус окружности, описываемой ею вокруг оси вращения, получим:

$$\Delta S = r\Delta\varphi.$$

Разделив обе части этого равенства на Δt, в пределе при $\Delta t \to 0$ имеем:

$$\frac{dS}{dt} = r\frac{d\varphi}{dt} \text{ или } \nu = r\omega, \qquad (2.7)$$

т.е. чем дальше отстоит точка от оси вращения, тем с большей линейной скоростью ν она движется.

Если равенство (2.7) продифференцировать вторично по времени, то получим соотношение между тангенциальным и угловым ускорениями:

$$\frac{d^2S}{dt^2} = r\frac{d^2\varphi}{dt^2} \text{ или } a_\tau = r\cdot\beta. \qquad (2.8)$$

Так как нормальное ускорение

$$a_n = \frac{\nu^2}{r},$$

то подставляя значение скорости из (2.7), имеем

$$a_n = r\omega^2. \qquad (2.9)$$

Отметим, что нормальное и тангенциальное ускорение также возрастают пропорционально расстоянию от оси вращения и формулы кинематики вращательного движения могут быть написаны по соответствующим формулам кинематики поступательного движения материальной точки, если заменить в них путь S углом поворота φ, скорость ν - угловой скоростью ω и тангенциальное ускорение a_τ - угловым ускорением β.

Соотношения (2.7) и (2.8) могут быть записаны в векторной форме

$$\vec{\nu} = \left[\vec{\omega}\vec{r}\right] \text{ и } \vec{a}_\tau = \left[\vec{\beta}\vec{r}\right], \qquad (2.10)$$

где $\vec{r}$ - радиус-вектор, проведённый от центра вращения О к вращающейся точке (рис. 2.1).

§3 Динамика поступательного движения материальной точки. Законы Ньютона. Центр масс системы материальных точек

Первый закон Ньютона

До сих пор мы изучали движение тела на основе понятий скорости и ускорения. Теперь займёмся следующими вопросами: почему тела движутся именно таким образом, а не иначе? Что заставляет покоящееся тело начать движение? Что является причиной ускорения или торможения тела?

На протяжении многих веков считалось неоспоримой истиной мнение Аристотеля, сделанное на основе наблюдений, что движущееся тело остановится, если другое тело, его толкающее, прекращает своё действие. Это действие одного тела на другое называют силой. Иначе говоря, сила – это мера взаимодействия между телами. Понятие силы относится к двум телам. Если на тело действует сила, то всегда можно указать тело, со стороны которого она действует.

Сила, как характеристика воздействия, зависит:

1. от свойств взаимодействующих тел;
2. от расстояния между взаимодействующими телами;
3. от относительной скорости взаимодействующих тел.

Сила является векторной величиной и подчиняется правилу сложения векторов, рассмотренных нами во введении.

Галилей первым понял, что, для того, чтобы тело сохраняло состояние своего покоя или равномерного прямолинейного движения, не нужно никаких действий со стороны других тел. Теперь и мы понимаем, что когда толкаем тележку – действуем на неё с некоторой силой, то эта сила уравновешивает воздействие на неё других тел, в частности силу трения возникающую между тележкой и дорогой, по которой она движется, и силу сопротивления воздуха – среды, в которой она перемещается. Из закона Галилея следует, что ускорение тела определяется воздействием на него других тел, а если этих воздействий нет, то оно движется с постоянной скоростью, в частности может и покоится. Поэтому, уменьшая трение и сопротивление воздуха (воздействие на тележку), можно создать такие условия, при которых её движение будет происходить почти по закону Галилея.

Все реальные тела в природе в той или иной степени испытывают воздействие со стороны других тел, поэтому можно только мысленно представить такой предельный случай, когда на движущееся тело не оказывают действие никакие другие тела. Обычно нам приходится наблюдать состояние покоя или равномерного прямолинейного движения тел, но во всех таких случаях мы имеем дело с телами, воздействия на которые со стороны других уравновешивают друг друга.

Основу классической механики составляют три закона, сформулированные Ньютоном в результате обобщения многочисленных опытных данных и опубликованных в 1687 году.

Первый закон Ньютона в современной формулировке выглядит так: всякое тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, пока воздействие со стороны других тел не заставит его изменить это состояние. Это значит, что если нет приложенной силы к покоящемуся телу, то тело остаётся в покое; а если тело движется, то оно сохраняет скорость постоянной. Оба названных состояния (покоя и равномерного прямолинейного движения) отличаются тем, что ускорения $\vec{a}=0$. В этом законе дана оценка действия на тело других тел. Только воздействие со стороны других тел, могут изменить состояния покоя или равномерного прямолинейного движения данного тела.

Стремление тела сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного движения называют инертностью. В силу этого первый закон Ньютона иногда называют законом инерции. Этот закон выполняется не во всякой системе отсчёта. Это обусловлено тем, что состояние покоя тела или же равномерного прямолинейного его движения относительно и зависит от системы отсчёта, по отношению к которой рассматривается движение тела. Пусть, например, имеются две системы отсчёта, движущиеся друг относительно друга с некоторым ускорением. Тогда тело, находящееся в покое относительно одной из них, будет, очевидно, относительно другой двигаться ускоренно. Следовательно, первый закон Ньютона не будет одновременно выполняться в этих двух системах отсчёта.

Системы отсчёта, в которых выполняется этот закон, называются инерциальными. Любая система отсчёта, движущаяся с постоянной скоростью относительно какой-либо инерциальной системы отсчёта, будет тоже инерциальной. Это следует из того, что скорость тела по отношению к любой такой системе отсчёта остаётся постоянной, но скорость в каждой из этих систем различна.

Понятие «инерциальная система отсчёта» строго говоря, является абстракцией, так как в природе нет абсолютно изолированных тел. Поэтому любое тело отсчёта всегда испытывает влияние внешних воздействий. Та или иная система отсчёта может рассматриваться как инерциальная лишь приближённо, в зависимости от условий и характера исследуемых явлений. С высокой степенью приближения инерциальной системой отсчёта является гелиоцентрическая система с началом координат в центре Солнца и осями, направленными к удалённым звёздам. Это обусловлено тем, что влиянием внешних воздействий на солнечную систему можно пренебречь, так как заметные изменения в движении солнечной системы происходят за промежутки времени, намного порядков превышающие длительность рассматриваемых в физике процессов.

Система отсчёта, связанная с Земной поверхностью, не является инерциальной, так как Земля вращается вокруг своей оси, кроме того, движется относительно Солнца по криволинейной траектории (эллипсу) и, следовательно, с ускорением. Однако в ряде задач неинерциальностью системы отсчёта, связанной с земной поверхностью, можно пренебречь и считать её инерциальной. В отдельных случаях можно считать инерциальной и систему отсчёта, связанную с каким-либо телом, движущимся по поверхности Земли (автомобиль, поезд и т.д.), если внешние воздействия на это тело скомпенсированы в пределах точности, требуемых для решения данной задачи.

Системы отсчёта, движущиеся с ускорением относительно инерциальных систем, являются неинерциальными. В них первый закон Ньютона не выполняется.

Второй закон Ньютона

Второй закон Ньютона устанавливает количественную связь между действующей на тело силой $\vec{F}$, массой m тела и ускорением $\vec{a}$, приобретаемым телом под действием этой силы. Эта сила может быть равнодействующей всех сил действующих на тело ($\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_1$, где N – число тел, действующих на данное тело).

Воздействуя разными силами на одно и тоже тело и измеряя при этом ускорения, приобретаемые этим телом, можно установить связь между силой и ускорением: Ускорение, сообщаемое телу, пропорционально действующей на него силе, обратно пропорционально массе m тела и направлено в сторону действия силы:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}. \qquad (3.1)$$

Таким образом, ускоренное движение тела может быть получено только в результате приложения силы к телу.

Если в уравнении (3.1) принять, что сила, действующая на тело равна нулю, то и ускорение тела тоже равно нулю. Значит, тело, на которое не действуют силы, находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения, т.е. первый и второй законы Ньютона находятся в строгом соответствии.

Второй закон Ньютона в виде (3.1) выполняется лишь в инерциальных системах отсчёта и его можно записать так:

$$m\vec{a} = \vec{F} \quad (3.2)$$

Уравнение (3.2) называют основным уравнением динамики поступательного движения тела и из (3.2) следует, что произведение массы тела на его ускорение относительно инерциальной системы отсчёта равно результирующей силе действующей на это тело.

Второй закон Ньютона (3.2) – векторное уравнение и оно эквивалентно трём скалярным:

$$\mathrm{m}a_{\mathrm{x}} = F_x;\; ma_y = F_y;\; ma_z = F_z. \quad (3.3)$$

Здесь: a_x, a_y и a_z проекции вектора ускорения на соответствующие оси декартовой системы координат; F_x, F_y и F_z проекции векторов силы на эти же оси. Эта система уравнений (3.3) также носит название уравнений динамики поступательного движения материальной точки в скалярном виде.

Второй закон Ньютона можно записать и в дифференциальном виде на основании формулы (1.12):

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}. \quad (3.4)$$

Самим Ньютоном второй закон механики был сформулирован не через ускорение, а через другую физическую величину – импульс тела (количество движения). Импульсом тела $\vec{p}$ называет произведение массы тела m на его скорость $\vec{v}$:

$$\vec{p} = m\vec{v}. \quad (3.5)$$

Импульс - векторная величина и его направление совпадает с направлением вектора скорости $\vec{v}$. Так как ускорение $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, а массу тела можно считать постоянной при скоростях движения $v \ll c$, $c = 3\cdot 10^8\, мс^{-1}$ - скорость света в вакууме, то уравнение (3.2) преобразуется к виду:

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (3.6)$$

Быстрота изменения импульса тела определяется действующей на это тело внешней силой.

Из уравнения (3.6) следует, что

$$d\vec{p} = \vec{F}\cdot dt. \quad (3.7)$$

Произведение силы $\vec{F}$ на время её действия dt называют импульсом силы. Поэтому выражение (3.7) показывает, что изменение импульса $d\vec{p}$ тела равно импульсу действующей на него силы.

Следовательно, одно и тоже изменение импульса $d\vec{p}$ может быть достигнуто большей силой за малый промежуток времени dt и наоборот – малой силой $\vec{F}$, но за большой промежуток времени её действия.

Третий закон Ньютона

В первых двух законах Ньютона рассматривалась одна сторона действия одного тела на другое. Однако любое действие тел друг на друга носит характер взаимодействия: если тело 1 действует на тело 2, сообщая ему ускорение, то всегда одновременно тело 2 действует на тело 1, также сообщая ему ускорение (рис. 3.1). В третьем законе Ньютона обращается внимание на само взаимодействие, т.е. воздействия тел друг на друга.

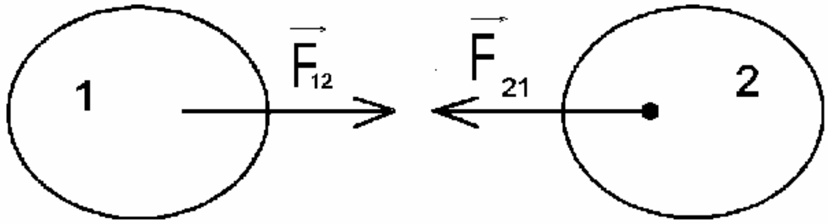

Рис. 3.1

Этот закон можно сформулировать следующим образом:

Силы, с которыми два тела действуют друг на друга, равны по величине и направлены по одной прямой в противоположные стороны, т.е. (см. рис. 3.1):

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \tag{3.8}$$

Здесь первый индекс относится к телу, воспринимающему силу. Эти силы приложены к разным телам и не могут уравновешивать друг друга. Если силу $\vec{F}_{12}$ назвать действием, а силу $\vec{F}_{21}$ противодействием (сила реакции), то третий закон Ньютона можно сформулировать так:

Всякому действию есть равное и противоположное направленное противодействие.

Третий закон Ньютона утверждает, что одиночные силы не могут существовать, силы всегда существуют парами, так как если есть одна сила, то есть и другая, ей противоположно направленная.

Деление сил на действующую и противодействующую условно – обе эти силы всегда одного и того же происхождения.

Законы Ньютона объясняли уже известные пути движения планет (законы Кеплера). Они окончательно упрочили гелиоцентрическое учение Коперника, помещавшее в центр мироздания Солнце.

Центр масс системы материальных точек. Уравнение движения центра масс системы материальных точек

На практике чаще всего приходится иметь дело не с движением одной материальной точки, а с движением совокупности взаимодействующих между собой тел. Эту совокупность тел можно представить в виде системы материальных точек.

Однако изучение движения такой системы материальных точек представляет собой сложную задачу, поскольку в общем случае для описания движения системы нужно знать движение всех её точек. Такое изучение можно упростить, введя понятие центра масс (центра инерции) системы материальных точек. Им называют точку С, положение которой в пространстве определяется радиусом-вектором $\vec{r}_c$ следующим образом:

$$\vec{r}_c = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}, \tag{3.9}$$

где m_i и $\vec{r}_i$ - масса и радиус-вектор i-ой точки системы, N – число материальных точек в системе.

Координаты центра масс системы материальных точек равны проекциям радиус-вектора $\vec{r}_c$ на координатные оси:

$$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i};\ y_c = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i};\ z_c = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}.$$

Скорость центра масс равна производной по времени от его радиус-вектора (3.9):

$$\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{1}{\sum m_i}\sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{m}\sum m_i \vec{v}_i, \tag{3.10}$$

где $m = \sum m_i$ - масса системы. Так импульс системы $\vec{p} = \sum m_i \vec{v}_i$, то из (3.10) имеем

$$\vec{p} = m\vec{v}_c, \tag{3.11}$$

т.е. импульс системы материальных точек равен произведению массы системы на скорость её центра масс. Подставив это значение $\vec{p}$ в уравнение (3.6), получим уравнение движения центра масс, системы материальных точек:

$$\frac{md\vec{v}_C}{dt} = \vec{F}. \tag{3.12}$$

Таким образом, под действием сил, приложенных к системе, её центр масс движется как материальная точка, в которой сосредоточена вся масса системы.

Отметим, что в ряде случаев центр масс системы отождествляется с её центром тяжести, но это возможно тогда, когда ускорение свободного падения одинаково для всех точек системы.

§4 Основное уравнение динамики вращательного движения. Момент силы. Момент инерции. Момент импульса

Рассмотрим теперь вращение твёрдого тела вокруг неподвижной в пространстве оси. В этом случае каждая точка твёрдого тела вращается по окружности, лежащей в плоскости, перпендикулярной оси вращения. Центры всех окружностей лежат на оси вращения. Угловая скорость и угловое ускорение для всех точек одинаковы, а линейная скорость и линейное ускорение возрастают пропорционально расстоянию от оси вращения.

Как показывает опыт, при вращательном движении определяющими факторами являются: не величина силы, а точка её приложения; не величина массы тела, а как эта масса распределена по объёму тела. В самом деле, каждый по собственному опыту знает, что дверь легче открыть, если ручка закреплена дальше от оси её вращения. Величиной, характеризующей действие силы на вращающееся тело и учитывающей эти обстоятельства, является момент силы (вращающий момент).

Момент силы относительно точки

Пусть сила $\vec{F}$ приложена к некоторой материальной точке m (рис. 4.1). Моментом $\vec{M}$ этой силы относительно произвольно выбранной в пространстве точки 0 называется векторное произведение радиус-вектора

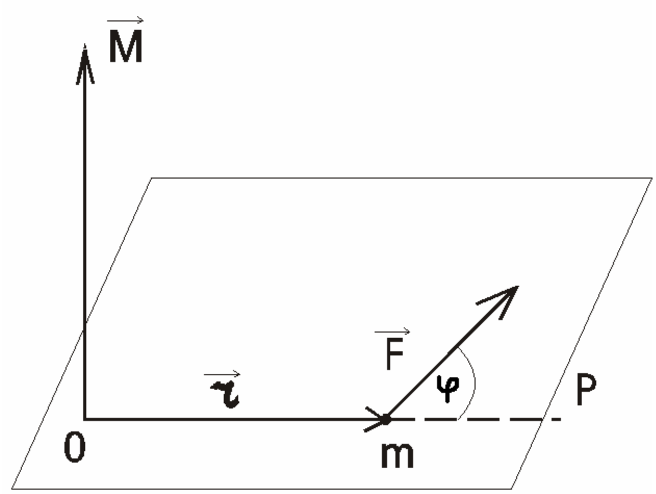

Рис. 4.1

$\vec{r}$ произведённого от точки 0 к материальной точке m, и вектора силы $\vec{F}$, т.е.

$$\vec{M} = \left[\vec{r} \cdot \vec{F}\right]. \qquad (4.1)$$

Согласно определению векторного произведения (см. введение), момент силы $\vec{M}$ представляет собой вектор, направленный перпендикулярно плоскости p, в которой лежат вектора $\vec{r}$ и $\vec{F}$ по правилу правого винта. Напомним, что в векторном произведении сомножители нельзя переставлять местами. Условимся, что первым сомножителем должен быть радиус-вектор $\vec{r}$. Модуль (величина) вектора $\vec{M}$ равен

$$M = r \cdot F Sin\varphi, \qquad (4.2)$$

где φ – угол между направлениями радиус-вектора $\vec{r}$ и вектора силы $\vec{F}$ (см. рис. 4.1). Вектор момента силы является свободным вектором. Чаще всего его помещают в точке 0, относительно которой он определяется (рис. 4.1).

Момент силы относительно оси

Пусть на материальную точку m действует сила $\vec{F}$ и пусть имеется в пространстве некоторая прямая ось X, относительно которой вычисляется момент силы (рис. 4.2).

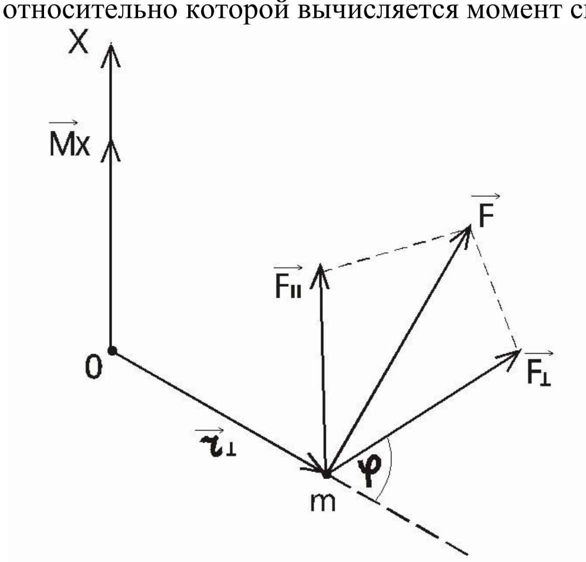

Рис. 4.2

Разложим силу $\vec{F}$ на две составляющие: составляющую $\vec{F}_{II}$, направленную вдоль оси 0X и составляющую $\vec{F}_\perp$, лежащую в плоскости, которая перпендикулярна оси 0X.

Моментом $\vec{M}_X$ силы $\vec{F}$ относительно оси X называют векторное произведение радиус-вектора $\vec{r}_\perp$ и составляющей $\vec{F}_\perp$ силы $\vec{F}$, т.е.

$$\vec{M}_x = \left[\vec{r}_\perp \cdot \vec{F}_\perp\right]. \qquad (4.3)$$

Таким образом, момент силы относительно оси представляет собой вектор, направленный перпендикулярно плоскости, образованной векторами $\vec{r}_\perp$ и $\vec{F}_\perp$, т.е. вдоль оси X, по правилу правого винта: величина его равна:

$$M_X = r_\perp F_\perp Sin\varphi, \tag{4.4}$$

где φ – угол между направлениями радиус-вектора $\vec{r}_\perp$ и составляющей $\vec{F}_\perp$ силы $\vec{F}$.

Второй закон Ньютона для вращательного движения

Пусть твёрдое тело вращается вокруг неподвижной оси под действием силы $\vec{F}_\tau$. Разделим мысленно вращающееся твёрдое тело на N материальных точек $\Delta m_1, \Delta m_2, ...\Delta m_N$, находящихся на расстояниях $r_1, r_2, ...r_N$ от оси вращения (рис. 4.3).

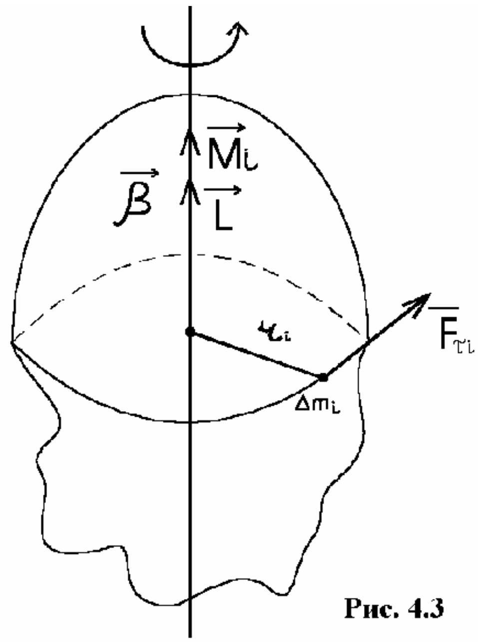

Рис. 4.3

Материальная точка массой Δm_i под действием силы $F_{\tau i}$ (эта сила направлена по касательной к окружности) приобретает ускорение $a_{\tau \cdot i}$, двигаясь по окружности радиуса r_i. По второму закону Ньютона

$$F_{\tau \cdot i} = \Delta m_i a_{\tau \cdot i}$$

Умножив это равенство на r_i и выразив линейное ускорение $a_{\tau \cdot i}$ через угловое β (2.8), получим

$$F_{\tau \cdot i} \cdot r_i = \Delta m_i r_i^2 \beta$$

или в векторной форме

$$\vec{M}_i = \Delta m_i r_i^2 \vec{\beta}. \tag{4.5}$$

Векторы $\vec{M}_i$ и $\vec{\beta}$ имеют одинаковые направления (см. рис. 4.3). Произведение массы материальной точки Δm_i на квадрат расстояния её от оси вращения r_i^2 называют моментом инерции (ΔJ) материальной точки.

Сложив векторы $\vec{M}_i$ для всех материальных точек, получим

$$\vec{M} = J \cdot \vec{\beta}\,;\ \vec{\beta} = \frac{\vec{M}}{J}\,, \tag{4.6}$$

где $\vec{M} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i$ - суммарный момент сил, приложенных к телу, и $J = \sum_{i=1}^{N} \Delta J_i$ - момент инерции вращающегося тела, равный сумме моментов инерции всех его материальных точек относительно данной оси вращения.

Формулы (4.6) выражают основное уравнение динамики вращательного движения твёрдых тел – это второй закон Ньютона для вращательного движения: угловое ускорение вращающегося тела прямо пропорционально суммарному моменту сил, приложенных к телу, и обратно пропорционально моменту инерции тела относительно оси вращения.

Уравнения (4.6) обычно записывают ещё и введя момент импульса $\vec{L}$ - это векторная величина равная произведению момента инерции тела J на угловую скорость $\vec{\omega}$, т.е.:

$$\vec{L} = J\vec{\omega}. \tag{4.7}$$

Направления векторов $\vec{L}$ и $\vec{\omega}$ совпадают (см. рис. 4.3). Для материальной точки с массой m модуль момента импульса, если учесть (2.7) равен

$$L = mr^2 \cdot \omega = mr^2 \frac{v}{r} = rmv\,, \tag{4.8}$$

где r - радиус круговой траектории и v - линейная скорость материальной точки.

Подставляя в (4.6) выражение (2.5) и считая, для твёрдого тела J=cons+(ось вращения закреплена), получим:

$$\vec{M} = J\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d(J\vec{\omega})}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt} \tag{4.9}$$

Это наиболее общий вид основного уравнения динамики вращательного движения: скорость изменения момента импульса вращающегося тела определяется суммарным моментом сил, действующих на тело и, что одно и тоже изменение момента импульса $d\vec{L}$ может быть достигнуто бóльшим моментом силы за малый промежуток времени и наоборот.

Из сопоставления формул (4.6) и (3.2) видно, что момент инерции J является аналогом массы и характеризует инертные свойства тела при вращении. Момент инерции – скалярная величина, зависящая от массы тела и её распределения относительно оси вращения. Момент инерции тела не является «врождённым» свойством тела, так как зависит от расстояния до оси вращения.

Единицей измерения момента инерции является 1кг*м^2 . Вычисляется момент инерции по формуле

$$J = \int_V \rho r^2 dV\,, \tag{4.10}$$

где ρ – плотность вещества, V – объём тела.

§5 Закон Всемирного тяготения Ньютона. Сила тяжести, вес тела. Ускорение силы тяжести. Инертная и гравитационная масса

Исаак Ньютон не только открыл три закона динамики, но изучал также движение небесных тел – планет и Луны. В частности, он интересовался природой силы, которая должна действовать на Луну, чтобы при движении вокруг Земли она удерживалась на почти круговой орбите. Поскольку падающие тела ускоряются, Ньютон заключил, что на них действует сила, которую мы теперь называем силой тяготения или гравитации.

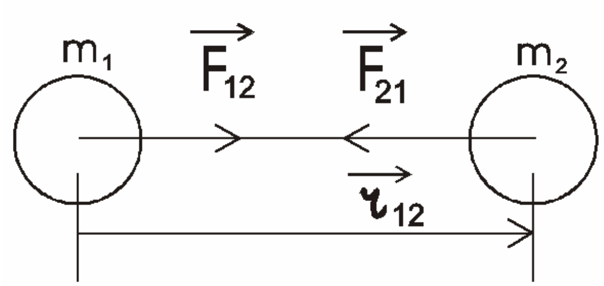

Рис. 5.1

Гравитационное взаимодействие проявляется во взаимном притяжении тел и присуще всем телам независимо от их строения, химического состава и других свойств. Ньютоном был установлен закон, определяющий силу взаимного притяжения тел и этот закон получил название закона Всемирного тяготения: между двумя материальными точками, массы которых m_1 и m_2, вне зависимости от среды, в которой они находятся, действуют силы взаимного притяжения $\vec{F}_{12}$ и $\vec{F}_{21}$, пропорциональные произведению масс этих точек и обратно пропорциональные квадрату расстояния между ними (рис. 5.1):

$$\vec{F}_{12} = G\frac{m_1 m_2}{r^3}\vec{r}_{12} \text{ и } \vec{F}_{21} = -G\frac{m_1 m_2}{r^3}\vec{r}_{12} \qquad (5.1)$$

где $\vec{F}_{12}$ - сила притяжения, действующая на точку m_1, $\vec{r}_{12}$ - радиус-вектор, проведённый из этой точки в точку массы m_2, $\left|\vec{r}_{12}\right| = r$ - расстояние между точками, G – коэффициент пропорциональности, называемый гравитационной постоянной. По третьему закону Ньютона, сила притяжения, действующая на материальную точку массы m_2 по абсолютному значению равна силе $\vec{F}_{12}$, но направлена в противоположную сторону: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{12}$.

Если в формуле (5.1) положить $m_1 = m_2 = 1кг$ и $r = 1м$, то G – гравитационная постоянная численно равна силе притяжения между двумя телами (материальными точками) массы 1кг каждое, когда расстояние между ними равно 1м. Численное значение $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} Н \cdot М^2 КГ^{-2}$. Весьма малое значение гравитационной постоянной показывает, что сила притяжения может быть значительной только для тел очень большой массы. Таким образом, каждая частица во Вселенной притягивает любую другую частицу с силой прямо пропорциональной произведению их масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними. Эта сила действует вдоль линии, соединяющей эти частицы. Если по условиям задачи взаимодействующие тела не могут рассматриваться как материальные точки, то для определения силы притяжения между телами каждое из них следует разбить на столь малые элементы, чтобы их можно было считать материальными точками. Вычисление силы сводится к интегрированию:

$$F = G\int_{V1}\rho_1 dV_1 \int_{V2}\frac{\rho_2}{r^2}dV_2, \qquad (5.2)$$

где ρ_1 и ρ_2 - плотности тел, V_1 и V_2 - объёмы тел.

Гравитационные силы вблизи поверхности Земли называют силами тяжести. Каждое тело, находящееся на Земле, притягивается к её центру, с силой

$$F = G\frac{mM_3}{R_3^2}, \qquad (5.3)$$

где m – масса тела, M_3 – масса Земли, R_3 – её радиус.

Силу тяжести не следует отождествлять с весом тела. Вес тела – это сила, с которой тело вследствие его притяжения к Земле действует на подвес или опору. Сила тяжести равна весу тела лишь в одном случае – если тело и опора (подвес) неподвижны относительно Земли. В случае движения опоры (подвеса) с некоторым ускорением $\vec{a}$ вес тела не будет равен силе тяжести.

Движение тела только под действием силы тяжести называют свободным падением. Тогда второй закон Ньютона запишем в виде

$$F = mg = G\frac{mM_З}{R_З^2}, \tag{5.4}$$

где g – ускорение силы тяжести (ускорение свободного падения).

Из уравнения (5.4) следует, что

$$g = G\frac{M_З}{R_З^2}. \tag{5.5}$$

т.е. ускорение свободного падения не зависит от массы падающего тела.

При движении опоры (подвеса) с ускорением $|\vec{a}| = |\vec{g}|$ т.е. при свободном падении вес тела становится равным нулю, т.е. наступает состояние невесомости.

Итак, состояние тела, когда на него действуют только силы тяжести и не возникает веса, называют состоянием невесомости. В состоянии невесомости на тело действует только одна сила – сила тяжести, и именно эта сила сообщает телу ускорение свободного падения g.

В состоянии невесомости приобретают существенное значение силы взаимодействия между телами, которые в обычных условиях играют второстепенную роль из-за их малости по сравнению с весом тела. Тела в таком состоянии не оказывают давления на опоры, и если опора убрана, то они «повисают» в пространстве.

Изменение притяжения внутри Земли и на её поверхности

При измерении силы тяжести под водой или в шахтах, при изучении внутреннего строения Земли, важно знать законы изменения силы тяжести внутри масс.

При перемещении материальной точки с поверхности Земли к её центру, действующая на точку сила притяжения будет, во-первых, возрастать обратно пропорционально квадрату радиуса, во-вторых, убывать пропорционально уменьшению массы, так как внешние массы на точку не действуют, т.е. происходит как бы уменьшение притягивающей сферы. Это уменьшение массы пропорционально кубу радиуса, так как объём сферы $V = r^3$. Отсюда следует, что притяжение внутри Земли убывает по мере углубления пропорционально первой степени радиуса.

Однако всё это справедливо для Земли однородной и имеющей правильную сферическую форму.

Выступающие над её поверхностью горы, острова, континенты искажают несколько характер зависимости силы притяжения. Оказывается, что при движении точки с поверхности Земли к центру, действующая на неё сила притяжения вначале медленно возрастает примерно до глубины 20÷30 км, а далее она начинает убывать пропорционально первой степени радиуса и в центре Земли обращается в нуль.

Сила тяжести в одной и той же точке также непостоянна – она периодически изменяется: то увеличивается, то уменьшается. Период таких колебаний близок к половине суток. Такие колебания связывают с изменением возмущающего притяжения Луны и Солнца в связи с изменением их положения относительно притягиваемой точки.

Плотностные неоднородности Земли также являются причиной аномалии силы тяжести. Аномалии обычно колеблются в пределах нескольких единиц 10^{-3} м·с$^{-2}$, что составляет 0,05% полного значения силы тяжести. Однако именно эти изменения представляют наибольший интерес, так как они дают представление о распределении в ней полезных ископаемых.

Приборы, позволяющие измерять ускорения силы тяжести, называют гравиметрами (работают по принципу пружинных весов), а раздел геофизики – гравиметрия.

Инертная и гравитационная масса

Физическая величина – масса, входящая во второй закон Ньютона, характеризует способность тел приобретать ускорение под действием силы. При этом ускорение, сообщаемые равными силами телам разной массы, обратно пропорциональны этим массам. Масса во втором законе Ньютона служит мерой инертных свойств, поэтому её называют инертной (3.2).

Масса входит также и в закон, определяющий силу взаимного притяжения тел (5.1). В данном поле тяготения силы тяготения, действующие на тело, пропорциональны его массе. Масса в законе Всемирного тяготения служит мерой способности тел создавать поля тяготения и испытывать воздействие полей тяготения, поэтому её называют гравитационной.

Инертность и способность создавать поля тяготения – совершенно различные проявления свойств материи. Поэтому заранее нельзя предполагать, что меру того или другого свойства материи можно выражать одной и той же физической величиной.

Вблизи поверхности Земли всякое тело притягивается к ней с силой (5.4), с другой стороны, под действием этой силы тело приобретает ускорение, которое по второму закону Ньютона должно быть равно отношению силы F к инертной массе $m_и$ тела:

$$a = \frac{F}{m_и} = G\frac{M_З}{R_З^2}\frac{m_2}{m_и}, \tag{5.6}$$

где m_2 - гравитационная масса тела. Опыты Галилея показали, что различные тела при свободном падении имеют одинаковое ускорение $a = g$. Множитель $GM_З / R_З^2$ также одинаков для всех тел. Это значит, что и отношение $m_2 / m_и$ должно быть также одинаково для всех тел. Поэтому выражение (5.6) можем записать в виде

$$g = K\frac{m_2}{m_и}.$$

Итак, мы приходим к выводу, что инертная и гравитационная массы каждого из тел пропорциональны друг другу. Иначе говоря, хотя эти массы по своим проявлениям различны, но абсолютные значения их друг другу пропорциональны, то при соответствующем выборе единиц физических величин меру того и другого свойства можно выражать одним и тем же числом. При общепринятом выборе единиц гравитационная и инертная масса тела равны друг другу, т.е.:

$$m_2 = m_и = m$$

§6 Виды сил в механике. Механический принцип относительности. Преобразования Галилея. Границы применимости законов классической механики

Все известные силы можно свести к четырём основным видам взаимодействия: 1) гравитационное; 2) электромагнитное; 3) сильное; 4) слабое.

Гравитационное взаимодействие является универсальным и связывает все без исключения тела. Однако это взаимодействие играет существенную роль в случае тел большой массы (Земля, Луна, Солнце и др.). В микромире оно является ничтожно малым.

Электромагнитное взаимодействие неизмеримо интенсивнее гравитационного и осуществляется через посредство электромагнитных полей. Электромагнитную природу имеет взаимодействие атомов и молекул и, следовательно, определяется этим взаимодействием химические, биологические процессы.

Сильное (ядерное) взаимодействие имеет резко ограниченный радиус действия (10_{M}^{-15}), поэтому проявляется только внутри атомных ядер, где оно в сотни раз интенсивнее электромагнитного.

Слабое взаимодействие обуславливает нестабильность ряда микрочастиц (их распад).

В рамках классической механики рассматриваются лишь силы гравитационной и электромагнитной природы.

I. Силы тяготения (гравитационные силы) подчиняются закону Всемирного тяготения (5.1), справедливому для материальных точек или шаров. Взаимодействие тел на расстоянии осуществляется через посредство полей. Любое тело окружено гравитационным полем, которое действует на внесённые в него тела силами, пропорциональными их массам. Силовой характеристикой поля является напряжённость:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m_2} \text{ и } g = G\frac{m_1}{r^2}, \tag{6.1}$$

где m_1 - масса тела, создающего поле, r - расстояние от тела m_1 до данной точки поля. Напряжённость гравитационного поля $\vec{g}$ численно равна силе, действующей на тело единичной массы m_2 в данной точке поля. У поверхности Земли $|\vec{g}| \approx 9{,}8 M \cdot C^{-2}$ - с точностью до поправки, связанной с вращением Земли.

Напряжённость гравитационного поля (поля тяготения), как и сила притяжения - величина векторная и совпадает с вектором этой силы по направлению, а размерность её совпадает с размерностью ускорения.

Сравнение формул (5.5) и (6.1) показывает, что вектор напряжённости гравитационного поля Земли совпадает с вектором ускорения свободного падения. Иначе говоря, гравитационное поле обладает следующим свойством: все тела независимо от их массы приобретают в нём одинаковые ускорения. Другим свойством гравитационного поля является его универсальность, т.е. оно присуще всем телам и частицам без исключения.

При наличии нескольких полей напряжённость результирующего поля равна векторной сумме напряжённостей всех этих полей:

$$\vec{g} = \sum_{i=1}^{n} \vec{g}_i \tag{6.2}$$

Это утверждение получило название принципа суперпозиции (наложения) полей.

Потенциальная энергия материальной точки массы m_2, помещённой в данную точку гравитационного поля, созданного телом массы m_1, принимаемым за материальную точку, пропорциональна массе точки m_2, т.е.

$$П = -G\frac{m_1 m_2}{r}, \tag{6.3}$$

где r – расстояние от точки массы m_1 до точки массы m_2. Если же взять отношение

$$\frac{П}{m_2} = -G\frac{m_1}{r} = \varphi, \tag{6.4}$$

то оно уже не зависит от массы m_2 точки (тела), а определяется массой m_1 тела, создающего поле и расстоянием r от этого тела до данной точки поля. Величину φ, равную этому отношению, используют в качестве энергетической характеристики гравитационного поля и называют потенциалом гравитационного поля. Итак, потенциал гравитационного поля (поля тяготения) – скалярная величина, равная отношению потенциальной энергии материальной точки, находящейся в данной точке поля, к её массе. Потенциал в некоторой точке поля тяготения, созданного в результате наложения полей тяготения, обусловленных отдельными материальными точками системы, равен сумме потенциалов в этой точке, соответствующих каждому из полей в отдельности, т.е.:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i . \tag{6.5}$$

Для объяснения явления тяготения и его дальнодействия существенную роль играют гравитационные волны, понятие о которых возникло при появлении теории тяготения Эйнштейна: колеблющаяся масса создаёт переменные гравитационные поля, которые сообщают телам, попавшим в них, изменяющиеся во времени ускорения. Эти поля «уходят» от создавших их тел и начинают распространяться в пространстве в виде волн. Гравитационные волны ещё никому не удавалось наблюдать, и сведения об их свойствах получаются из анализа решений уравнений Эйнштейна. Их свойства: 1) они распространяются в пространстве со скоростью света; 2) гравитационные волны – поперечные; 3) гравитационные волны взаимодействуют с любыми массами, встречающимися на их пути; 4) гравитационные волны, как и любые волны, характеризуются длиной (от сотен км и более).

II. Силы упругости. Под действием приложенных к телу сил всякое реальное тело деформируется, т.е. изменяет свои размеры и форму. Пусть материальная точка m в результате воздействия на неё внешней силы сместилась из положения равновесия на расстояние r (рис. 6.1). В этом случае возникает сила упругости, которая имеет направление, противоположное смещению материальной точки из положения равновесия и внешней силе:

$$\vec{F} = -K \cdot \vec{r}, \tag{6.6}$$

где к – коэффициент, зависящий от упругих свойств тела, $\vec{r}$ - радиус-вектор, характеризующий смещение, причём $\left|\vec{r}\right| = r$.

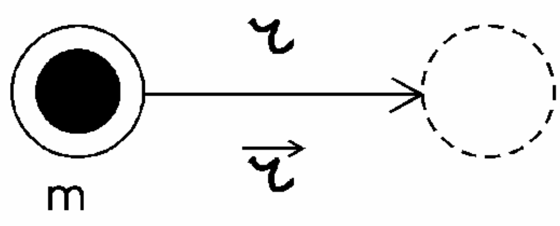

Рис. 6.1

Силы упругости тел обусловлены электромагнитным взаимодействием составляющих их частиц.

III. Силы трения скольжения. Эти силы возникают при скольжении данного тела по поверхности другого, направлены по касательной к этим поверхностям и препятствуют относительному перемещению тел. Для сухого трения скольжения

$$F_{тр} = \mu P_n . \tag{6.7}$$

Здесь P_n - сила нормального давления, прижимающая трущиеся поверхности друг к другу, μ – безразмерный коэффициент трения, зависящий от рода и состояния соприкасающихся тел и имеют электромагнитную природу.

IV. Силы сопротивления. Эти силы возникают при движении тела в жидкости или в газе

$$\vec{F}_{сопр} = -H\vec{v}, \tag{6.8}$$

где H – коэффициент, зависящий от формы и размеров двигающегося тела и свойств среды.

Линейная зависимость между силой сопротивления и скоростью (6.8) имеет место при небольших скоростях движения тела.

При больших скоростях движения тела в жидкости или газе линейная зависимость нарушается и имеет место квадратичная зависимость силы $\vec{F}$ от скорости $\vec{v}$, т.е.

$$\vec{F}_{сопр} = -Hv^2 i\,, \tag{6.9}$$

где i - единичный вектор (орт), направленный вдоль скорости.

Механический принцип относительности. Преобразования Галилея

Выберем неподвижную систему отсчёта, которую с необходимой степенью точности можно считать инерциальной (см. §3), и рассмотрим поступательное по отношению к ней движение подвижной системы отсчёта с постоянной скоростью v_0. Обозначим координаты материальной точки m (рис. 6.2) в неподвижной системе отсчёта через x, y, z, а в движущейся системе отсчёта – через x', y', z'. Пусть в момент времени t=0 начала обеих систем отсчёта совпадают и движение подвижной системы отсчёта происходит вдоль оси OX. Тогда координаты материальной точки m для любого момента времени в обеих системах отсчёта связаны между собой соотношениями:

$$x = x' + v_0 t\,;\;\; y = y'\,;\;\; z = z'\,;\;\; t = t'\,. \tag{6.10}$$

Последнее уравнение означает, что время остаётся одним и тем же независимо от того, в какой из инерциальных систем мы его измеряем (время абсолютно). Систему уравнений (6.10) называют преобразованиями Галилея.

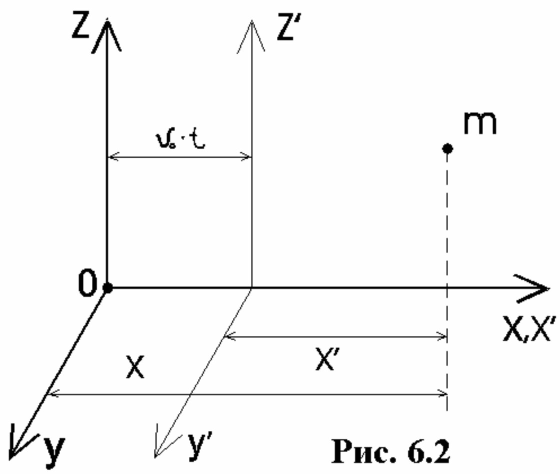

Рис. 6.2

Если при переходе от одной инерциальной системы отсчёта к другой значение некоторой величины остаётся неизменным, то говорят, что эта величина инвариантна относительно рассматриваемого преобразования. Найдём, например, связь между проекциями скорости движущейся материальной точки на координатные оси в неподвижной и подвижной системах отсчёта. Для этого продифференцировав по времени уравнение (6.10), получим:

$v_x = v'_x + v_0$; $v_y = v'_y$; $v_z = v'_z$; или в векторной форме

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0\,, \tag{6.11}$$

т.е. скорость $\vec{v}$ движущейся материальной точки относительно неподвижной системы отсчёта равна векторной сумме скорости точки относительно подвижной системы отсчёта $\vec{v}'$ и скорости движения самой системы отсчёта $\vec{v}_0$.

Продифференцировав равенство (6.11) по времени, получим связь между проекциями ускорения точки на координатные оси в обеих системах отсчёта:

$a_x = a'_x$; $a_y = a'_y$; $a_z = a'_z$ или в векторном виде

$$\vec{a} = \vec{a}', \tag{6.12}$$

Таким образом, ускорение точки относительно обеих систем отсчёта одинаково, т.е. оно инвариантно относительно преобразований Галилея. Отсюда следует инерциальность всех систем отсчёта, движущихся равномерно и прямолинейно относительно некоторой инерциальной системы отсчёта (ускорение тела в этих системах отсчёта одинаково).

Так как ускорение материальной точки одинаково в двух системах отсчёта, движущихся друг относительно друга равномерно и прямолинейно; масса тела есть его постоянная характеристика ($v << c$); сила определяет ускорение, которое она сообщает данной массе, и поэтому и силы в обеих координатных системах одинаковы, то уравнение второго закона динамики оказывается инвариантным к преобразованиям Галилея. Следовательно, движения тел во всех инерциальных системах отсчёта описываются одними и теми же уравнениями. Поэтому одинаковые механические опыты во всех этих системах должны давать одинаковые результаты, т.е. никакие механические опыты не дают возможности обнаружить движение одной инерциальной системы отсчёта относительно другой инерциальной системы отсчёта.

Впервые это положение было сформулировано Галилеем, и оно составляет содержание механического принципа относительности, называемого часто также принципом относительности Галилея.

Границы применимости законов классической механики

Законы Ньютона хорошо описывают движение макроскопических тел (тел, состоящих из огромного числа молекул), скорость которых мала в сравнении со скоростью света. Однако эти законы теряют силу при описании объектов микромира и тел, движущихся со скоростями, близкими к скорости света. На основе развития теории атома возник новый раздел физики, рассматривающий особенности поведения микрочастиц – квантовая механика.

Механика Ньютона оказалась неприменимой к движению быстрых (релятивистских) частиц, скорость которых сравнима со скоростью света. Движение таких частиц подчиняется релятивистской механике. Согласно релятивистской механике в любой системе отсчёта тело не может приобрести скорость, равную или превосходящую скорость света *С*. Введённые Ньютоном понятия абсолютного пространства и абсолютного времени были пересмотрены и связаны с материей и её движением А. Эйнштейном в теории относительности. Согласно этой теории массы движущихся частиц, промежутки времени между событиями, длины отрезков зависят от скорости движения тел в данной системе отсчёта (релятивистские эффекты). Например, при приближении скорости движения тела v к скорости света *С* приводит к значительному увеличению его массы. При $v << c$ уравнения релятивистской и классической механики совпадают. Это означает, что механика Ньютона входит в релятивистскую механику как частный случай.

Развитием науки ньютоновская механика не была перечёркнута; были лишь установлены границы её применимости. Это отражает естественный ход развития науки; с расширением круга изучаемых явлений старые теории становятся частными случаями более общих новых теорий.

§7 Неинерциальные системы отсчёта. Силы инерции. Силы инерции во вращающихся системах отсчёта. Сила Кориолиса. Центробежная сила инерции

Выясним возможность применения уравнений динамики для систем отсчёта, движущихся друг относительно друга ускоренно, т.е. для неинерциальных систем отсчёта.

Пусть инерциальная система отсчёта К неподвижна, а система К' движется относительно неё поступательно с ускорением a_0 (рис. 7.1), где радиус-вектор $\vec{r}$ - определяет положение материальной точки m относительно системы К (неподвижной); $\vec{r}'$ - положение материальной точки относительно системы К' (движущейся) и $\vec{r}_0$ - положение системы К' относительно К.

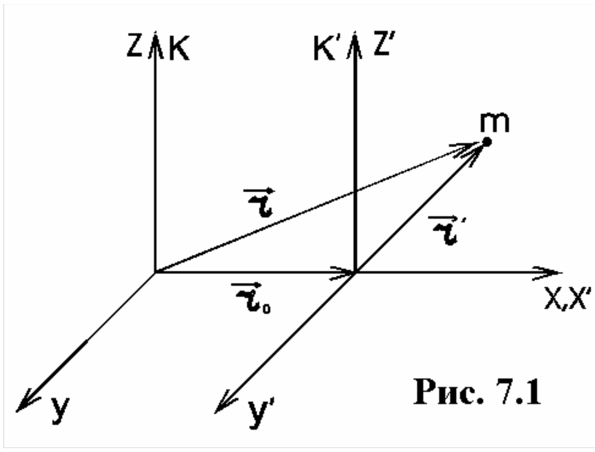

Рис. 7.1

Из рис. 7.1 следует, что

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_0. \tag{7.1}$$

Продифференцировав выражение (7.1) дважды по времени и умножив на массу m материальной точки, получим:

$$\frac{md^2\vec{r}'}{dt^2} = \frac{md^2\vec{r}}{dt^2} - \frac{md^2\vec{r}_0}{dt^2}, \tag{7.2}$$

где $\dfrac{d^2\vec{r}_0}{dt^2} = \vec{a}_0$ - ускорение системы отсчёта К' относительно системы К.

Таким образом, в правой части уравнения поступательного движения материальной точки появилось слагаемое, равное произведению массы точки на ускорение самой неинерциальной системы отсчёта относительно инерциальной системы отсчёта, названное силой инерции, т.е.:

$$\vec{F}_{ин} = -m\frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2}. \tag{7.3}$$

Знак «-» показывает, что сила инерции всегда направлена в противоположную сторону ускорения системы отсчёта.

Тогда второй закон Ньютона в неинерциальной системе отсчёта выглядит так:

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{ин}, \tag{7.4}$$

где $\vec{F}$ - результирующая сила – как результат взаимодействия точки с другими телами, $\vec{a}'$ - ускорение точки относительно системы отсчёта К'.

Сила инерции (7.3) вызвана не взаимодействием материальной точки с другими телами, а ускоренным движением самой системы отсчета, и поэтому в отличие от обычных сил к ним неприменим третий закон Ньютона. Это обстоятельство приводит к тому, что в неинерциальных системах отсчета не существует замкнутых или изолированных систем тел, так как для любого из тел системы силы инерции являются внешними. Отметим также, что силы инерции действуют на тело только в неинерциальной системе отсчета, в инерциальных системах отсчета – таких сил нет.

Силы инерции во вращающихся системах отсчета. Сила Кориолиса. Центробежная сила инерции

Пусть диск радиуса r вращается с угловой скоростью ω, а на ободе диска движется материальная точка m со скоростью v' относительно вращающейся системы отсчета (рис.7.2). Скорость этой материальной точки относительно неподвижной (инерциальной) системы отсчета v равна по величине

$$v = v' + r\omega , \tag{7.5}$$

где ω - угловая скорость вращающейся системы отсчета.

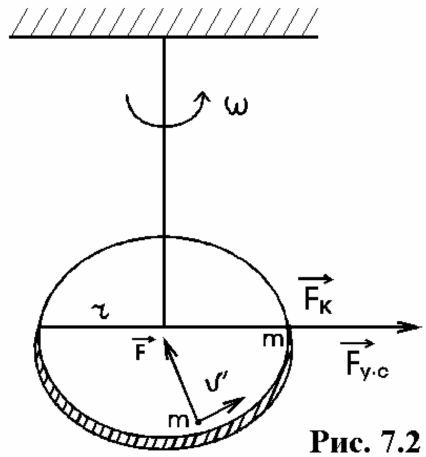

Рис. 7.2

Для того, чтобы точка двигалась относительно неподвижной системы отсчета по окружности со скоростью v', на нее должна действовать направленная к центру диска сила F, например, сила натяжения нити, которой точка привязана к центру диска (см рис. 7.2). Величина этой силы

$$F = ma_n = m\frac{V^2}{r} = \frac{m}{r}\left(V' + rw\right)^2 = \frac{mV'^2}{r} + 2mv'w + mw^2 r .$$

Здесь a_n - нормальное ускорение. Тогда второй закон Ньютона примет вид

$$ma' = F - 2mv'w - mw^2 r, \tag{7.6}$$

где a' - ускорение материальной точки относительно вращающейся системы отсчета.

Таким образом, во вращающейся системе материальная точка ведет себя так, как если бы на нее, кроме направленной к центру диска силы F, действовали еще две направленные от центра силы: $2mv'w$ - сила Кориолиса; $mw^2 r$ - центробежная сила инерции. Силу Кориолиса можно записать в векторном виде

$$\vec{F}_k = 2m\left[\vec{v}' \cdot \vec{w}\right]. \tag{7.8}$$

Сила Кориолиса всегда перпендикулярна направлению движения тела, и поэтому она не производит работы над телом, т.е. эта сила изменяет направление вектора скорости $\vec{v}'$, но не изменяет ее абсолютной величины.

Эффект действия силы Кориолиса сводится к тому, что во вращающейся системе отсчета движущееся тело либо отклоняется в направлении, перпендикулярном его относительной скорости, либо оказывает давление на связь, препятствующую такому отклонению. На Земле этот эффект обусловлен так, что свободно падающее тело отклоняется по вертикали к востоку, а тела движущиеся вдоль земной поверхности, отклоняются в северном полушарии вправо, а в южном – влево от направления движения. В северном полушарии у рек подмывается правый берег, т.е. сила Кориолиса в нашем полушарии прижимает воду к правому берегу (всегда будет круче), в южном полушарии – левый берег.

Действие сил Кориолиса существенно сказывается при длительных движениях воздуха в атмосфере. Ветры, охватывающие значительные участки Земли, никогда не дуют прямо в направлении от большого атмосферного давления к малому, а отклоняются от него вправо в северном полушарии и влево – в южном.

Центробежная сила инерции

$$F_{ц.б.} = m\omega^2 r\,, \tag{7.9}$$

как видно из формулы (7.9), пропорциональна массе тела, расстоянию от оси вращения r и действует на тело независимо от того, находится ли оно в покое или же совершает относительное движение с какой-либо скоростью. Сила Кориолиса действует только на движущиеся тела во вращающейся системе отсчета (см ф-лу (7.8)).

Как показывает опыт с маятником Фуко, все системы отсчета, связанные с Землей, являются вращающимися системами. В таких системах проявляются действия силы Кориолиса и центробежной силы инерции.

§8 Энергия, работа, мощность

Формы движения материи весьма разнообразны – механическое перемещение тел, тепловое движение частиц вещества, ядерные и химические реакции и т.д. Движение в любой его форме – неотъемлемое свойство материи. Универсальной количественной мерой различных форм движения материи является энергия. В соответствии с различными формами движения материи говорят о разных видах энергии – механической, внутренней, ядерной и т.д. Энергий системы назовем физическую величину, характеризующую состояние этой системы и изменение которой может быть измерено величиной выполненной работы, т.е.

$$\Delta W = \Delta A\,. \tag{8.1}$$

Понятие работы в механике связано с понятиями перемещения и силы.

Если тело под действием постоянной силы $\vec{F}$ перемещается на $\Delta\vec{r}$, то работы силы определяется скалярным произведением вектора силы на вектор перемещения $\Delta\vec{r}$:

$$\Delta A = \vec{F}\Delta\vec{r} = F\Delta r\cos\varphi\,, \tag{8.2}$$

где φ - угол между направлениями вектора силы и вектора перемещения.

При прямолинейном движении, когда тело под действием постоянной силы $\vec{F}$ проходит путь S, работа этой силы

$$A = F_s \cdot S = FS\cos\varphi\,, \tag{8.3}$$

где $F_s = F\cos\varphi$ - проекция вектора силы на направление движения тела.

Из формул (8.2) и (8.3) следует, что при $\varphi = 90^0$ работы силы равна нулю ($\cos\varphi = 0$). Отсюда следует, что нормальная к направлению движения составляющая силы работы не производит (сила Кориолиса, сила Лоренца).

Работу может совершать только тангенциальная составляющая силы, действующей на тело. Очевидно, если $S=0$ то работы силы приложенной к телу, тоже равна нулю. Например, когда человек, стоя неподвижно, держит в руках груз, он совершает биохимическую работу, но механическая работа в этом случае равна нулю.

Если сила не постоянна, то ее работу можно вычислить так. Разбивают траекторию тела на столь малые участки пути ΔS, чтобы за время прохождения телом участка пути силу F_s можно было с необходимой степенью точности считать одинаковой. Работа силы на каждом участке пути будет $\Delta A \approx F_s \Delta S$, а на всем пути S

$$A = \sum_i^N \Delta A_i \approx \sum F_{si} \Delta S_i .$$

Здесь N – число участков.

В пределе при $\Delta S \to 0$, а $N \to \infty$ вместо приближенного равенства получим

$$A = \lim_{\substack{\Delta S \to 0 \\ N \to \infty}} \sum F_{si} \Delta S_i = \int_S F_s dS . \qquad (8.4)$$

Единицей работы в СИ является джоуль (ДЖ):

$$1ДЖ = 1н \cdot 1м$$

Поскольку при вращательном движении роль силы выполняет момент силы, а роль линейного перемещения угловое перемещение, то работа для вращательного движения $dA = Md\varphi$.

Все рассматриваемые в физике силы разделяются на консервативные (потенциальные) и неконсервативные (непотенциальные). Силы, работа которых не зависит от формы траектории, а определяется только начальным и конечным положениями тела в пространстве, называют консервативными. Такими силами, например, являются силы тяжести. Силовые поля, в которых действуют консервативные силы, называют потенциальными полями.

Силы, работа которых зависит от формы траектории перемещения тела, называют неконсервативными, а соответствующие поля – непотенциальными. Примером неконсервативных сил может быть – сила трения.

Покажем, что силы тяжести являются консервативными силами. Для этого подсчитаем работу силы тяжести при перемещении тела по произвольному пути из точки 1 в точку 2. тогда работа

$$A_{12} = \int_1^2 F_x dX = mg(X_2 - X_1) . \qquad (8.5)$$

Видно, что работа силы тяжести не зависит от формы траектории, по которой перемещается тело, а определятся лишь начальным и конечным положением (X_1 и X_2) тела.

Когда тело движется в поле сил тяжести по замкнутой траектории, т.е. в конечном итоге оказывается вновь в точке X_1, то согласно (8.5) суммарная работа, совершаемая силой тяжести, $A=0$.

Эта характерная особенность всех консервативных сил и может быть использована как их определение: силы, суммарная работа которых по любой замкнутой траектории тождественно равна нулю, консервативны:

$$A = \oint F_x dx \equiv 0 . \qquad (8.6)$$

Мощность

При конструировании и эксплуатации машин необходимо учитывать не только работу, совершенную машиной, но и быстроту выполнения им работы. Величина, характеризующая скорость выполнения работы, называется мощностью. Мощность численно равна отношению работы ΔA к промежутку времени Δt, в течение которого она совершена:

$$N = \frac{\Delta A}{\Delta t} . \qquad (8.7)$$

Поскольку работа $dA = \vec{F} d\vec{r}$ (8.2), то

$$N = \frac{dA}{dt} = \vec{F}\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}, \qquad (8.8)$$

т.е. мощность равна скалярному произведению вектора силы на вектор скорости, направления которых одинаковы.

Единица мощности – Ватт (Вт). $1BT = \frac{1ДЖ}{1C}$

Кинетическая энергия

Энергия механической системы связана с движением и взаимным распространением тел ее образующих:

$$W = f(\vec{v}_1, \vec{v}_2, ...\vec{r}_1, \vec{r}_2), \qquad (8.9)$$

т.е. является функцией скоростей тел данной системы и их координат.

В связи с этим в механике различают два вида энергии: кинетическую (энергия движения тела); потенциальную (энергия взаимодействия – зависит от взаимного расположения тел системы).

Подсчитаем кинетическую энергию материальной точки *m*, которая движется под действием силы $\vec{F}$. Дифференциальное уравнение движения запишем в виде

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}. \qquad (8.9)$$

Равенство (8.9) не нарушится, если скалярно умножим на скорость $\vec{v}$, а учитывая (1.6) и (8.2), после сокращения на dt, получим:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dA. \qquad (8.10)$$

Величина, стоящая под знаком дифференциала d есть энергия, поскольку тело совершает работу dA только за счет изменения энергии.

Обозначим

$$\frac{mv^2}{2} = K \qquad (8.11)$$

и назовем кинетической энергией поступательного движения материальной точки.

Из формулы (8.10) следует, что кинетическая энергия определяется с точностью до произвольной постоянной

$$K = \frac{mv^2}{2} + C.$$

Будем считать, что при *v*=0, K=0 и тогда C=0, т.е. покоящееся тело не может совершить работу.

Кинетическая энергия системы материальных точек

$$K = \sum^{N} K_i = \sum^{N} \frac{m_i v_i^2}{2}. \qquad (8.12)$$

Здесь масса *i* – материальной точки, v_i - ее скорость.

Таким образом, кинетическая энергия тела, масса которого постоянна, определяется только скоростью его движения.

Уравнение (8.10) можно записать так:

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = A_{12}.$$

Отсюда вытекает, что изменение кинетической энергии при движении тела из одного положения в другое измеряется работой. Если кинетическая энергия тела убывает, то за счет этой энергии тело совершает работу над внешними телами и в этом случае А<0.

Если кинетическая энергия возрастает, то внешние тела совершают над ним работу, т.е.А>0.

Вычислим кинетическую энергию твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Представим тело как систему материальных точек, массы которых равны $m_1, m_2 ... m_N$, а соответствующие радиусы вращения $r_1, r_2 ... r_N$. Каждая точка движется с линейной скоростью $v_i = \omega r_i$, где ω – угловая скорость вращающегося твердого тела, одинаковая для всех точек тела, а кинетическая энергия точки будет равна

$$K_i = \frac{m_i v_i^2}{2} \text{ или } \frac{m_i r_i^2 \omega^2}{2}.$$

Кинетическая энергия вращающегося твердого тела равна сумме энергий отдельных точек:

$$K = \frac{m_1 r_1^2 \omega^2}{2} + \frac{m_2 r_2^2 \omega^2}{2} + ... + \frac{m_N r_N^2 \omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum^{N} m : r_i^2,$$

где $\sum^{n} m_i r_i^2 = I$ - момент инерции тела (см. 4.6).

Окончательно получаем

$$K = \frac{I\omega^2}{2}. \tag{8.13}$$

Таким образом, кинетическая энергия вращающегося твердого тела определяется моментом инерции тела *I* относительно оси вращения и его угловой скоростью *w*. Уравнение (8.13) аналогично формуле (8.11) кинетической энергии при поступательном движении.

Если тело массой *m* вращается относительно оси, проходящей через центр тяжести, с угловой скоростью *w*, а центр тяжести перемещается поступательно с линейной скоростью *v*, то полная кинетическая энергия равна

$$K = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}, \tag{8.14}$$

где *I* – момент инерции тела.

Потенциальная энергия. Связь потенциальной энергии с силами

Потенциальная энергия не связана с механическим движением тела, она определяется взаимодействием тела с другими телами.

Величину, измеряемую работой, которую совершает консервативная сила, переводя систему взаимодействующих тел из состояния с одним их взаимным расположением в состояние с другим расположением, называют потенциальной энергией (П). Для замкнутой системы тел потенциальная энергия является функцией положения (координат) этих тел.

Потенциальной энергией обладают упруго деформированные тела, сжатые газы, тела, поднятые над поверхностью Земли и др.

Значение потенциальной энергии зависит от выбора начала отсчета. Например, в случае системы Земля – материальная точка за начало отсчета была принята земная поверхность, но если в ней имеется яма, то потенциальная энергия тела на дне будет иметь отрицательное значение. Отметим, что, говоря о потенциальной энергии тела, поднятого над Землей, всегда имеют в виду взаимную потенциальную энергию системы тело – Земля при условии, что на поверхности Земли она принимается равной нулю. В ряде случаев за начало отсчета выбирают положение, при котором взаимодействия между телами системы практически отсутствуют, например, когда тела бесконечно удалены друг от друга.

Рассмотрим замкнутую систему из двух взаимодействующих материальных точек *O* и *K*. Совместим с точкой *O* начало прямоугольной системы координат (см рис. 8.1). Тогда положение точки *K* в этой системе отсчета определяется координатами *x, y, z*, а её потенциальная энергия относительно точки *O* будет функцией этих координат: П=П (*x, y, z*).

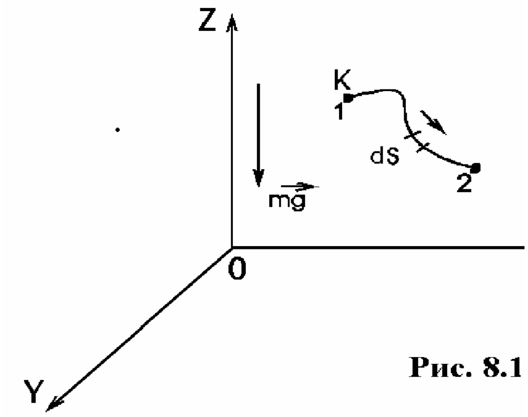

Рис. 8.1

Для движения точки *K* из произвольного положения 1 (x, y, z) в положение 2 (x_2, y_2, z_2) действующая на нее сила со стороны материальной точки *O* должна совершить работу. Эта работа не зависит от формы траектории точки *K*, а определяется только ее начальными и конечным положениями, т.е. изменением ее взаимной потенциальной энергии при переходе из одного положения в другое. Если работа этой силы положительная, то потенциальная энергия уменьшается, и наоборот:

$$\Delta \Pi = \Pi_2 - \Pi_1 = -A_{12}. \qquad (8.15)$$

Таким образом, изменение потенциальной энергии равно взятой с обратным знаком работе, которую совершает консервативная сила, переводя тело из одного положения в другое.

При бесконечно малом перемещении точки *K* на длину отрезка *dS* (рис. 8.1) работа

$$dA = F_s dS,$$

где Fs – проекция силы на направление движения точки *K*. Из формулы (8.15) следует, что эта работа равна – *dП*. Поэтому FsdS=-dП. Отсюда

$$F_s = -\frac{d\Pi}{dS}, \qquad (8.16)$$

т.е. проекция силы на некоторое направление *S* равна взятой со знаком «-» производной от потенциальной энергии по направлению *S*. Величину $d\Pi/dS$ называют производной функции *П=(x, y, z)* по направлению *S*.

Силу $\vec{F}$ можно определить через ее проекции Fx, Fy, Fz на координатные оси:

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} + F_z \vec{K},$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{K}$ - единичные векторы (орты), направленные соответственно по осям *x, y, z*. Для этих проекций силы получаем такие соотношения между силой и потенциальной энергией:

$$F_x = -\frac{\partial G\Pi}{\partial X},\ F_y = -\frac{\partial G\Pi}{\partial y},\ F_z = -\frac{\partial G\Pi}{\partial z} \qquad (8.17)$$

тогда $\vec{F} = -\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \Pi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \Pi}{\partial z}\vec{K}\right).$

Здесь берем частную производную, так как в этом случае приращение получает лишь одна из независимых переменных *(x, y, z)*.

Отметим еще раз, что полная механическая энергия системы тел W равна сумме их кинетической и потенциальной энергии и зависит как от взаимного расположения тел, так и от их скорости:

$$W=K+\Pi.$$

Таким образом, чтобы найти механическую энергию системы, нужно знать значения координат и скоростей, входящих в нее тел.

Механическая энергия лишь один из видов энергии. Полная энергия тела может быть определена по формуле, предложенной Эйнштейном:

$$W=mc^2,$$

где C – скорость света. Это соотношение является универсальным. С его помощью можно определить энергию, связанную с любым видом материи – веществом, полем. С массой покоя m_0 связана наименьшая энергия – энергия покоя:

$$W_0=m_0c^2.$$

Разность $mc^2- m_0c^2$ характеризует кинетическую энергию тела.

Изменение полной энергии тела сопровождается пропорциональным изменением его массы:

$$\Delta W = \Delta mc^2 .$$

Скорости движения макроскопических тел обычно малы по сравнению со скоростью света ($v << c$). Поэтому

$$\frac{mv^2}{2} << mc^2$$

и заметить изменение массы тел при изменении их скорости практически невозможно.

Потенциальная энергия в поле сил тяжести

Формулы (8.17) позволяют рассчитывать потенциальную энергию, если известны силы, действующие на материальную точку и наоборот силы по известной потенциальной энергии.

В нашем случае на точку m действует сила тяжести $\vec{F} = m\vec{g}$. Ее проекция на ось z (см рис. 8.1) равна:

$$F_z = -mg \text{ ; а } F_x = F_y = 0 .$$

Тогда потенциальная энергия точки m

$$\Pi = -\int(-mg)\,dZ = mgZ + C ,$$

где С – постоянная интегрирования (интеграл неопределенный).

Постоянную С определим из соображений, что потенциальная энергия на поверхности Земли равна нулю, т.е.:

$$\Pi = 0 \text{ при } z = 0, \text{ тогда}$$

$$\Pi = mgz = mgh. \qquad (8.19)$$

Таким образом, потенциальная энергия материальной точки в поле сил тяжести зависит от высоты h, на которой она находится над земной поверхностью.

§9 Законы сохранения в механике

Своим происхождением законы сохранения (энергии, импульса и момента импульса) обязаны свойствам симметрии природы. Эти свойства выражаются в неизменности вида физических законов, т.е. в их инвариантности, при определенных преобразованиях. Последние называются преобразованиями фундаментальной симметрии.

Остановимся кратко на их физическом содержании. Симметрия по отношению к сдвигу начала координат, или, как говорят, свойство однородности пространства, означает, что все точки физического пространства эквивалентны. Эта эквивалентность выражается в том, что явление, произошедшее в одной области пространства, повторится без изменений, если будет вызвано в другом месте. При этом необходимо перенести в новое место всю совокупность факторов, обуславливающих данное явление. Именно благодаря однородности пространства можно сравнивать результаты одинаковых экспериментов, поставленных в разных лабораториях. Однородность пространства приводит к закону сохранения импульса.

Симметрия по отношению к сдвигу начала отсчета времени, или свойство однородности времени, проявляется в физической эквивалентности разных его моментов. Разные моменты времени эквивалентны в том смысле, что любой физический процесс протекает одинаковым образом независимо от того, когда он начался. При этом условия, существенные для процесса, в будущем должны быть такие же, как и в прошлом. Например, с точки зрения свойств лазерного пучка безразлично, в какой день и час запустить лазер. Характеристики будут одинаковыми, если только лазер будет работать в одном и том же режиме. Однородность времени приводит к закону сохранения энергии.

Симметрия по отношению к повороту координатных осей, или свойство изотропности пространства, есть физическая эквивалентность разных направлений в пространстве. Она выражается в том, что в повернутом агрегате, установке и т.д. все процессы протекают точно так же, как и до поворота. При этом повороту должно быть подвергнуто все, определяющее течение процесса.

Изотропность пространства, т.е. симметрия по отношению к поворотам, приводит к закону сохранения момента импульса.

Закон сохранения импульса

Вспомним, что импульс тела $\vec{p}$ есть произведение массы тела m на скорость его движения $\vec{v}$:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}.$$

Воздействие тел друг друга приводит к изменению импульса каждого из них. Но в определенных условиях общий импульс системы тел может сохраняться.

Силы, действующие в системе тел, подразделяют на внутренние (силы взаимодействия тел системы между собой) и внешние (силы, действующие на тела системы со стороны тел, на входящих в нее).

Замкнутой называется система тел, если на нее не действуют внешние силы.

Для каждого из N тел некоторой системы изменение его импульса за время dt можно найти по второму закону Ньютона (3.7):

$$d\vec{P}_1 = \left(\vec{f}_1 + \vec{F}_2\right)dt;\ d\vec{P}_2 = \left(\vec{f}_2 + \vec{F}_2\right)dt; \ldots\ d\vec{P}_N = \left(\vec{f}_N + \vec{F}_N\right)dt,$$

где $\vec{f}_1, \vec{f}_2 \ldots$ и $\vec{F}_1, \vec{F}_2 \ldots$ - равнодействующие внутренних и внешних сил для каждого из тел. Сложим векторно левые и правые части всех N равенств. Так как $\sum_1^N \vec{f}_1 = 0$ (по третьему закону Ньютона), то $d\vec{p}_1 + d\vec{p}_2 + \ldots + d\vec{p}_N = d\left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots \vec{p}_N\right) = \sum_1^N \vec{F}_i$.

Для замкнутой системы $\sum_1^n \vec{F}_i = 0$. Поэтому

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots + \vec{p}_N = const. \tag{9.1}$$

Это и есть закон сохранения импульса – суммарный импульс замкнутой системы остается постоянным по модулю и направлению, хотя импульс каждого из тел системы может изменяться.

Строго замкнутых систем в природе не существует, но некоторые системы можно считать практически замкнутыми, если внешние силы малы по сравнении с внутренними. Импульс может сохраняться и для незамкнутых систем, если векторная сумма внешних сил равна нулю.

На основе закона сохранения импульса можно объяснить отдачу оружия при стрельбе, движение ракет и т.д.

Закон сохранения энергии

Если в замкнутой системе действуют только консервативные силы, то работа dA этих сил при изменении конфигурации системы сопровождается изменением кинетической энергии (8.10) и одновременно равным ему по модулю, но противоположным по знаку изменением потенциальной энергии (8.15) системы:

$$dA = dK = -d\Pi .$$

Отсюда $dK + d\Pi = d(K + \Pi) = 0$, или

$$W = K + \Pi = const . \tag{9.2}$$

Полная механическая энергия замкнутой системы тел, в которой действуют только консервативные силы, не изменяется со временем. В этом заключается закон сохранения механической энергии. Значения величин K и Π в отдельности могут изменяться, но их сумма остается постоянной. В таких замкнутых (консервативных) системах происходит лишь превращение потенциальной энергии в кинетическую и наоборот и отсутствует превращение механической энергии в другие виды энергии.

В реальных условиях в любой системе наряду с консервативными действуют также неконсервативные силы (например, силы трения) и полная механическая энергия системы уменьшается, постепенно переходя в другие виды. Изменение механической энергии системы измеряется работой неконсервативных сил, т.е. переходя из положения 1 в 2:

$$\left(K_2 + \Pi_2\right) - \left(K_1 + \Pi_1\right) = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} . \tag{9.3}$$

Так можно записать закон сохранения полной механической энергии в случае действия неконсервативных сил $\vec{F}$.

Закон сохранения момента импульса

Если суммарный момент внешних сил, действующих на тело или систему тел, равен нулю ($\vec{M} = 0$), то из формулы (4.9) следует, что

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \text{ или } \vec{L} = J\vec{\omega} = const . \tag{9.4}$$

Таким образом, если сумма моментов внешних сил равна нулю, то момент импульса систем не изменяется со временем. В этом и состоит закон сохранения момента импульса. Если момент инерции (J) вращающегося тела изменяется, то должна измениться и угловая скорость. Например, фигурист на льду может изменять скорость своего вращения, меняя положение рук и ног, так как сила тяжести вращающегося момента не создает; она приложена к центру масс, через который проходит свободная ось вращения.

Законы сохранения момента импульса, импульса и энергии играют огромную роль в природе и в науке. Они не теряют своего значения и тогда, когда законы Ньютона перестают быть справедливыми. Их можно применять и к обычным телам, и к микрочастицам, и к телам космических размеров. В природе не наблюдается явлений, в которых бы не выполнялся какой-либо из законов сохранения. Универсальность этих законов делает их незаменимыми в решении многих практических и теоретических задач.

§10 Соударения. Потенциальные кривые. Условия равновесия в механике

На основе законов сохранения импульса и энергии можно объяснить поведение тел или частиц при соударениях. Соударяющиеся тела можно считать замкнутой системой, так как возникающие при кратковременном ударе внутренние силы системы во много раз превосходят внешние. Различают упругие и неупругие соударения.

Неупругое соударение

При абсолютно неупругом ударе, когда в результате встречи тела объединяются (прыжок человека в лодку, попадание нейрона в атомное ядро и т.д.) суммарный импульс тел системы сохраняется:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}, \tag{10.1}$$

где $m_1\vec{v}_1$ и $m_2\vec{v}_2$ - импульсы тел до соударения, $(m_1 + m_2)\vec{v}$ - общий импульс после соударения. Если $m_1\vec{v}_1 = -m_2\vec{v}_2$ (встречное движение тел с равными импульсами), то после встречи тела останавливаются ($\vec{v} = 0$). Из этого примера ясно, что при неупругом ударе кинетическая энергия уменьшается (потенциальная энергия не изменится, если тела полностью неупруги) и превращается в другие виды энергии, например, во внутреннюю. Количество механической энергии, перешедшей в другие виды, можно определить из разности энергий до соударения и после соударения:

$$\Delta W = \left(\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}\right) - \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2}. \tag{10.2}$$

Примером неупругого соударения может служить химическая реакция, происходящая при встречи движущихся частиц. Например, при столкновении атома A с молекулой BC, состоящей из атомов B и C, атомы реагирующих веществ могут обменяться местами:

$$A + BC \to B + AC.$$

Из атомов A и C образуется новая молекула AC и атом B становится свободным. Полный импульс этих частиц до реакции и после реакции один и тот же. Разность кинетических энергий частиц до и после столкновения определяет суммарное изменение энергии химических связей в молекулах, принимавших участие в реакции.

При абсолютно упругом ударе (близок к нему удар стальных шаров) тела после соударения полностью восстанавливают свою форму и внутреннюю энергию. Это означает, что суммарная кинетическая энергия тел или частиц при абсолютно упругом ударе не изменяется, а лишь перераспределяется между ними, т.е.:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}, \tag{10.3}$$

где u_1 и u_2 - скорости тел после удара.

При таком соударении выполняется и закон сохранения импульса

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2. \tag{10.4}$$

По этим законам можно определить скорости и кинетические энергии этих тел после соударения.

Потенциальные кривые. Условия равновесия в механике

Выясним общие условия равновесия тела на основе закона сохранения энергии. Полная механическая энергия W тела равна сумме его кинетической и потенциальной энергии W, т.е. W=K+П.

Кинетическая энергия никогда не может принимать отрицательных значений. Если кинетическая энергия равна нулю (К=0), то это значит, что в данной системе W=П и механическая система неподвижна. При движении механической системы её полная энергия больше её потенциальной энергии, т.е. W>П.

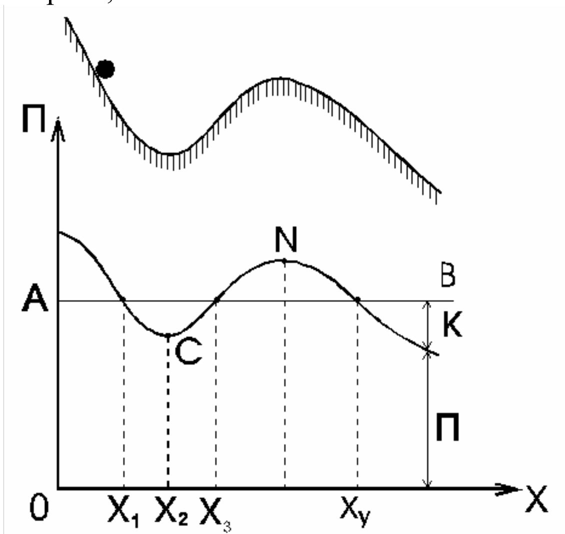

Рис. 10.1

Пусть тело, принимаемое за материальную точку, скользит без трения по поверхности горы, профиль которой показан на рис. 10.1. Направим ось OX горизонтально. В этом случае потенциальная энергия тела как функция координаты X изобразится кривой, повторяющей профиль горы. График потенциальной энергии П (X) называется потенциальной кривой и позволяет судить о характере движения тела. Пусть прямая AB изображает полную энергию тела, тогда из графика можно найти не только потенциальную, но и кинетическую энергию тела. Знание начальных условий и вид потенциальной кривой позволяет сразу же указать характер движения тела. При данном значении полной энергии движение тела на участке $X_3 \le X \le X_4$ невозможно, так как потенциальная энергия не может быть больше полной. Этот участок называют потенциальным барьером. Тело может двигаться либо в пределах от X_1 до X_3, либо при $X>X_4$. При $X_1<X<X_3$ тело движется в так называемой потенциальной яме. Выбраться из неё мешает потенциальный барьер между X_3 и X_4, преодолеть который при данном значении полной энергии тело не может (это колебания атомов в твёрдом теле).

Так как потенциальная энергия – функция только одной переменной (см. рис. 10.1), то согласно (8.17)

$$F_X = -\frac{d\Pi}{dx}.$$

В соответствии с геометрическим смыслом производной, сила характеризуется тангенсом угла наклона касательной к кривой П=П(X). Следовательно, чем круче эта кривая, тем большая сила будет действовать на тело. В точке C, соответствующей минимуму потенциальной энергии (рис. 10.1), касательная горизонтальна и сила равна нулю. Очевидно, что и в точках, соответствующих максимуму на потенциальной кривой, сила также равна нулю (точка N).

Когда тело находится в потенциальной яме в точке C, то при смещении его из этой точки сразу же возникают силы, стремящиеся возвратить тело назад. Поэтому, когда тело находится в потенциальной яме, т.е. его потенциальная энергия минимальна, имеет место состояние устойчивого равновесия тела.

В точках, соответствующих максимуму потенциальной кривой, состояние равновесия тела будет неустойчивым, так как при малейшем смещении тела из таких точек (например, точка N на рис. 10.1) сразу же возникают силы, способствующие дальнейшему движению тела. Если на потенциальной кривой имеется горизонтальный участок, то в точках, соответствующих этому участку, имеет место безразличное равновесие, так как при смещении тела на этом участке силы не возникают.

Таким образом, состояние устойчивого равновесия тела соответствует минимальной потенциальной энергии, а состояние неустойчивого равновесия – максимальной потенциальной энергии тела.

§11 Гироскопы. Гироскопический эффект. Прецессия. Нутация

Гироскопом (или волчком) называют массивное симметричное тело, вращающееся с большой угловой скоростью $\vec{\omega}$ вокруг оси его симметрии. Эту ось мы будем называть осью гироскопа. Обычно гироскоп закрепляют так, что ось гироскопа допускает поворот вокруг трёх взаимно перпендикулярных осей, пересекающихся в его центре масс (гироскоп в карданном подвесе). Таким образом, ось гироскопа может принимать любое направление в пространстве и гироскоп можно рассматривать как твёрдое тело, закреплённая в его центре масс. Особая конструкция опорных подшипников оси гироскопа сводит к минимуму силы трения, действующие на гироскоп, а так как момент силы тяжести относительно его центра масс равен нулю, то в отсутствии каких-либо других внешних сил ось вращающегося гироскопа остаётся неподвижной, т.е. не изменяет ориентации в пространстве. Такой гироскоп с тремя степенями свободы, на который практически не действуют внешние силы, называют свободным.

Из уравнений (9.4, 4.9) следует, что ось гироскопа изменяет своё положение в пространстве только под действием таких внешних сил, момент которых относительно центра масс гироскопа не равен нулю. Если ось гироскопа горизонтальна и на один из её концов действует внешняя сила, направленная, например, вниз, то ось гироскопа будет двигаться, не вниз, а вбок, т.е. будет наблюдаться гироскопический эффект, который проявляется в том, что движение оси гироскопа определяется не направлением внешней силы, а направлением её момента (см. рис. 11.1).

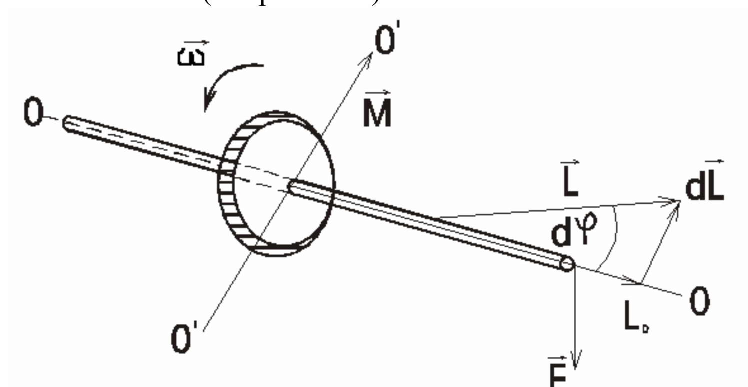

Рис. 11.1

Такое поведение гироскопа полностью соответствует основному закону динамики вращательного движения (4.9). Пусть, например, сила $\vec{F}$, приложенная к концу оси *00* гироскопа, направлена вниз (рис. 11.1). Тогда её момент $\vec{M}$ относительно центра масс гироскопа будет направлен по оси $0'0'$. За промежуток времени dt момент импульса гироскопа получит приращение

$$d\vec{L} = \vec{M}dt .$$

Этот вектор направлен в ту же сторону, что и вектор $\vec{M}$, т.е. перпендикулярно первоначальному направлению момента импульса $\vec{L}_0$. Момент импульса гироскопа теперь уже будет

$$\vec{L} = \vec{L}_0 + d\vec{L},$$

и с его направлением совпадает новое направление оси гироскопа.

Следовательно, ось гироскопа повернётся вокруг оси, перпендикулярно плоскости, в которой расположены векторы $\vec{M}$ и $\vec{L}_0$, так что величина угла между этими векторами уменьшится. При длительном действии на гироскоп постоянного по направлению момента внешних сил ось гироскопа будет поворачиваться до тех пор, пока вектор момента импульса не совпадёт по направлению с вектором момента внешних сил ($\vec{M}$).

При быстром вращении гироскопа, ось гироскопа становится практически нечувствительной к толчкам или ударам. Объясняется это тем, что при кратковременном действии момента внешних сил (удар или толчок) dt весьма мало и поэтому $d\vec{L}$ также мало, т.е. в этом случае ось почти не изменяет своего положения. Заметное изменение её положения происходит лишь при длительном воздействии момента внешних сил.

Когда постоянный по абсолютному значению момент внешних сил сохраняет неизменным своё направление относительно оси гироскопа, то ось его будет поворачиваться в пространстве с постоянной угловой скоростью ω'.

Движение оси гироскопа с постоянной угловой скоростью ω' под действием внешнего момента сил, приложенной к ней, называют прецессией.

Таким образом, прецессия это такое движение, когда гироскоп вращается вокруг своей оси, а сама ось гироскопа в свою очередь поворачивается в пространстве, описывая некую коническую поверхность. Найдём угловую скорость ω' прецессии. Прецессия имеет место, например, тогда, когда на ось гироскопа действует момент силы тяжести $\vec{F} = m\vec{g}$ (рис. 11.1).

Пусть за время dt ось гироскопа повернётся на угол dφ. Момент импульса гироскопа за время dt получит приращение:

$$dL = Mdt.$$

Из рис. 11.1 видно, что угол dφ, как центральный, равен

$$d\varphi = \frac{dL}{L} = \frac{Mdt}{L} \tag{11.1}$$

Разделив выражение (11.1) на время dt и обозначив

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega',$$

получим, что угловая скорость прецессии

$$\omega' = \frac{M}{L} = \frac{M}{J\omega}, \tag{11.2}$$

так как момент импульса гироскопа L=Jω.

Видно, что угловая скорость прецессии тем меньше, чем больше скорость вращения оси гироскопа ω. Характерной особенностью прецессии является то, что она не имеет «инерции» - прецессионное движение прекращается в момент прекращения действия момента силы. Скорость прецессии не зависит от угла наклона гироскопа.

Отметим также, что до тех пор, пока не установится скорость вращения оси гироскопа, равная скорости прецессии, конец оси гироскопа будет описывать циклоиду при прецессии. Такое движение оси гироскопа называют нутацией. Иначе говоря, нутация – это колебательное движение оси гироскопа при прецессии.

Прецессионное движение оси вращения наблюдается у Земли и других планет. Земля имеет форму, несколько отличную от шара, по приближению её можно рассмотреть как шар, имеющий утолщённый пояс у экватора (экваториальный радиус больше полярного). Это приводит к тому, что равнодействующие силы притяжения со стороны Луны и Солнца не проходят через центр масс Земли и, следовательно, создают относительно него моменты сил, стремящиеся повернуть ось вращения Земли. Отметим, что хотя масса Луны много меньше массы Солнца, но она расположена значительно ближе к Земле и поэтому её влияние на вращение Земли больше. Вследствие прецессионного движения оси вращения Земли полюсы описывают полный круг примерно за $2{,}6\cdot10^4$ лет, т.е. за год они перемещаются почти на $50''$.

Так как взаимные расстояния Земли, Луны и Солнца, непрерывно изменяются, а также меняет своё положение плоскость лунной орбиты по отношению к плоскости движения Земли, существуют также небольшие колебательные движения земной оси – нутация. Они приводят к дополнительным смещениям полюсов, достигающим $9''$.

§12 Движение тел в центральном поле тяготения. Космические скорости. Законы Кеплера

Примером центрального поля тяготения может служить поле тяготения, создаваемое материальной точкой (см. §5, 6). К задаче о движении тел в центральном поле тяготения относится, например, изучение движения планет солнечной системы. В этом случае Солнце и планеты можно принимать за материальные точки. Рассматривая движение какой-либо планеты, будем считать, что она движется только под действием сил тяготения (5.1) к Солнцу, пренебрегая при этом влиянием других планет. Это допустимо потому, что масса Солнца почти в 750 раз превышает массу всех вместе взятых планет. Кроме того, можно также пренебречь и силой, с которой рассматриваемая планета притягивает к себе Солнце, потому, что вызываемое ею ускорение Солнца мало. При этих упрощениях задача, по существу, сводится к изучению движения материальной точки (планеты) в поле тяготения, созданном другой неподвижной материальной точкой (Солнцем), т.е. к изучению движения тела, принимаемого за материальную точку в центральном силовом поле.

Итак, пусть материальная точка массы m движется в центральном поле тяготения, созданном телом массы M (M>>m), которое в дальнейшем будем называть центральным телом. Движение будем рассматривать относительно системы отсчёта, связанной с центром поля, т.е. с материальной точкой, принимаемой за центральное тело.

В начале докажем, что в центральном моле по отношению к центру выполняется закон сохранения момента импульса (см. §9). Из определения следует, что сила, действующая на движущуюся в нём материальную точку, всегда проходит через центр поля. Поэтому плечо силы, а следовательно, и момент этой силы относительно центра поля равны нулю. При $\vec{M}=0$ из уравнения (4.9) следует, что вектор момента импульса остаётся постоянным ($\vec{L}=const$). Таким образом, при движении материальной точки в центральном силовом поле по отношению к центру поля всегда выполняется закон сохранения импульса.

Вектор момента импульса, равный (см. 4.8)

$$\vec{L}=\left[\vec{r}\,\vec{p}\right] \qquad (12.1)$$

перпендикулярен плоскости, в которой расположены векторы $\vec{r}$ и $\vec{p}$. Поэтому, когда $\vec{L}=const$, движение материальной точки происходит в одной плоскости, перпендикулярной направлению вектора $\vec{L}$, и эта плоскость не меняет своей ориентации в пространстве. Отсюда следует, что траектория материальной точки, движущейся в центральном поле, является плоской кривой, лежащей в плоскости, проходящей через центр поля.

Вектор момента импульса можно представить как:

$$\vec{L} = m\left[\vec{r}\vec{v}\right] = m\left[\vec{r}\frac{d\vec{r}}{dt}\right] = m\frac{\left[\vec{r}\,d\vec{r}\right]}{dt}, \qquad (12.2)$$

где m – масса материальной точки, $d\vec{r}$ - вектор перемещения её за время dt. Как известно, векторное произведение двух векторов численно равно площади построенного на них параллелограмма.

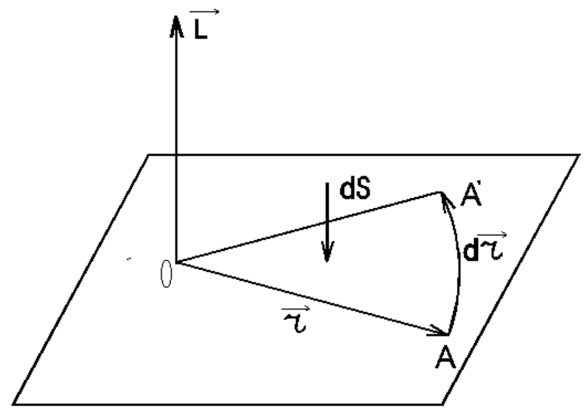

Рис. 12.1

Нетрудно доказать, что площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{r}$ и $d\vec{r}$, с точностью до бесконечно малых второго порядка равна удвоенному значению площади бесконечно узкого сектора OAA' (рис. 12.1), описанного радиус-вектором движущейся точки за время dt. Площадь этого сектора обозначим dS. Тогда значение момента импульса равно

$$L = 2m\frac{dS}{dt}. \qquad (12.3)$$

Величина dS/dt называется секториальной скоростью. Очевидно, что при L=const

$$\frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m} = const, \qquad (12.4)$$

т.е. при движении материальной точки в центральном силовом поле её секториальная скорость постоянна. Из этого следует, что радиус-вектор, проведённый из центра поля к движущейся материальной точке, в равные промежутки времени описывает равные площади. Это утверждение известно как второй закон Кеплера – каждая планета движется так, что радиус-вектор, проведённый из центра Солнца к планете, в равные промежутки времени описывает равные площади и по существу, является следствием закона сохранения импульса.

Первый закон Кеплера – орбиты всех планет – эллипсы, в одном из фокусов которых (общим для всех орбит) находится Солнце.

Третий закон Кеплера – отношение квадратов периодов любых двух планет, обращающихся вокруг Солнца, равно отношению кубов их средних расстояний от Солнца, т.е.

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3, \qquad (12.5)$$

где T_1 и T_2 - периоды обращения – промежутки времени, необходимые для совершения планетой оборота вокруг Солнца, а r_1 и r_2 - средние расстояния от планет до Солнца.

Вид траектории, по которой движется точка в центральном поле тяготения, зависит от её начальной скорости и может быть окружностью, эллипсом, параболой или гиперболой.

Определим сначала скорость, которой должен обладать искусственный спутник, запускаемый с Земли по касательной к земной поверхности (т.е. в горизонтальном направлении), для того чтобы он начал вращаться вокруг Земли по круговой орбите. При этом Землю будем считать неподвижной, а силой сопротивления воздуха пренебрежём.

В первом приближении можно считать, что Земля, как и другие планеты, имеет форму шара и сферически симметричное распределение плотности. При таком условии поле тяготения Земли эквивалентно полю тяготения материальной точки, имеющей массу, равную массе Земли и сосредоточенную в её центре. Двигаясь по круговой орбите, спутник обладает ускорением

$$a_n = \frac{v^2}{r}.$$

Это ускорение обусловлено силой тяготения Земли и может быть выражено так:

$$a_n = g_0 = G\frac{M_З}{R_З^2}.$$

Поэтому

$$\frac{v^2}{r} = G\frac{M_З}{R_З^2}.$$

Считая, что $r \approx R_З$, то

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM_З}{R_З}} \approx 8 км/с. \qquad (12.6)$$

Эта скорость, которую должен иметь спутник, чтобы он начал вращаться вокруг Земли по круговой орбите и её называют первой космической скоростью.

Воспользовавшись формулой (12.6), установим соотношение между радиусом r орбиты и периодом вращения T на ней:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{Gm/r}}, \text{ откуда}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{Gm}r^3,$$

т.е. квадрат периода вращения пропорционален кубу радиуса орбиты.

Таким образом, спутник выводится на орбиту вследствие разгона до достаточно высокой скорости v_1. В случае недостаточной скорости ($v < v_1$), сообщённой спутнику, он упадёт обратно на Землю. Если же приобретённая спутником скорость v слишком велика, то притяжение Земли не сможет удержать его и он покинет его пределы. Такую скорость спутника называют второй космической скоростью. Эту скорость находят из соображений, что кинетическая энергия спутника должна быть больше (равна) потенциальной энергии, т.е.:

$$\frac{mv_2^2}{2} \geq mg_0R_З, \text{ откуда}$$

$$v_2 = \sqrt{2g_0R_З} \approx 11 км/с. \qquad (12.7)$$

Имея такую скорость ракета станет спутником солнечной системы.

Для подсчёта наименьшей скорости, которую должна иметь ракета при запуске с Земли для того, чтобы она могла покинуть солнечную систему, необходимо:

$$\frac{mv_3^2}{2} \geq mg_cR,$$

где R – среднее расстояние от Земли до Солнца, g_c – ускорение на Солнце. Тогда

$$v_3 = \sqrt{\frac{2GM_c}{R}} \approx 42 км/с.$$

Здесь M_c – масса Солнца.

§13 Давление в неподвижных жидкостях и газах. Закон Паскаля. Закон Архимеда

Твёрдое тело сохраняет постоянный объём и форму: причём объём и форму твёрдого тела трудно изменить, даже прикладывая к нему значительную силу.

Жидкости не противостоят направлениям сдвига и не сохраняют определённой формы – они принимают форму сосуда, в котором находятся, но, как и твёрдые тела, жидкости практически не поддаются сжатию, и объём их можно изменить лишь с помощью большой силы.

Газы не обладают ни определённой формой, ни определенным объёмом – они полностью заполняют сосуды, в которые они заключены. Не обладая определённой формой, жидкости и газы способны течь.

Давление – это сила, действующая на единицу площади поверхности в перпендикулярном к поверхности направлении, т.е.:

$$p = \frac{F_{\perp}}{S}. \tag{13.1}$$

Давление – величина скалярная и в данной точке жидкости или газа имеет одинаковое значение при любой ориентации площади, к которой оно отнесено, т.е. давление изотропно.

Идеальная жидкость имеет следующие свойства: 1) отсутствие вязкости 2) абсолютная несжимаемость.

Частицы жидкости могут находиться в равновесии только в том случае, если действующие не неё силы направленные нормально к поверхности жидкости. Поэтому поверхность жидкости в небольшом сосуде горизонтальна. Поверхность жидкости, которая налита в цилиндр, вращаемый вокруг своей оси, приобретает форму параболоида вращения. Поверхность больших водных пространств – морей и океанов – нормальна направлению силы тяжести и поэтому имеет форму эллипсоида.

Так как жидкости и газы обладают только упругостью объёма, то вследствие этого внешнее давление, производимое на жидкость или газ передаётся ими во все стороны равномерно – это и есть закон Паскаля.

Если на поверхность жидкости или газа площадью S_1 действует внешняя сила F_1, то на поверхность площадью S_2 будет действовать сила F_2, причём:

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} = P, \tag{13.2}$$

где P – давление жидкости или газа. Таким образом, внешнее давление на жидкость или газ передаётся во все стороны равномерно.

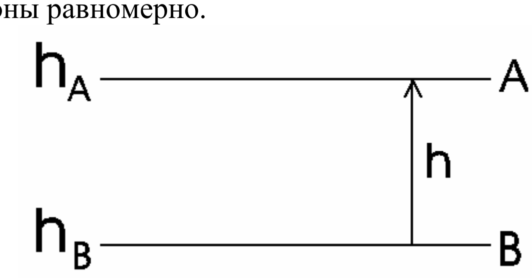

Рис. 13.1

Если однородная жидкость или газ находятся в поле сил тяжести и точка B лежит ниже точки A, то (см. рис. 13,1)

$$p_B = p_A + \rho g(h_A - h_B), \tag{13.3}$$

где P_A и P_B – давления в точках A и B; h_A и h_B – разность высот этих точек. Так как $h = h_B - h_A$ (см. рис. 13.1), то

$$p_B = \rho g h \ . \qquad (13.4).$$

Это давление называют гидростатическим, которое обусловлено весом столба жидкости (газа). Во всех точках покоящейся жидкости (газа), расположенных на одном уровне (на одной высоте), гидростатическое давление одинаково. Оно зависит от плотности и высоты и не зависит от формы сосуда. Этим и объясняется гидростатический парадокс: вес жидкости налитой в нецилиндрический сосуд, не равен силе давления жидкости на дно сосуда.

Гидростатическое давление жидкости на глубине h

$$p = p_0 + \rho g h \ ,$$

где P_o – внешнее давление.

Свободная поверхность однородной жидкости в открытых сосудах, сообщающихся между собой, устанавливается на одном горизонтальном уровне, так как в ином случае жидкость в них не находится в состоянии равновесия.

На тело, погружённое в однородную жидкость (газ), действует выталкивающая сила F_A, направленная вертикально вверх и равная весу вытесненной жидкости (или газа) в объёме погружённой жидкости (газа) – это и есть закон Архимеда.

Если объём вытесненной жидкости (или газа) равен V, а плотность ρ, то:

$$F_A = \rho g V \ . \qquad (13.4)$$

Иначе говоря, тело, погружённое в жидкость (газ), как бы теряет в весе столько, сколько весит вытесненная телом жидкость (или газ).

Выталкивающая сила и вес тела действуют друг другу на встречу. Их разность представляет собой подъёмную силу: если преобладает вес, то тело опускается на дно ($\rho_T \succ \rho_Ж$), если преобладает выталкивающая сила, то тело поднимается на поверхность, т.е., если $\rho_Ж \succ \rho_T$. Условием плавания тела в жидкости является равенство его веса весу, вытесненной им жидкости.

Если жидкость находится в состоянии невесомости, то изменения давления с высотой, обусловленной силой тяжести, исчезает. В этом случае исчезает также весовое давление на стенки и дно сосуда, и выталкивающая сила.

§14 Течение жидкостей и газов. Уравнение Бернулли. Примеры применения уравнения Бернулли. Сила вязкости. Число Рейнольдса. Формула Пуазейля. Формула Стокса

Наука, занимающаяся изучением закономерностей движения жидкостей (газов), называется гидродинамикой.

Рассмотрим течение идеальной жидкости, в которой отсутствуют силы внутреннего трения (вязкости). Дальнейшие результаты будут справедливы и для газов, если скорость течения газа меньше скорости распространения в нём звука ($v_{газа} < v_{звука}$).

Направление скорости в любой точке потока жидкости определяют так называемые линии тока. Линия тока – это такая линия, в каждой точке которой вектор скорости направлен по касательной. Густота проведения линий тока в выбранном масштабе характеризует значение скорости в данном месте, поэтому в тех местах потока, где его скорость меньше, линии тока проходят менее густо, чем там, где скорость больше.

Если скорость потока в каждой точке пространства, занятого жидкостью, не изменяется со временем, то течение жидкости называют стационарным (или установившимся). Линии тока при стационарном течении совпадают с траекториями движения частиц жидкости.

Часть потока жидкости, ограниченная линиями тока, называют трубкой тока. При течении жидкости по трубе трубка тока ограничена стенками трубы.

Течение называют ламинарным, если слои жидкости скользят друг относительно друга, не перемешиваясь. Течение, сопровождающееся образованием вихрей и перемешиванием слоёв, называется турбулентным. Установившееся течение может быть только ламинарным.

При нестационарном течении вектор скорости в каждой точке потока изменяется со временем. Поэтому линии тока в разные моменты времени в нестационарном потоке проходят через разные частицы жидкости и не совпадают с их траекториями.

Уравнение неразрывности струи

Найдём соотношение между величиной сечения потока и скоростью движения жидкости в нём. Для этого выделим в ламинарном стационарном потоке часть трубки тока, ограниченную сечениями S_1 и S_2 (рис. 14.1). Линии тока при стационарном течении совпадают с траекториями движения частиц жидкости, поэтому боковую поверхность трубки тока жидкость не пересекает.

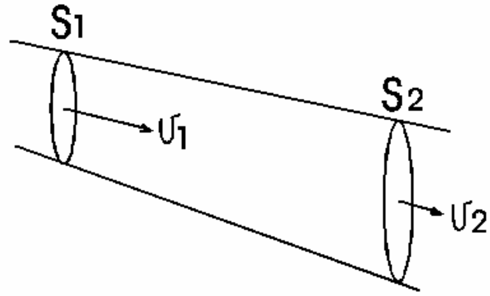

Рис. 14.1

Если за время Δt в трубку тока вошёл объём жидкости V, то такой же объём за такое же время Δt должен выйти из трубки тока. Выберем малый промежуток времени Δt и, будем считать, что вместе с жидкостью передвигаются сечения S_1 и S_2. Тогда они переместятся на расстояния, соответственно равные $l_1 = v_1 \Delta t$ и $l_2 = v_2 \Delta t$.

Переместившиеся объёмы жидкости таковы:

$$V_1 = v_1 \Delta t \cdot S_1 \text{ и } V_2 = v_2 \Delta t \cdot S_2 .$$

Но при этом объёмы одинаковы, т.е. $V_1 = V_2$, поэтому

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 \text{ или } v \cdot S = const . \quad (14.1)$$

Данное уравнение, выведенное для двух сечений потока несжимаемой жидкости, называют уравнением неразрывности струи. Оно показывает, что скорости в потоке жидкости (или газа) обратно пропорциональны сечениям потока. Его называют уравнением неразрывности потому, что оно справедливо для потоков, в которых отсутствуют пустоты.

Таким образом, из уравнения неразрывности следует, что в более узких сечениях трубки тока, скорость должна быть больше, чем в широких сечениях.

Уравнение Бернулли. Давление в потоке жидкости

Рассмотрим ламинарное течение идеальной жидкости по наклонной трубке тока малого сечения (рис. 14.2). Пусть в сечении S_1 давление P_1, скорость v_1 и высота сечения над произвольным уровнем h_1; в выходном сечении S_2 соответственно P_2, v_2, h_2.

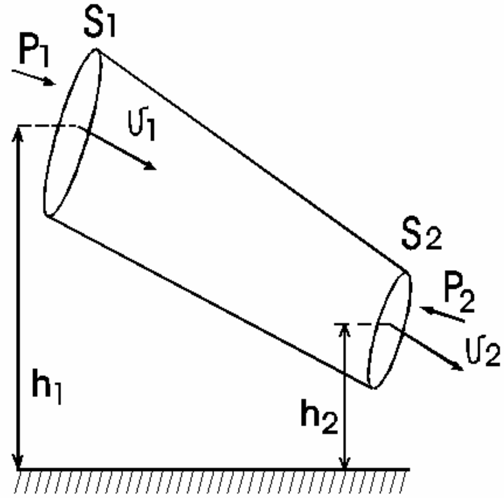

Рис. 14.2

За промежуток времени Δt масса входящей жидкости в сечение S_1 равна массе жидкости, выходящей из сечения S_2.

Масса m жидкости, протекающей через сечение S_1 за время Δt, имеет кинетическую энергию, равную $\frac{m v_1^2}{2}$, и обладает потенциальной энергией mgh_1. В результате действия сил давления (внешние силы) на сечение S_1 и S_2 со стороны слоёв жидкости, находящихся слева от S_1 и справа от S_2 (см. рис. 14.2), производится работа

$$A = p_1 S_1 l_1 - p_2 S_2 l_2 ,$$

где путь l_1 за время Δt равен $l_1 = v_1 \cdot \Delta t$, а путь $l_2 = v_2 \cdot \Delta t$. Следовательно, работа A, совершаемая потоком равна

$$A = p_1 S_1 v_1 \Delta t - p_2 S_2 v_2 \Delta t .$$

Полная энергия потока, протекающего за время Δt через входное сечение S_1, будет

$$W_1 = \frac{m v_1^2}{2} + mgh_1 ,$$

а через сечение S_2

$$W_2 = \frac{m v_2^2}{2} + mgh_2 .$$

Так как жидкость идеальна, то изменение её полной энергии будет равно работе, совершаемой внешними силами, т.е. $\Delta W = \Delta A$.

В нашем случае закон сохранения энергии запишем так:

$$\frac{m v_1^2}{2} + mgh_1 - \frac{m v_2^2}{2} - mgh_2 = p_2 s_2 v_2 \Delta t - p_1 s_1 v_1 \Delta t . \quad (14.2)$$

Согласно уравнению неразрывности (14.1) объёмы, входящие в S_1 за время Δt и входящие через S_2, одинаковы, поэтому можно записать

$$s_1 v_1 \Delta t = s_2 v_2 \Delta t = V .$$

Разделив левую и правую части уравнения (14.2) на V и используя формулу плотности

$$\rho = \frac{m}{V}$$

получаем уравнение Бернулли для двух различных сечений трубки тока

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + P_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + P_2 . \quad (14.3)$$

Так как сечения S_1 и S_2 выбраны произвольно, то можно утверждать, что для любого сечения трубки тока уравнение (14.3) запишем в виде:

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = const\,. \qquad (14.4)$$

Уравнение Бернулли является следствием закона сохранения энергии для установившегося течения идеальной жидкости. Все члены уравнения (14.4) имеют размерность давления. Слагаемое Р называется статическим давлением, pgh – гидростатическим (весовым) давлением, $\frac{\rho v^2}{2}$ - динамическим давлением, а сумма $\frac{\rho v^2}{2} + pgh + p$ - полным давлением.

Если трубка тока стягивается в линию ($S \to 0$), величины v, h и p можно отнести к произвольным точкам одной линии тока. В установившемся потоке идеальной жидкости полное давление постоянно вдоль любой линии тока.

Для горизонтальной трубки тока

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + p_2\,. \qquad (14.5)$$

Динамическое давление $\frac{\rho v^2}{2}$ связано с движением жидкости и проявляется в том случае, если она при встрече с препятствием теряет скорость ($v \to 0$). На неподвижную площадку, перпендикулярную скорости течения, жидкость оказывает давление

$$\frac{\rho v^2}{2} + P\,,$$

а на площадку, ориентированную вдоль линий тока, давление р. Как следует из формулы (14.5), давление р меньше в тех местах, где скорость потока больше (сужение трубки тока). Уменьшение давления в сужении приводит к возникновению всасывающего действия.

Хотя уравнение Бернулли выведено для идеальной жидкости, оно хорошо выполняется и для жидкостей с небольшой вязкостью (вода, ацетон, бензол и др.), а также для газов, когда можно пренебречь их сжимаемостью (при скорости течения, меньшей скорости звука).

Примеры применения уравнения Бернулли

1. Пусть жидкость налита в широкий сосуд, в котором внизу, в боковой стенке, имеется отверстие на расстоянии h от свободной поверхности (рис. 14.3).

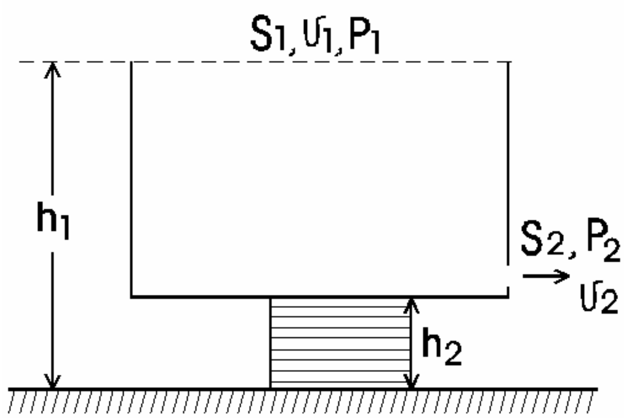

Рис. 14.3

Так как $S_1 \succ\succ S_2$, то $V_1 \succ\succ V_2$ и членом $\frac{\rho v_1^2}{2}$ можно пренебречь. Поскольку $h_1 - h_2 = h$ мало, то давление $p_1 \approx p_2 = p_{am}$. Поэтому уравнение Бернулли (14.3) для рассматриваемого случая запишем в виде

$$\rho g h_1 = \rho g h_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}.$$

Откуда $v_2 = \sqrt{2gh}$. (14.6)

Следовательно, скорость истечения жидкости из малого отверстия будет такой же, как и в том случае, если бы частицы жидкости падали свободно с высоты h и не зависит от сорта жидкости (не зависит от ρ).

2. Измерение скорости потока.

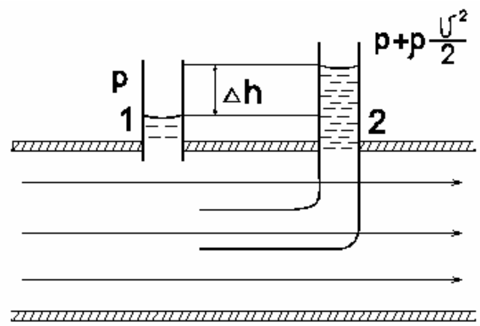

Рис. 14.4

Для определения скорости течения жидкости в поток вводятся две манометрические трубки (рис. 14.4). Статическое давление Р измеряется с помощью трубки 1, отверстие которой расположено параллельно линии тока; полное давление

$$P + \rho\frac{v^2}{2}$$

измеряется с помощью изогнутой трубки 2, отверстие которой обращено навстречу потоку (см. рис. 14.4). По разности Δh уровней жидкостей в манометрических рубках определяют величину

$$\rho g \Delta h = \rho\frac{v^2}{2}.$$

Откуда скорость потока

$$v = \sqrt{2g\Delta h}. \qquad (14.7)$$

3. Расходомер.

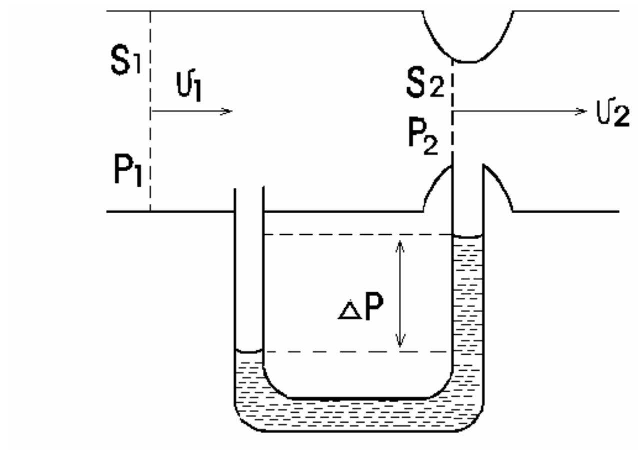

Рис. 14.5

Для определения объёмного расхода $Q = S_1 v_1$ жидкости (газа), протекающего через поперечное сечение S_1 трубы (рис. 14.5), в неё вставляют короткий участок с меньшим поперечным сечением S_2. Применим уравнение Бернулли в виде (14.5), так как $h_1 = h_2$. Тогда перепад давлений

$$\Delta P = \frac{\rho}{2} v_1^2 \left(\frac{v_2^2}{v_1^2} - 1 \right),$$

а с учётом уравнения (14.1)

$$\Delta P = \frac{\rho}{2} \left[\left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2 - 1 \right] v_1^2 .$$

Следовательно, объёмный расход жидкости (газа)

$$Q = S_1 v_1 = S_1 S_2 \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho \left(S_1^2 - S_2^2 \right)}}, \qquad (14.8)$$

где ΔP – разность статических давлений в сечениях S_1 и S_2, измеряется манометром.

Вязкость. Сила вязкости

Течение реальной жидкости по трубе постоянного сечения сопровождается падением статического давления (см. рис. 14.6).

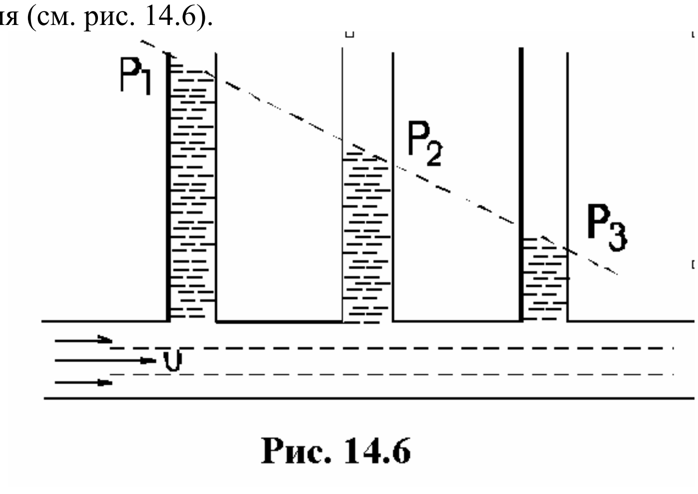

Рис. 14.6

Это явление объясняется наличием у жидкости внутреннего трения (вязкости) и сопровождается переходом части её механической энергии во внутреннюю. При ламинарном течении жидкости по трубе (см. рис. 14.6) скорость слоёв непрерывно меняется от максимальной (по оси трубы) до нуля (у стенок).

Любой из слоёв тормозит движение соседнего слоя, расположенного ближе к оси трубы, и оказывает ускоряющее действие на слой, расположенный дальше от оси.

Между соприкасающимися слоями жидкости действуют тангенциальные силы внутреннего трения. Модуль этих сил зависит от площади S слоёв и градиента скорости $d\nu / dX$ (изменения скорости на единицу длины в направлении, перпендикулярном скорости) и определяется формулой

$$F = \eta \cdot \frac{d\nu}{dX} \cdot S, \qquad (14.9)$$

где η – динамический коэффициент вязкости численно равный силе трения, возникающей между параллельно движущимися слоями жидкости единичной площадки при единичном градиенте скорости.

Коэффициент вязкости различен для разных сред и заметно зависит от температуры. С ростом температуры вязкость жидкости уменьшается, а вязкость газов увеличивается.

Вязкость жидкостей и газов обусловлена происходящими в них молекулярными процессами, и поэтому механизм её возникновения и, в частности зависимость вязкости от температуры рассматриваются в молекулярной физике.

При движении жидкости по трубе вязкость сказывается на быстроте её течения. Приведём без вывода формулу Пуазейля, связывающую объём жидкости протекающий через сечение трубы, с вязкостью жидкости η, длиной l трубы и её радиусом r:

$$V = \frac{(P_1 - P_2)\pi r^4 t}{8\eta l}, \qquad (14.10)$$

где $P_1 - P_2$ - разность давлений на концах трубы, t – время.

Число Рейнольдса

Характер течения вязкой жидкости по трубе радиуса r определяется безразмерным числом Рейнольдса:

$$R_e = \frac{\rho v r}{\eta}, \qquad (14.11)$$

где ρ – плотность жидкости, ν – средняя по сечению скорость её течения. Течение жидкости становится турбулентным, если R_e превышает некоторое критическое значение $R_{екк}$ и скорость ν превышает критическое значение скорости $\nu_{кр}$. При $R_e \prec R_{екр.}$ течение остаётся ламинарным.

При турбулентном течении на образование вихрей тратится дополнительная энергия, и проталкивание жидкости по трубе требует больших затрат энергии, чем при ламинарном течении.

Введя обозначение

$$R_r = \frac{8l\eta}{\pi r^4},$$

можно формулу Пуазейля (14.10) записать в следующем виде:

$$\frac{V}{t} = Q = \frac{P_1 - P_2}{R_2}.$$

Величину R_2 называют гидравлическим сопротивлением. Оно особенно велико для узких труб $\left(R_2 \approx \frac{1}{r^4}\right)$. В этом виде формула Пуазейля аналогична закону Ома для участка электрической цепи. Величина Q является аналогом силы тока, а величина $P_1 - P_2$ - аналогом разности потенциалов.

Движение тел в жидкостях и газах. Сила Стокса

Когда тело движется относительно жидкости (газа), на него действует сила со стороны среды. Эта сила называется силой лобового сопротивления; она возникает благодаря вязкости среды, а также (при больших скоростях) вследствие возникновения турбулентности позади тела.

Для описания движения тела относительно жидкости или газа удобно ввести ещё одно число Рейнольдса

$$R_e' = \frac{vl\rho}{\eta}, \qquad (14.12)$$

где ρ и η – плотность и вязкость жидкости, ν – скорость тела относительно среды, а l – характерная длина тела. Когда число R_e' в рассматриваемом теперь случае меньше единицы (наше рассмотрение связано главным образом с малыми телами), обтекающий тело поток является, по существу, ламинарным; опытным путём установлено, что сила вязкого трения F прямо пропорциональна скорости объекта

$$F = K \cdot r\ .$$

Значение коэффициента К зависит от размеров тела, а также от вязкости жидкости (газа). В частности для сферы радиусом r имеем

$$K = 6\pi r\eta\ .$$

Таким образом, сила вязкого трения, действующая на малое сферическое тело в ламинарном потоке, даётся формулой Стокса:

$$F = 6\pi r\eta v\ . \qquad (14.13)$$

При бóльших значениях числа Рейнольдса (обычно в интервале 1-10) в потоке позади тела возникает турбулентное течение, и для сферы сила лобового сопротивления будет больше, чем это предсказывает формула Стокса (14.13). Однако для обтекаемой формы турбулентность слабее, и, следовательно, сила сопротивления уменьшается. При наличии турбулентности лобовое сопротивление, как показывает опыт, растёт уже пропорционально квадрату скорости ($F \approx v^2$).

Таким образом, лобовое сопротивление увеличивается гораздо быстрее с возрастанием скорости, чем при ламинарном обтекании. Когда число Рейнольдса достигает значения порядка 10^6, лобовое сопротивление резко возрастает; при этом турбулентность возникает не только позади тела, но и в прилегающем к нему слое жидкости (газе) – в так называемом пограничном слое – вдоль всей поверхности тела.

Под осаждением (седиментацией) понимают падение малых тел в жидкой или газообразной среде. Так осаждаются в реке (океане) частицы, образующие данные отложения или красные кровяные тельца в плазме крови при лабораторных исследованиях.

Литература

1. Кучерук І.М. та ін. Загальний курс фізики. Техніка. Т.1, 1999. – 532 с.
2. Айзенцион А.Е. Курс физики. М.: Высшая школа. 1996. – 461 с.
3. Яворский Б.М. и др. Курс физики. В 3-х томах.
4. Рыженков С.Д., Проскуринов Б.В. Гидрофизика. Физика вод и суши, 1988. – 238 с.