

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.Н.КАРАЗИНА

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ
РАБОТ ПО КУРСУ ОБЩЕЙ ФИЗИКИ, РАЗДЕЛ «МЕХАНИКА»**

для студентов биологического,
геолого-географического и
химического факультетов

кафедра общей физики
физического факультета

Харьков – 2004

Составители: проф. Андерс Александр Георгиевич
доц. Палехин Вячеслав Петрович

В методических указаниях приведены описания десяти лабораторных работ по разделу «Механика» курса общей физики. В каждом из них кратко описаны теория изучаемого физического явления, установка и методика проведения эксперимента, сформированы контрольные вопросы, необходимые при подготовке к защите лабораторных работ.

Методические указания предназначены для студентов биологического, геолого-географического и химического факультетов.

Рецензент В.Н. Сухов, канд. Физ-мат. Наук, доцент кафедры экспериментальной физики физ. Ф-та ХНУ имени В.Н. Каразина.

Содержание

Общие положения	4
Цикл 1. Динамика вращения твердого тела	4
Кинематические характеристики вращательного и поступательного движения	4
Момент силы	5
Работа	6
Кинетическая энергия. Момент инерции	7
1.5. Расчет моментов инерции тел	7
1.6. Уравнение движения	9
1.7. Момент импульса. Закон сохранения момента импульса	9
1.8. Основные формулы и характерные величины, описывающие вращательное и поступательное движения	9
Работа 1. Изучение законов вращательного движения тел с помощью маятника Обербека	10
Работа 2. Измерение момента инерции тела неправильной геометрической формы	11
Работа 3. Определение моментов инерции тел методом трифилярного подвеса	13
Работа 4. Определение момента инерции и силы трения в опорах махового колеса	16
Цикл 2. Упругие свойства твердых тел	18
1.1. Виды деформаций	18
1.2. Природа упругих сил	18
1.3. Деформации одностороннего растяжения	19
1.4. Закон Гука. Модуль Юнга	20
1.5. Упругая энергия при деформации растяжения	21
1.6. Коэффициент поперечного сжатия. Коэффициент Пуассона	21
1.7. Деформация сдвига	21
1.8. Упругая энергия при деформации сдвига	22
1.9. Пределы упругости и прочности	23
1.10. Неоднородные деформации	23
Работа 5. Исследование деформации растяжения металлических проволок	25
Работа 6. Определение модуля кручения и модуля сдвига металлической проволоки методом крутильных колебаний	26
Цикл 3. Гармонические колебания. Волны	28
3.1. Гармонические колебания	28
3.2. Гармонический осциллятор	28
3.3. Энергия системы, совершающей гармонические колебания	29
3.4. Волны. Продольные и поперечные волны. Уравнение волны	29
3.5. Плоские волны. Сферические волны	30
3.6. Скорость распространения волн в упругих средах	31
3.7. Наложение волн. Интерференция. Когерентные волны. Условие максимума и минимума интерференции	32
3.8. Стоячие волны	34
Работа 7. Определение скорости звука методом интерференции	35
Цикл 4. Затухающие колебания	37
4.1. Дифференциальное уравнение затухающих колебаний и его решение	37
4.2. Характеристики затухающих колебаний: коэффициент затухания, логарифмический декремент затухания, добротность	39
Работа 8. Изучение характеристик механических затухающих колебаний	40
Цикл 5. Гравитационное поле Земли. Сила тяжести. Ускорение силы тяжести.	41
Маятники	41
5.1. Гравитационное поле Земли. Сила тяжести. Ускорение силы тяжести	41
5.2. Маятники	45
Работа 9а. Изучение характеристик силового поля на примере гравитационного поля Земли	47
Работа 9б. Определение ускорения силы тяжести с помощью физического маятника	49

Общие положения

Следует помнить, что лабораторные занятия, являясь одним из основных видов учебной работы, проводятся с целью помочь студентам познать сущность физических явлений, глубже осознать физические законы, ознакомиться с основными методами физического эксперимента, овладеть элементарными практическими навыками, необходимыми для дальнейшей самостоятельной работы, научиться обрабатывать экспериментальные результаты.

К выполнению лабораторных работ студенты должны тщательно готовиться. При подготовке необходимо:

изучить теорию исследуемого явления по учебнику, конспекту и описанию, которое выдает преподаватель;

кратко законспектировать содержание работы, математические выводы, зарисовать аккуратно и разборчиво схему установки и заготовить таблицу для занесения результатов эксперимента (в специальной тетради-лабораторном журнале).

Если в процессе самостоятельной подготовки окажутся какие-либо невыясненные вопросы, студент может обратиться за помощью к преподавателю или лаборанту.

Перед выполнением лабораторной работы студент представляет лабораторный журнал с кратким конспектом выполняемой работы, излагает ее содержание и получает допуск.

Приступая к выполнению лабораторной работы, необходимо проверить наличие всех приборов и принадлежностей, указанных в описании работы. Искать недостающие принадлежности и брать их с других мест категорически запрещается. Обращаться с приборами следует осторожно и бережно. Если при этом будет обнаружена какая-либо неисправность, необходимо сообщить преподавателю или лаборанту.

После ознакомления с установкой можно приступить к выполнению работы.

Результаты измерений, вычислений и другие величины, которые требуются в работе (даны на рабочих местах), записываются в таблицу в одной системе единиц.

Студенты, приступившие к выполнению лабораторной работы, должны установить и записать абсолютные погрешности всех измеряемых величин, а затем рассчитать ошибки, пользуясь указаниями, которые описаны на лабораторных планшетах.

Работа считается выполненной в том случае, если преподаватель даст положительную оценку полученным результатам. После этого все приборы необходимо привести в исходное состояние, полученные для работы принадлежности сдать лаборанту, привести в порядок свое рабочее место.

Студенты, явившиеся на лабораторное занятие без конспектов описаний в лабораторных журналах или выявившие при опросе полное непонимание работы, к выполнению ее не допускаются.

Выполненная и оформленная лабораторная работа должна быть защищена. Время для защиты назначает преподаватель. При подготовке к защите лабораторных работ надо пользоваться контрольными вопросами.

Цикл 1. Динамика вращения твердого тела

Кинематические характеристики вращательного и поступательного движения

Приступая к выполнению лабораторных работ данного цикла, необходимо вспомнить, что вращательное движение – это движение, при котором все точки тела описывают окружности, центры которых лежат на одной прямой, называемой осью вращения. Разные точки вращающегося тела, описывая окружности разного радиуса, за одно и то же время проходят разные пути, следовательно, они движутся с разными скоростями, их ускорения также различны. Для описания вращения вводят угловые характеристики движения: угловое перемещение, угловую скорость, угловое ускорение. Эти величины одинаковы для всех точек тела.

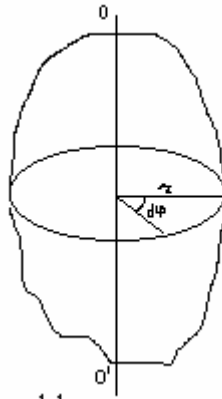


Рис. 1.1

Угловым перемещением называют угол поворота тела. Если тело за время dt поворачивается на угол $d\varphi$, то радиус-вектор каждой его точки, т.е. вектор, проведенный из центра соответствующей окружности в данную точку (рис. 1.1), также поворачивается на этот же угол. Угловая скорость численно равна угловому перемещению за единицу времени:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad (1.1)$$

Иначе говоря, угловая скорость есть первая производная от углового перемещения по времени. Угловая скорость представляет собой осевой вектор, направленный вдоль оси вращения. Его направление определяется правилом правого винта: если направление вращения головки винта совпадает с направлением вращения тела, то поступательное движение винта указывает направление вектора $\vec{\omega}$.

Угловое ускорение β – это изменение угловой скорости в единицу времени:

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad (1.2)$$

Выражение (1.2.) означает, что угловое ускорение есть первая производная от угловой скорости по времени или же вторая производная от углового перемещения по времени. Угловое ускорение – осевой вектор. Направление векторов $\vec{\omega}$ и $\vec{\beta}$ совпадают при ускоренном вращении и противоположны при замедленном вращении.

Линейные скорости и ускорения точек тела возрастают с удалением от оси вращения. Для произвольно выбранной точки (рис.1.1) линейная скорость

$$v = \frac{ds}{dt} = r \frac{d\varphi}{dt} = r\omega \quad (1.3.)$$

Здесь учли, что длина дуги $S = r \cdot \varphi$ (см. рис. 1.1). Линейная скорость v может изменяться как по величине, так и по направлению. Поэтому вводят ускорения: тангенциальное

ускорение (характеризует быстроту изменения скорости по величине): $a_\tau = \frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} = r \cdot \beta$

(1.4.) и нормальное ускорение – центростремительное (характеризует быстроту изменения скорости по направлению);

$$a_n = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 \quad (1.5) \text{ и в векторном виде: } \vec{a}_n = \frac{v^2}{r} \vec{n} \quad (1.6), \text{ где } n \text{ – нормаль к вектору}$$

скорости \vec{v} в данной точке траектории.

Момент силы

Как показывает опыт, при вращательном движении определяющими факторами являются: не величина силы, а точка ее приложения, не величина массы тела, а как эта масса распределена по объему тела. Величиной, характеризующей действие силы на вращающееся тело и учитывающей эти факторы, является момент силы (вращающий момент).

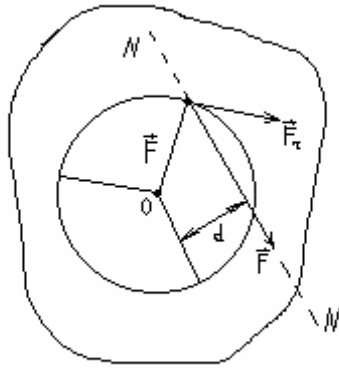


Рис. 1.2.

Пусть твердое тело вращается вокруг закрепленной оси под действием силы \vec{F} , расположенной в плоскости, перпендикулярной оси вращения (на рис. 1.2 точка O – след оси вращения). Вызвать вращение или изменить его скорость может лишь сила, момент которой относительно данной оси отличен от нуля. Модуль M момента силы \vec{F} относительно некоторой оси равен произведению модуля F силы на плечо d этой силы (плечо – это кратчайшее расстояние между осью вращения и линией действия силы NN').

$$M = d \cdot F \quad (1.7).$$

Силу \vec{F} разложим на составляющие – тангенциальную \vec{F}_τ и нормальную \vec{F}_n . Отличной от нуля момент имеет только сила \vec{F}_τ (ее плечом является радиус r окружности). Поэтому

$$M = r \cdot F_\tau \quad (1.8).$$

Момент силы – осевой вектор, его направление определяется правилом правого винта. Момент пары сил (совокупности двух антипараллельных сил, одинаковых по модулю) равен произведению модуля одной из сил пары на плечо d пары. Вектор \vec{M} момента пары сил перпендикулярен плоскости, в которой расположены силы.

В общем виде, моментом силы относительно оси z называют векторное произведение

$$\vec{M}_z = [\vec{r}_\perp \vec{F}_\perp] \quad (1.9)$$

Здесь \vec{r}_\perp – радиус-вектор, \vec{F}_\perp – составляющая силы \vec{F} , лежащая в плоскости, перпендикулярной оси Z . Величина вектора M равна

$$M_z = r_\perp F_\perp \sin \varphi, \quad (1.10)$$

где φ – угол между направлениями радиус-вектора \vec{r}_\perp и составляющей \vec{F}_\perp силы \vec{F} .

Работа

Работа, выполняемая силой \vec{F} при бесконечно малом угловом перемещении $d\varphi$ тела, равна:

$$dA = Md\varphi \quad (1.11)$$

где M – момент силы \vec{F} . Докажем это.

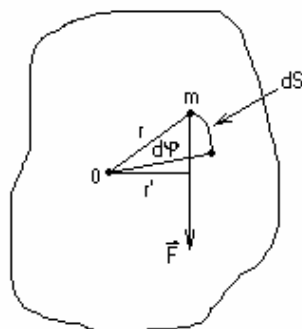


рис. 1.3

Пусть на расстоянии r от оси вращения на твердое тело действует сила \vec{F} , неизменная по величине и направлению (рис.1.3). Ось вращения перпендикулярна плоскости чертежа. Под влиянием этой силы точка m твердого тела за время dt прошла дугу dS . Тогда работа силы \vec{F} за время dt

$$dA = FdS \cos \alpha,$$

где α – угол между силой \vec{F} и хордой dS . Опустим из точки O перпендикуляр r' на вектор силы \vec{F} (или на ее продолжение). Длина этого перпендикуляра, как следует из рис 1.3, $r' = r \cos \varphi$. С другой стороны $dS = rd\varphi$, где $d\varphi$ - центральный угол, соответствующий дуге dS , поэтому $dA = Fr'd\varphi$.

Выражение rF называется моментом силы M относительно оси вращения. Итак, имеем:

$$dA = Md\varphi,$$

т.е. работа силы F в данном случае измеряется произведением момента этой силы на угол поворота.

Если тело поворачивается на конечный угол φ , то, суммируя элементарные работы, можно записать

$$A = M \cdot \varphi.$$

Кинетическая энергия. Момент инерции

Если тело вращается вокруг закрепленной в пространстве оси, его кинетическая энергия поступательного перемещения равна нулю. Однако, поскольку все его точки движутся, описывая окружности, каждая из них обладает кинетической энергией, связанной с вращением.

Кинетическая энергия вращающегося тела равна сумме кинетических энергий всех его точек. Разобьем тело на бесконечно большое количество малых объемов, каждый из которых можно считать материальной точкой, тогда

$$E_k = \sum_i \frac{\Delta m_i V_i^2}{2}, \quad (1.12)$$

где Δm_i - масса i -го элементарного объема; V_i - линейная скорость его движения.

Поскольку $V_i = \omega r_i$, то, подставляя скорость в (1.12), получим

$$E_k = \sum_i \frac{\Delta m_i \omega^2 r_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_i \Delta m_i r_i^2, \quad (1.13),$$

где r_i - расстояние от оси вращения до Δm_i .

Произведение массы i -го элементарного объема на квадрат его расстояния от оси вращения называют моментом инерции материальной точки относительно данной оси, т.е.

$$\Delta I_i = \Delta m_i r_i^2 \quad (1.14).$$

Величина I , равная сумме произведений элементарных масс на квадраты их расстояний от некоторой оси, называется моментом инерции тела относительно данной оси:

$$I = \sum_i \Delta I_i = \sum_i \Delta m_i r_i^2 \quad (1.15).$$

Тогда кинетическая энергия вращающегося тела, как следует из уравнения (1.13),

$$E_k = \frac{I\omega^2}{2}. \quad (1.16)$$

1.5. Расчет моментов инерции тел

Момент инерции является физической величиной, характеризующей инертность вращающегося тела. Согласно данному выше определению, момент инерции тела $I = \sum_i \Delta m_i r_i^2$ или точнее пределу, к которому стремится сумма при $\Delta m_i \rightarrow 0$, т.е. интегралу, взятому по всему объему тела,

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta m_i r_i^2 = \int_v dm \cdot r^2 \quad (1.17).$$

Для тел правильной геометрической формы момент инерции может быть сравнительно легко вычислен, для тела произвольной формы измерен (см. работы 2,3).

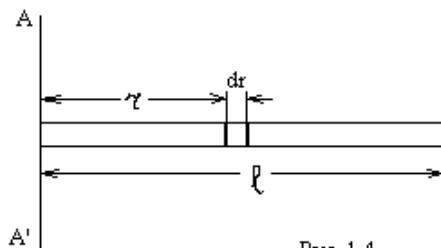


Рис. 1.4.

Рассмотрим в качестве примера момент инерции однородного тонкого стержня относительно оси, проходящей через один из его концов перпендикулярно стержню (ось AA' на рис. 1.4). Разобьем мысленно стержень на ряд участков малой длины Δr_i . Согласно (1.14), момент инерции одного из таких участков

$\Delta I_i = \Delta m_i r_i^2 = \rho S \Delta r_i r_i^2$, где Δm_i - масса i-го участка равна $\rho S \Delta r_i$; ρ - плотность материала стержня.

Для всего стержня $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \rho S \Delta r_i r_i^2 = \int_0^l \rho S r_i^2 dr = \frac{\rho S l^3}{3}$, где l - длина стержня. Поскольку

$$\rho S l = m - \text{масса всего стержня, то } I = \frac{ml^2}{3} \quad (1.18).$$

Отметим, что величина момента инерции каждого тела зависит от положения оси вращения. Так как осей вращения можно назвать бесчисленное множество, то и моментов инерции данное тело имеет такое же число. Иначе говоря, момент инерции тела не является «врожденным» его свойством. При вычислении моментов инерции тел часто оказывается полезным использовать теорему Штейнера, которая утверждает, что момент инерции тела относительно произвольной оси AA' (рис. 1.5) равен моменту инерции его относительно оси OO', проходящей через центр инерции тела параллельно данной оси, плюс произведение массы тела на квадрат расстояния между осями, т.е.

$$I_A = I_0 + ma^2 \quad (1.19)$$

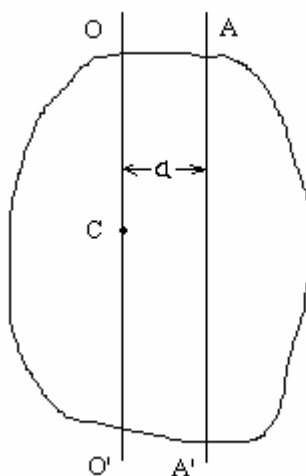


Рис. 1.5.

Так, для рассмотренного выше стержня (см. рис. 1.4.), пользуясь полученным значением момента инерции относительно оси, проходящей через его конец, можно найти момент инерции относительно оси, проходящей через его середину (центр инерции стержня),

$$I_0 = I_A - ma^2 = \frac{ml^2}{3} - m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{12} \quad (1.20)$$

1.6. Уравнение движения

Уравнение, описывающее поступательное движение, на основании второго закона Ньютона имеет вид

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \quad (1.21)$$

Для вращающегося тела основной закон динамики и уравнение движения можно записать, воспользовавшись законом сохранения энергии: работа dA , совершаемая за бесконечно малое время dt внешними силами, идет на увеличение кинетической энергии вращающегося тела ($dE=dA$). Так как $E_k = \frac{I\omega^2}{2}$ (см. 1.16.), то $dE_k = I\omega d\omega$, но $dE_k = dA$, поэтому $I\omega d\omega = dA$ (согласно 1.11). Разделим левую и правую части этого уравнения на dt и учтем (1.1) и (1.2), после сокращения на ω получим

$$I\vec{\beta} = \vec{M} \quad (1.22)$$

Это и есть второй закон Ньютона для вращающегося тела. Он выражает связь между угловым ускорением тела $\vec{\beta}$ и моментом действующих на него сил \vec{M} . В дифференциальной форме (1.22) переписывается

$$I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M} \quad \text{или} \quad I \frac{d^2 \vec{\varphi}}{dt^2} = \vec{M} \quad (1.23)$$

Таким образом, угловое ускорение, приобретаемое телом, пропорционально моменту сил, действующих на тело и обратно пропорционально моменту инерции тела.

1.7. Момент импульса. Закон сохранения момента импульса

Запишем уравнение движения – основной закон динамики для вращающегося тела - в виде

$$I \frac{d^2 \vec{\omega}}{dt^2} = \vec{M}.$$

Так как для заданной оси вращения $I = \text{const}$, то $\frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = \vec{M}$ (1.24)

Произведение $I\vec{\omega} = \vec{L}$ называют моментом импульса тела относительно заданной оси вращения.

Если момент внешних сил, действующих на тело, равен нулю ($\vec{M} = 0$), то из (1.24) следует

$$\frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = 0 \quad \text{и} \quad I\vec{\omega} = \text{const}, \quad (1.25)$$

т.е. момент импульса тела остается постоянным. Сказанное и является утверждением закона сохранения момента импульса. Это значит, что угловая скорость вращающегося тела не может измениться, если действующий на него момент внешних сил равен нулю. В частности, тело не может начать вращаться, если на него не подействуют извне силы, создающие вращающий момент.

1.8. Основные формулы и характерные величины, описывающие вращательное и поступательное движения

Поступательное движение

перемещение $d\vec{r}$

линейная скорость $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

Вращательное движение

угловое перемещение $d\vec{\varphi}$

угловая скорость $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$

$$\text{ускорение } \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

масса m

сила \vec{F}

импульс $m\vec{v}$

Кинетическая энергия

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

Работа

$$dA = \vec{F}d\vec{r}$$

Второй закон динамики, уравнение движения

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$$

Законы сохранения

импульса

$$\sum_i m_i v_i = const$$

$$\text{если } \vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = 0$$

$$\text{угловое ускорение } \vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}$$

момент инерции I

момент силы $|\vec{M}| = Fr_0$

момент импульса $I\vec{\omega}$

$$E_k = \frac{I\omega^2}{2}$$

$$dA = Md\varphi$$

$$I\vec{\beta} = \vec{M}$$

$$I \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2} = \vec{M}$$

момента импульса

$$\sum_i I_i \vec{\omega}_i = const$$

$$\text{если } \vec{M} = \sum_i \vec{M}_i = 0$$

Работа 1. Изучение законов вращательного движения тел с помощью маятника Обербека

Маятник Обербека состоит из двух скрещенных стержней, которые могут вращаться относительно оси, проходящей через их середину. По стержням можно перемещать и закреплять на разных расстояниях от оси четыре груза равной массы m . На шкив, находящийся на той же оси, намотана нить. Вся система приводится во вращение падающим грузом m_1 , который привязан к концу нити.

Во время падения груза m_1 на него действует две силы: сила тяжести $m_1\vec{g}$ и сила натяжения нити \vec{T} . Их равнодействующая сообщает грузу ускорение \vec{a} :

$$m_1 a = m_1 g - T \quad (1.26)$$

Сила натяжения T приводит во вращение систему стержней с грузами, если обозначить их момент инерции I , на основании второго закона Ньютона для вращающихся тел можно записать уравнение движения в виде:

$$I\beta = TR_1 \quad (1.28)$$

Угловое ускорение β вращающейся части системы и линейное ускорение груза связаны соотношением

$$\beta = \frac{a}{R_1} \quad (1.29)$$

Тогда, решая уравнения (1.26), (1.28), (1.29), получаем

$$\left(m_1 + \frac{I}{R_1^2}\right)a = m_1 g \quad \text{и} \quad a = \frac{m_1 g}{m_1 + \frac{I}{R_1^2}} \quad (1.30)$$

Ускорение падающего груза можно найти, измеряя высоту h , с которой тело падает, и время падения t ,

$$h = \frac{at^2}{2} \quad \text{и} \quad a = \frac{2h}{t^2} \quad (1.31)$$

Учитывая (1.6) из (1.5), получаем

$$I = \frac{m_1 R_1^2 (gt^2 - 2h)}{2h} \quad (1.32)$$

Таким образом, момент инерции системы можно определить экспериментально на основании законов движения тел. С другой стороны, тот же момент инерции состоит из момента инерции крестовины $I_{кр}$ и цилиндрических грузов на ней $I_{гр}$, т.е. $I = I_{кр} + I_{гр}$

Учитывая (1.14) и (1.20), можно записать

$$I = 2 \frac{m_0 l^2}{12} + 4mx^2, \quad (1.33)$$

где m_0 - масса одного стержня, l – его длина, x – расстояние от оси вращения до середины цилиндрического груза на стержнях, считающиеся материальными точками. Все данные о стержнях и грузах имеются на рабочем месте.

Выполнение работы

Закрепив цилиндрические грузы на стержнях непосредственно у шкива, наматывают нить виток к витку в один слой на шкив, поднимая груз m_1 на некоторую высоту h . Опускают груз m_1 и измеряют время его падения t . Опыт повторяют не менее трех раз и определяют среднее время падения груза с высоты h . Рассчитывают моменты инерции системы по формулам (1.32) и (1.33), предварительно измерив x .

Затем передвигают цилиндрические грузы m на конец стержней и повторяют измерения и расчеты.

Результаты опытов и расчетов заносят в таблицу.

Контрольные вопросы

1. Схема установки и последовательность выполнения данной работы.
2. Что называют моментом инерции материальной точки, тела? Какими единицами он измеряется? Зависит ли величина момента инерции от выбора оси вращения?
3. Рассчитайте момент инерции однородного стержня относительно оси, проходящей через один из его концов перпендикулярно стержню. Сформулируйте теорему Штейнера.
4. Выведите окончательную формулу для экспериментального момента инерции системы стержней и грузиков. (1.33)
5. Почему наблюдается наилучшее совпадение экспериментальных результатов моментов инерции с теоретическими при положении грузиков на концах стержней?
6. Дайте определение основных кинетических и динамических характеристик вращательного движения и сопоставьте их с аналогичными характеристиками поступательного движения. Укажите размерности этих величин.
7. Как зависит время падения груза от положения грузиков на стержне и от диаметра шкива?
8. Вычислите относительную и абсолютную погрешности, запишите окончательный результат опытов с учетом абсолютной погрешности.

Работа 2. Измерение момента инерции тела неправильной геометрической формы

Момент инерции тела неправильной геометрической формы можно определить, измеряя период крутильных колебаний, совершаемых им относительно заданной оси. Если металлический диск, жестко связанный с проволокой, на которой он подвешен (рис. 1.6.), повернут на некоторый угол φ , вместе с диском закрутится и проволока. При этом в ней возникнут упругие силы, создающие вращающий момент M . Согласно закону Гука момент M будет пропорционален углу закручивания φ и смещению, т.е. момент M стремится вернуть систему в равновесное положение ($M \sim \varphi$) или

$$M = -D\varphi, \quad (1.34)$$

где D – коэффициент пропорциональности, называемый модулем кручения. Его величина определяется свойствами материала проволоки и зависит от ее длины и поперечного сечения (см. описание к работе 6). Модуль кручения, как следует из (1.34), численно равен моменту упругих сил, возникающих при закручивании проволоки на угол, равный единице ($\varphi=1$ радиану).

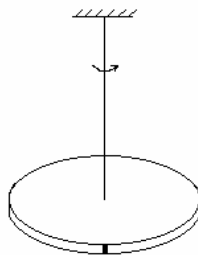


Рис. 1.6

Если диск отпустить, он начнет совершать крутильные колебания относительно вертикальной оси. При малых углах φ крутильные колебания можно считать гармоническими и тогда дифференциальное уравнение движения диска запишется на основании (1.23) и с учетом (1.34) в следующем виде:

$$I_0 \ddot{\varphi} = -D\varphi,$$

где I_0 - момент инерции диска; $\ddot{\varphi} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \beta$ - его угловое ускорение.

Это уравнение можно переписать так:

$$\ddot{\varphi} + \frac{D}{I_0} \varphi = 0.$$

Решение его будет иметь вид: $\varphi = \varphi_0 \cos(\sqrt{\frac{D}{I_0}}t + d_0)$, если частота гармонических колебаний $\omega = \sqrt{\frac{D}{I_0}}$, а период

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{D}}. \quad (1.35)$$

Если наложить на диск тело, момент инерции которого нужно определить, то период крутильных колебаний T_0 изменится, так как изменится момент инерции системы (1.35). Он станет равным сумме $I_0 + I$, где I – момент инерции исследуемого тела. Теперь период крутильных колебаний диска, нагруженного исследуемым телом, $T = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + I}{D}}$, (1.36)

Модуль кручения D не меняется, поскольку его величина определяется лишь упругими свойствами проволоки. Решая уравнения (1.25) и (1.36) для искомого I , получаем

$$I = I_0 \frac{T^2 - T_0^2}{T_0^2} \quad (1.37)$$

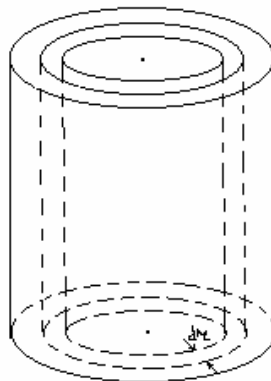


Рис. 1.7

Момент инерции диска I_0 можно рассчитать. Диск (рис. 1.7.) представляет собой систему вложенных друг в друга тонкостенных цилиндров. Все точки каждого из таких цилиндров отстоят от оси вращения на одинаковом, равном радиусу цилиндра, расстоянии. Момент инерции i -го цилиндра

$\Delta I_i = \Delta m_i r_i^2 = 2\pi r_i h \rho r_i^2 \Delta r_i$, где r_i - радиус i -го цилиндра; h - высота диска; ρ - плотность материала диска, Δr_i - толщина i -го цилиндра.

Момент инерции всего диска найдем интегрированием по всем цилиндрам (1.17):

$$I_0 = \int_0^R h \rho 2\pi r^3 dr = \frac{2\pi R^4 \rho h}{4} = \frac{mR^2}{2} \quad (1.38)$$

где $m = \pi R^2 \rho h$ - масса диска; R - его радиус.

Выполнение работы

Измеряют периоды колебаний диска T_0 и диска с телом T , определяя при помощи секундомера продолжительность 20÷30 колебаний в одном и другом случае. Закручивать систему следует на небольшой угол. Момент инерции диска рассчитывают по формуле (1.38).

Все данные о диске имеются на рабочем столе. Зная I_0 , T_0 и T , находят момент инерции тела по (1.37).

Результаты опытов и расчетов заносят в таблицу.

Контрольные вопросы

1. Схема установки и последовательность выполнения работы.
2. Рассчитайте момент инерции однородного диска относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр.
3. Дайте определение крутильных колебаний. Чему равен период таких колебаний? Сформулируйте закон Гука.
4. Физический смысл коэффициента упругости, его размерность.
5. Выведите окончательную формулу для экспериментального определения момента инерции тела неправильной формы. (1.37)
6. Вычислите относительную и абсолютную погрешности, запишите окончательный результат опытов с учетом абсолютной погрешности.

Работа 3. Определение моментов инерции тел методом трифилярного подвеса

Прибор для определения моментов инерции тел методом трифилярного подвеса представляет собой круглую платформу P , подвешенную на трех симметрично расположенных нитях, закрепленных у краев платформы, как показано на рис. 1.8. Наверху эти нити также симметрично укреплены на неподвижном диске P' несколько меньшего диаметра, чем диаметр платформы P .

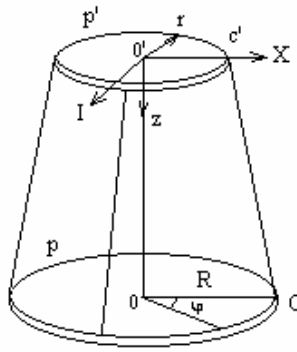


Рис. 1.8

Если повернуть платформу P относительно диска P' вокруг вертикальной оси OO' на некоторый угол φ , возникает момент сил, стремящийся вернуть платформу P в положение равновесия. В результате платформа начнет совершать крутильные колебания относительно вертикальной оси, перпендикулярной ее плоскости и проходящей через ее центр, т.е. оси OO' . Центр тяжести платформы при этом будет перемещаться вдоль оси вращения.

Если пренебречь трением, то на основании закона сохранения энергии для колеблющейся платформы можно записать следующее уравнение:

$$\frac{I\omega^2}{2} + mg(Z_0 - Z) = E, \quad (1.39)$$

где I – момент инерции платформы; ω – ее угловая скорость; m – масса платформы; g – ускорение свободного падения; Z_0 – координата точки O' при $\varphi=0$; Z – координата точки O' при $\varphi \neq 0$; E – полная энергия платформы.

Из уравнения (1.39) следует, что, зная величина ω , Z и E , можно определить момент инерции платформы.

Однако ω и Z меняются со временем и измерить их для определения заданного момента времени сложно.

Уравнение (1.39) можно преобразовать так, что измерение необходимых для подсчета момента инерции величин значительно упрощается. Покажем это.

Совместим с точкой C' систему координат (рис. 1.8).

Координаты точки C' в этой системе равны $r, 0, 0$, а точки C – $R\cos\varphi, R\sin\varphi, z$, если платформа повернута на угол φ .

Расстояние между точками C и C' равно l (длина нити) и не меняется с изменением угла φ , т.е. при движении платформы, следовательно, в любой момент времени

$$(R\cos\varphi - r)^2 + R^2\sin^2\varphi + z^2 = l^2 \quad (1.40)$$

При условии, что углы φ – невелики, можно принять $\cos\varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}$. Тогда из уравнения (1.40) получаем соотношение, связывающее z и φ . Приведем соответствующие преобразования:

$$\begin{aligned} R^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) - 2Rr(1 - \frac{\varphi^2}{2}) - r^2 + Z^2 &= l^2; \\ Z^2 &= l^2 - (R-r)^2 - Rr\varphi^2 = Z_0^2 - Rr\varphi^2; \\ Z_0^2 &= l^2 - (R-r)^2; \\ Z &= Z_0\sqrt{1 - \frac{Rr\varphi^2}{Z_0^2}} = Z_0(1 - \frac{Rr\varphi^2}{Z_0^2})^{1/2} = Z_0 - \frac{Rr\varphi^2}{2Z_0} \end{aligned} \quad (1.41)$$

При вычислении корня в (1.41) пользуются формулой приближенного счета $(1 + \alpha)^n = 1 + n\alpha$, которая справедлива при условии, что $\alpha \ll 1$. Это значит, что для прибора должно выполняться условие $Rr\varphi^2 \ll 2Z_0$.

Подставив (1.41) в (1.39), получим

$$\frac{I\omega^2}{2} + mg \frac{Rr\varphi^2}{2Z_0} = 0 \quad (1.42)$$

Продифференцируем (1.42) по времени и сократим на ω :

$$I\omega \frac{d\omega}{dt} + mg \frac{Rr}{Z_0} \varphi \frac{d\varphi}{dt} = 0$$

Откуда,

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mgRr}{Z_0I} \varphi = 0 \quad (1.43)$$

где $\frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \beta$ - угловое ускорение платформы.

Полученное уравнение (1.43) является уравнением гармонических колебаний (см. цикл 2).

Коэффициент при φ в уравнении (1.43) $\sqrt{\frac{mgRr}{Z_0I}}$ есть циклическая частота крутильных колебаний платформы P , откуда период ее колебаний

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{Z_0I}{mgRr}} \quad (1.44)$$

Момент инерции платформы из (1.44)

$$I = \frac{mgRr}{4\pi^2 Z_0} T_1^2 \quad (1.45)$$

Формула (1.45) позволяет вычислить момент инерции платформы, если известны характерные для прибора величины m , R , r , Z_0 и измерить T_1 .

Если на платформу поместить исследуемое тело, момент инерции которого нужно измерить, то для платформы с телом формула (1.45) переписется:

$$I + I_{\text{тела}} = \frac{m + m_{\text{тела}}}{4\pi^2 Z_0} gRrT_2^2 \quad (1.46)$$

где $I + I_{\text{тела}}$ - момент инерции системы, состоящей из платформы и тела; $m + m_{\text{тела}}$ - масса системы.

Решая (1.45) и (1.46) совместно, для искомого $I_{\text{тела}}$ получим:

$$\begin{aligned} \frac{mgRr}{4\pi^2 Z_0} T_1^2 + I_{\text{тела}} &= \frac{mgRr}{4\pi^2 Z_0} T_1^2 + \frac{m_{\text{тела}}}{4\pi^2 Z_0} gRrT_2^2 \\ I_{\text{тела}} &= \frac{gRr}{4\pi^2 Z_0} [m_{\text{тела}} T_2^2 - m(T_1^2 - T_2^2)] \end{aligned} \quad (1.47)$$

Выполнение работы

Величины m , R , r и Z_0 являются постоянными прибора, поэтому для определения $I_{\text{тела}}$ необходимо изменить только периоды колебаний платформы T_1 и платформы с телом T_2 . Для этого сообщают платформе вращательный импульс и при помощи секундомера измеряют продолжительность некоторого числа (~ 10) полных колебаний, находят T_1 .

Затем платформу нагружают исследуемым телом, которое предварительно взвешивают, и вновь определяют период колебаний T_2 .

По формуле (1.47) находят момент инерции исследуемого тела. Результаты опытов и расчетов заносят в таблицу.

Контрольные вопросы

1. Схема установки и последовательность выполнения данной работы.

2. Под действием какой силы трифилярный подвес совершает крутильные колебания?
3. Каков максимально допустимый угол поворота платформы? В чем отличие крутильных колебаний от колебаний физического маятника?
4. Дайте определение момента инерции материальной точки, тела. От чего зависит величина момента инерции?
5. Выведите формулу для момента инерции платформы и для исследуемого тела. (1.47)
6. Вычислите относительную и абсолютную погрешности, запишите окончательный результат опытов с учетом абсолютной погрешности.

Работа 4. Определение момента инерции и силы трения в опорах махового колеса

Маховое колесо – это массивное тело вращения в виде колеса или диска, симметрично расположенное относительно оси вращения. Оно обладает тем большей инерцией вращения, чем больше его момент инерции.

Цель работы – определение величины момента инерции махового колеса и сил трения в его опорах.

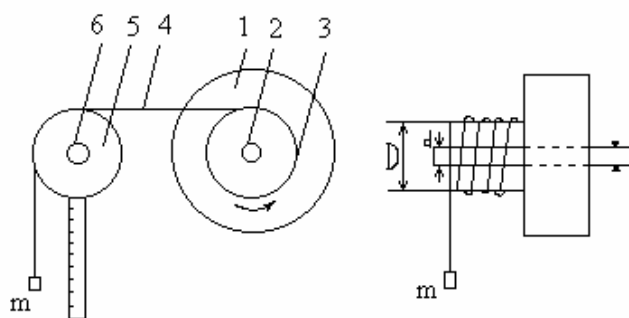


Рис. 1.9

Схема установки изображена на рис. 1.9. Маховое колесо 1 насажено на вал 2. Здесь же закреплен шкив 3, на который наматывается нить 4. Нить переброшена через невесомый блок 5, посаженный на вал 6. Диаметры шкива 3 и блока 5 одинаковы, одинаковы и диаметры валов 6 и 2. К концу нити крепится груз массой m .

Если предоставить грузу возможность опускаться, то маховое колесо придет в движение. Груз m до полного разматывания нити проходит расстояние h_1 , при этом потенциальная энергия системы уменьшается на величину $E_{h_1} = mgh_1$. Эта энергия переходит в кинетическую энергию опускающегося груза и вращающегося колеса I , а часть ее расходуется на выполнение работы по преодолению сил трения в опорах. Закон сохранения энергии для момента, когда груз проходит нижнее положение, можно записать:

$$mgh_1 = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} + A_1 \dots \quad (1.48)$$

Здесь v – линейная скорость падающего груза; I – момент инерции вращающихся частей системы; ω – угловая скорость вращения; A_1 – работа, совершаемая силами трения.

Работа сил трения может быть подсчитана как произведение силы трения на перемещение $S_1 = \pi dn$:

$$A = FS_1 = F\pi dn_1 \quad (1.49)$$

где d – диаметр вала 2; n_1 – число его оборотов, которое он делает при раскручивании нити на длину h_1 .

Нить намотана на шкив диаметром D , поэтому число оборотов n_1 можно найти из соотношения

$$n_1 = \frac{h_1}{\pi D} \quad (1.50)$$

Для работы A_1 получаем выражение

$$A_1 = F\pi dn_1 = F \frac{d}{D} h_1$$

Соотношение, выражающее закон сохранения энергии (1.48), переписывается:

$$mgh_1 = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} + F \frac{d}{D} h_1 \quad (1.51)$$

Достигнув наиболее низкого положения, груз m не останавливается. Вращаясь по инерции, маховое колесо поднимает груз снова на высоту $h_2 < h_1$. В этот момент груз останавливается ($v = 0$), а энергия системы за вычетом затраченной на работу против сил трения снова переходит в потенциальную энергию груза m , поднятого на высоту h_2 , $E_{h_2} = mgh_2$.

При подъеме груза работа по преодолению сил трения подсчитывается тем же способом, что и при его опускании,

$$A_2 = F\pi dn_2 = F \frac{d}{D} h_2 \quad (1.52)$$

Убыль потенциальной энергии будет равна соответственно полной работе по преодолению сил трения:

$$E_{h_1} - E_{h_2} = A_1 + A_2 = mg(h_1 - h_2) = F \frac{d}{D} (h_1 + h_2), \text{ отсюда}$$

$$F = \frac{mg(h_1 - h_2)D}{(h_1 + h_2)d} \quad (1.53)$$

Для расчета момента инерции воспользуемся уравнением (1.48). Скорости v и ω можно определить из следующих соображений. Движение груза происходит под действием постоянных сил, следовательно, оно является равноускоренным. Скорость, которую груз приобретает, падая с высоты h_1 , равна $v = at$, время падения t можно найти из соотношения $h_1 = \frac{at^2}{2}$. Отсюда $t = \sqrt{\frac{2h_1}{a}}$ и $v = \frac{2h_1}{t}$.

Угловая скорость вращения шкива, на который намотана нить, а значит, и махового колеса

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{2v}{D}$$

Подставив эти значения v и ω , а также A_1 в (1.48), после простых преобразований получим момент инерции махового колеса

$$I = \frac{mD^2}{4} \left[gt^2 \frac{h_2}{h_1(h_1 + h_2)} - 1 \right] \quad (1.54)$$

Примечание. Маховое колесо приводится в движение при помощи нити, переброшенной через дополнительный легкий блок 5 (рис. 1.9). При движении груза вращается не только маховое колесо, но и блок, силы трения действуют не только в опоре колеса, но и в блоке. При расчете пренебрегаем наличием дополнительного блока, так как масса и силы трения в его опоре малы.

Выполнение работы

Зафиксировав вертикальное положение груза h_1 с помощью шкалы, отпускают его, давая возможность ему падать. С помощью секундомера измеряют время падения груза, включая секундомер в момент начала его движения и выключая в момент прохождения наиболее низкого положения.

Определяют максимальную высоту последующего поднятия груза h_2 .

Подставив полученные значения h_1 , h_2 и t в формулы (1.53) и (1.54), находят момент инерции вращающейся части системы I и силу трения в ее опорах F .

Результаты опытов и расчетов заносят в таблицу.

Контрольные вопросы

1. Схема установки и последовательность выполнения данной работы.
2. Выведите формулу для расчета силы трения в опорах махового колеса и его момента инерции. (1.53 и 1.54)
3. Как изменяется угловая скорость маховика в зависимости от величины его момента инерции?
4. Как определяется ускорение груза массы m ?
5. Запишите уравнение движения груза m и махового колеса.
6. Вычислите относительную и абсолютную погрешности, запишите окончательный результат опытов с учетом абсолютной погрешности.

Цикл 2. Упругие свойства твердых тел

Приступая к выполнению работ данного цикла, необходимо вспомнить, что все тела способны деформироваться, т.е. изменять свою форму или объем под действием приложенных к ним внешних сил.

1.1. Виды деформаций

Тела, в которых после прекращения действия внешних сил деформация полностью исчезает и первоначальная форма и объем тела восстанавливаются, называют упругими, а саму деформацию – упругой.

Тела, которые после прекращения действия внешних сил не восстанавливают свою первоначальную форму и объем, называют неупругими или пластичными, соответственно их деформацию – неупругой или пластической.

1.2. Природа упругих сил

При деформации тел в них возникают внутренние силы, препятствующие деформации. Эти силы обусловлены силами взаимодействия между частицами (атомами, молекулами, ионами), из которых состоит тело, и являются электрическими по своему происхождению. Между частицами действуют как силы притяжения, так и силы отталкивания. При определении расстояния между частицами силы притяжения и силы отталкивания уравновешивают друг друга, что и соответствует равновесному состоянию тела.

На рис. 2.1. изображен вид зависимости потенциальной энергии взаимодействия двух частиц от расстояния между ними. Аналитически эта зависимость может быть представлена в виде двух степенных функций:

$$W_n(r) = -\frac{A}{r^m} + \frac{B}{r^n} \quad (2.1)$$

Первое слагаемое описывает энергию притяжения, второе – энергию отталкивания; A и B – положительные константы; m и n – постоянные константы, зависящие от конкретной природы сил взаимодействия. Так, для ионных кристаллов типа NaCl , состоящих из одновалентных ионов, притяжение между ионами представляет собой просто электрическое

кулоновское притяжение и в единицах СИ $A = \frac{l^2}{4\pi\epsilon_0}$.

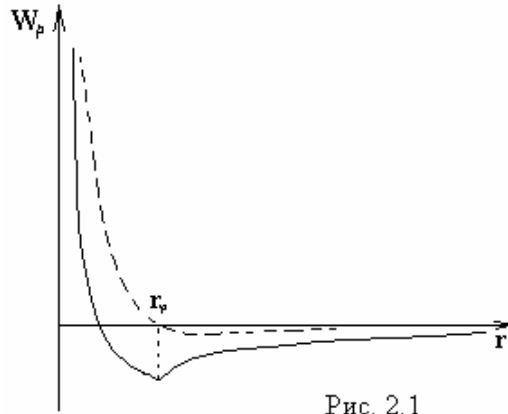


Рис. 2.1

Пунктирная кривая, приведенная на рис. 2.1., изображает зависимость от расстояния силы взаимодействия между частицами, которая связана с энергией соотношением

$$F(r) = -\frac{dW_n(r)}{dr} = -\frac{mA}{r^{m+1}} + \frac{nB}{r^{n+1}} \quad (2.2)$$

Расстояние r_0 (рис. 2.1) является равновесным расстоянием между частицами: при $r > r_0$ производная $\frac{dW_n(r)}{dr}$ - положительна и сила, действующая на частицу, смещенную из положения равновесия,

$$F(r) = -\frac{dW_n(r)}{dr} < 0,$$

т.е. является силой притяжения.

При $r < r_0$ производная $\frac{dW_n(r)}{dr} < 0$, а сила $F(r) > 0$, т.е. является силой отталкивания. В рассмотренных случаях возникающие при смещении частиц силы стремятся восстановить равновесие положения частиц, т.е. препятствуют деформации тела.

Для того, чтобы при $r > r_0$ преобладали силы притяжения, а при $r < r_0$ - силы отталкивания, должно выполняться условие $m < n$.

Выражение (2.1) описывает энергию взаимодействия между двумя частицами. В твердом теле, в котором имеется много атомов, необходимо учесть взаимодействие между данным атомом и всеми другими атомами. В это взаимодействие могут включаться не только ближайшие соседи, но и более отдаленные, поскольку кулоновские силы являются дальнодействующими. В общем случае для потенциальной энергии взаимодействия данного иона со всеми другими ионами можно написать следующее выражение:

$$W_n(r) = -\alpha \frac{A}{r^m} + \beta \frac{B}{r^n}$$

где r – расстояние между ближайшими соседями. Постоянные α и β можно рассчитать для каждой кристаллической структуры.

1.3. Деформации одностороннего растяжения

Различают деформации однородные и неоднородные. При однородных деформациях все элементы тела деформированы одинаково, при неоднородных – по-разному (деформации меняются от точки к точке). К однородным деформациям относятся деформации растяжения (сжатия) и сдвига.

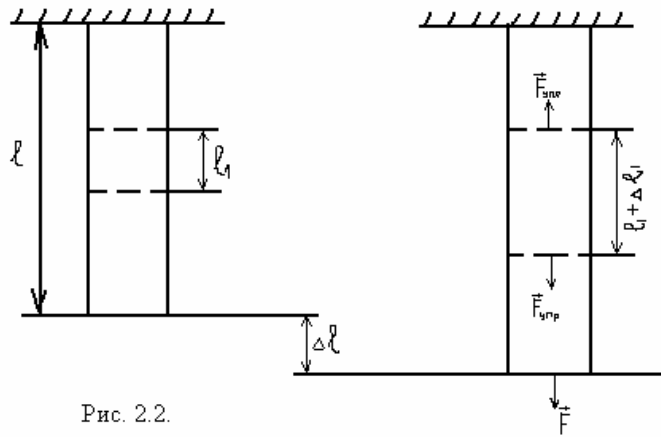


Рис. 2.2.

Деформация одностороннего растяжения возникает, например, в тонком стержне постоянного сечения, один конец которого закреплен, а к другому приложена внешняя сила F , стремящаяся растянуть стержень (рис. 2.2). Характеристиками деформации растяжения являются удлинения: абсолютное $\Delta l = l - l_0$ и относительное

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}. \quad (2.3).$$

Здесь l_0 - первоначальная длина стержня. При равновесии в любом поперечном сечении упругодеформированного стержня действует упругая сила $F_{\text{упр}}$, равная по величине внешней силе, и существует напряжение

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad (2.4)$$

где S – площадь поперечного сечения стержня.

1.4. Закон Гука. Модуль Юнга

В случае упругой деформации напряжение σ является однозначной функцией относительного удлинения ε , которое может быть представлено в виде:

$$\sigma = E\varepsilon + C\varepsilon^2 + D\varepsilon^3 + \dots \quad (2.5)$$

Коэффициенты $E, C, D \dots$ являются постоянными, зависящими только от материала стержня и его физического состояния. Если относительное удлинение ε мало, то высшими степенями его можно пренебречь, тогда

$$\sigma = E\varepsilon \quad (2.6)$$

Полученное соотношение выражает закон Гука: при малых упругих деформациях напряжение пропорционально относительному удлинению. Коэффициент пропорциональности E называют модулем Юнга. Он имеет размерность давления ($\text{Па} = \text{Н} \cdot \text{м}^{-2}$). Если в формуле (2.6) положить $\varepsilon=1$ (что соответствует $\Delta l = l_0$), то $\sigma=E$. Отсюда следует, что модуль Юнга имеет смысл того напряжения, которое нужно приложить к телу, чтобы изменить его длину вдвое, если бы при такой деформации закон Гука еще оставался верным. Недостаток такого определения состоит в том, что при таких больших деформациях закон Гука почти для всех тел становится недействительным: тело либо разрушается, либо нарушается пропорциональность между деформацией и напряжением.

Закон Гука для деформации растяжения можно сформулировать иначе: при малых деформациях относительное удлинение пропорционально приложенному напряжению

$$\varepsilon = \alpha \cdot \sigma \quad (2.7)$$

Здесь α – коэффициент упругости. Это величина, обратная модулю Юнга ($\alpha = \frac{1}{E}$).

Коэффициент упругости численно равен относительному удлинению, вызванному напряжением, равным единице.

1.5. Упругая энергия при деформации растяжения

При деформации тела совершается работа, которая переходит в потенциальную энергию упругодеформированного тела. Если процесс деформации является квазистатическим (медленным), то приобретенная телом упругая энергия вычисляется как полная работа, совершенная при деформации.

При одностороннем растяжении элементарное изменение удлинения стержня

$$dl = l_0 d\varepsilon \quad (2.8),$$

так как $\varepsilon = \frac{l-l_0}{l_0}$.

Соответствующее элементарное приращение упругой энергии стержня

$$dW_{\text{упр}} = Fdl,$$

а учитывая (2.4), (2.6), (2.7), и (2.8), будем иметь

$$dW_{\text{упр}} = Fdl = E\varepsilon V d\varepsilon,$$

где $v = Sl$ – объем образца;

$$W_{\text{упр}} = \int E\varepsilon V d\varepsilon = V \frac{E\varepsilon^2}{2} + const$$

Упругую энергию недеформированного тела можно считать равной нулю ($W_{\text{упр}}(0) = 0$), следовательно, $const = 0$.

Упругая энергия, приходящаяся на единицу объема деформируемого тела, называется плотностью упругой энергии, при одностороннем растяжении или сжатии,

$$\omega = \frac{W_{\text{упр}}}{V} = \frac{E\varepsilon^2}{2} = \frac{\varepsilon\sigma}{2} = \frac{\sigma^2}{2E} \quad (2.9)$$

1.6. Коэффициент поперечного сжатия. Коэффициент Пуассона

Опыт показывает, что деформация одностороннего растяжения сопровождается уменьшением, а деформация одностороннего сжатия – увеличением поперечных размеров тела. Относительное изменение поперечного размера тела

$$\varepsilon_{\text{п}} = \frac{\Delta d}{d} \quad (2.10)$$

называют коэффициентом поперечного сжатия.

Для данного материала отношение поперечного сжатия к относительному удлинению есть величина постоянная:

$$\frac{\varepsilon_{\text{п}}}{\varepsilon} = \frac{\Delta d / d}{\Delta l / l} = \mu. \quad (2.11)$$

Эту безразмерную величину и называют коэффициентом Пуассона.

1.7. Деформация сдвига

Деформацию сдвига можно получать в теле, имеющем форму параллелепипеда, если одну из его граней закрепить, а к другой приложить касательную силу \vec{F} (рис. 2.3).

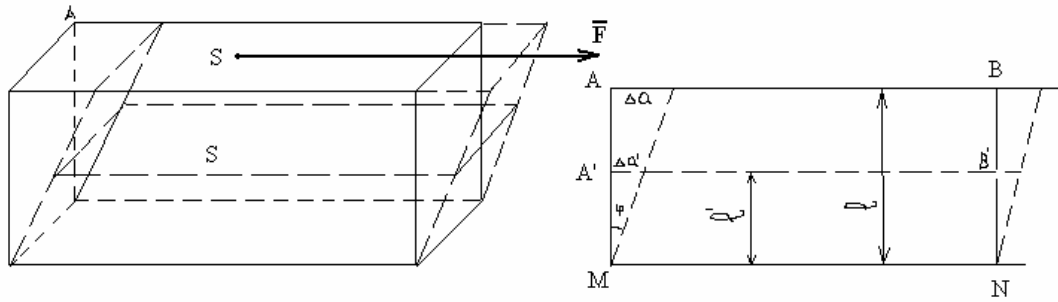


Рис. 2.3

Под действием приложенной силы грань АВ сместится на расстояние Δa , называемое абсолютным сдвигом ее относительно грани MN. При этом объем тела практически не изменится. Все слои тела, параллельные грани АВ, также сместятся в направлении силы F, причем величина абсолютного сдвига каждого из них пропорциональна расстоянию его от неподвижной грани MN и различна для различных слоев.

Отношение абсолютного сдвига Δa к расстоянию между сдвигаемым и неподвижным слоями l называется относительным сдвигом:

$$\gamma = \frac{\Delta a}{l}.$$

Относительный сдвиг одинаков для всех слоев и равен $\operatorname{tg} \theta$ (θ – угол сдвига):

$$\gamma = \frac{\Delta a}{l} = \frac{\Delta a'}{l'} = \dots = \operatorname{tg} \theta$$

При малых деформациях $\operatorname{tg} \theta \approx \theta$ и, следовательно,

$$\gamma = \theta. \quad (2.12)$$

Таким образом, можно утверждать, что относительный сдвиг равен углу сдвига, измеренному в радианах.

При сдвиге в теле возникают упругие силы и касательные напряжения между слоями. Если угол сдвига мал, то деформация сдвига подчиняется закону Гука, т.е. при небольших деформациях упругое касательное напряжение $\tau = \frac{F}{S}$ пропорционально относительному сдвигу:

$$\tau = G\gamma \quad (2.13)$$

где G называется модулем сдвига, он численно равен касательному напряжению, при котором относительный сдвиг равнялся бы единице ($\theta=45^\circ$), если бы при столь больших деформациях не был превзойден предел упругости. Модуль сдвига G, как и модуль Юнга E, имеет размерность давления.

1.8. Упругая энергия при деформации сдвига

Пусть касательная сила F приложена к верхней грани куба с длиной ребра, равной l. При бесконечно малом сдвиге верхняя грань переместится на $dx = l d\theta = l d\gamma$. Совершенная при этом элементарная работа

$dA = F dx = F l d\gamma = \tau S l d\gamma = \tau V d\gamma$, где V – объем куба, τ – касательное напряжение ($\tau = G\gamma$ по закону Гука для деформации сдвига).

Полная работа, совершаемая внешними силами,

$$A = \int \sigma V d\gamma$$

переходит в упругую энергию тела

$$W_{\text{уп}} = \int G \gamma V d\gamma = V \frac{G \gamma^2}{2} + \text{const},$$

где $\text{const} = 0$, если считать упругую энергию недеформированного тела равной нулю. В данном случае плотность упругой энергии

$$\omega = \frac{W_{\text{упр}}}{V} = \frac{G\gamma^2}{2} = \frac{\tau^2}{2G} = \frac{\tau\gamma}{2} \quad (2.14).$$

1.9. Пределы упругости и прочности

Малые упругие деформации любого вида подчиняются закону Гука. Увеличение деформации приводит к невыполнению закона Гука для упругих деформаций и изменению характера деформации.

На рис. 2.4 приведен характерный график зависимости напряжения σ от относительной деформации ϵ в случае одностороннего растяжения тонкого стержня.

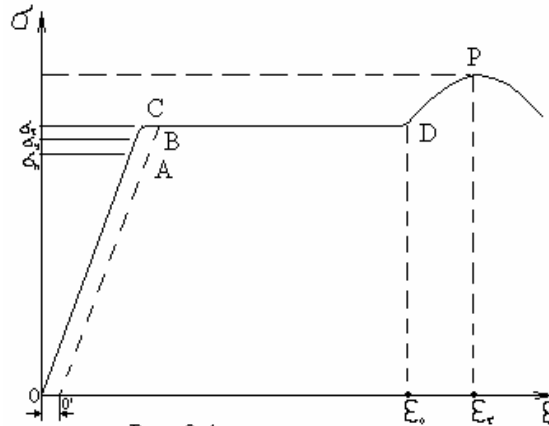


Рис. 2.4

Как видно из графика, линейная зависимость, соответствующая закону Гука, выполняется лишь в определенных пределах изменения деформации ϵ . Предельное значение напряжения, при котором соблюдается линейная зависимость $\sigma(\epsilon)$, называется пределом пропорциональности σ_n .

Деформации могут сохранять упругий характер при напряжениях, превосходящих σ_n .

Предельное значение напряжения, при котором еще не возникают остаточные деформации, называют пределом упругости σ_y . Для всех напряжений, превышающих σ_y , имеют место остаточные деформации. После снятия нагрузки тело возвращается в состояние O с ненулевой деформацией ϵ .

Напряжение σ_T , при котором остаточная деформация достигает условно выбранной величины (около 0,002), называют пределом текучести.

На участке CD деформация возрастает без увеличения напряжения, тело как бы «течет». В области CD наблюдают пластические деформации.

Для деформаций, превосходящих ϵ_0 , упругие силы вновь возрастают.

Максимальное напряжение, возникающее в теле до разрушения, называют пределом прочности $\sigma_{\text{прочн}}$.

Если $\epsilon > \epsilon_F$ упругие силы резко уменьшаются, внешняя сила не уравнивается, тело беспрепятственно растягивается и вскоре разрывается.

1.10. Неоднородные деформации

К неоднородным деформациям относятся деформации кручения и изгиба.

Деформацию кручения испытывает однородный цилиндрический стержень, верхний конец которого закреплен, а к нижнему — приложены силы, создающие вращающий момент относительно оси стержня. Каждый радиус нижнего основания поворачивается при этом на угол ϕ , который называют углом закручивания.

В пределах упругой деформации угол ϕ пропорционален закручивающему моменту M:

$$M = D\phi \quad (2.15)$$

Здесь D – постоянная для данного стержня величина, ее называют модулем кручения, который численно равен моменту сил, закручивающему стержень на угол, равный одному радиану.

Формула (2.15) выражает закон Гука для деформации кручения. В отличие от модуля Юнга E и модуля сдвига G модуль кручения D зависит не только от материала, но и от размеров и формы тела.

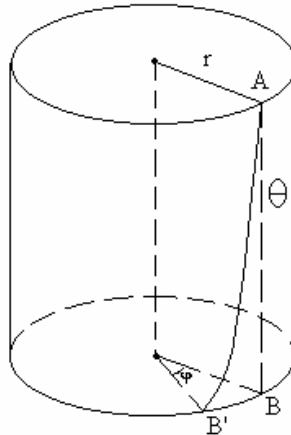


Рис. 2.5

Деформация кручения сводится к деформации сдвига. При закручивании стержня слои, перпендикулярные его оси, испытывают сдвиг относительно друг друга. Образующая цилиндра (рис 2.5) AB поворачивается, принимая положение AB' . Угол $BAB' = \theta$ является углом сдвига для частиц, расположенных на расстоянии r от оси. Из рис. 2.5 видно, что угол сдвига связан с углом закручивания φ соотношением

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{BB'}{AB} = \frac{r\varphi}{l},$$

где l – длина проволоки стержня.

Для малых углов $\operatorname{tg} \theta \approx \theta$, тогда

$$\theta = \frac{r\varphi}{l} \quad (2.16)$$

т.е. угол сдвига тем больше, чем больше расстояние r от оси OO' .

Модуль кручения D связан с модулем сдвига G . Чтобы найти связывающее их соотношение, определим величину момента сил M , который нужно приложить к нижнему концу стержня, чтобы закрутить его на угол φ .

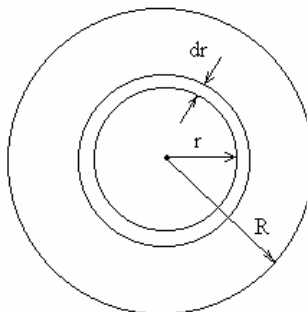


Рис. 2.6

Цилиндрический стержень можно представить состоящим из ряда тонких цилиндрических трубок, вложенных друг в друга (рис. 2.6). Сила, приложенная к нижнему основанию трубки радиуса r , $F(r) = \tau(r)dS$, а ее момент относительно оси OO

$$dM = \tau r dS \quad (2.17)$$

Касательное напряжение $\tau(r) = \frac{dF(r)}{dS}$ вызывает закручивание нижнего основания трубки на угол φ , т.е. сдвиг на угол θ .

Согласно закону Гука,

$$\tau = G\theta \quad (2.18)$$

Подставляя (2.18) в (2.17) и учитывая, что $dS = 2\pi r dr$, получаем

$$dM = \frac{\varphi r}{l} G 2\pi r^2 dr \quad (2.19)$$

Полный момент M , приложенный ко всему нижнему основанию стержня, получим интегрированием (2.19) по всей площади основания, т.е. по кругу радиуса R ,

$$M = \frac{2\pi\varphi G}{l} \int_0^R r^3 dr = \pi R^4 G \frac{\varphi}{2l} \quad (2.20).$$

Таким образом, величина момента, закручивающего стержень, пропорциональна четвертой степени радиуса и обратно пропорциональна его длине. Для закручивания толстых и коротких стержней необходимо прилагать большие усилия. Тонкие длинные проволоки закручиваются под действием малых вращающих моментов. Последним обстоятельством пользуются для создания чувствительных подвесных систем в точных измерительных приборах (например, в гальванометрах), позволяющих измерять малые закручивающие моменты.

Из сравнения (2.20) и (2.15) следует, что

$$D = \frac{\pi R^4 G}{2l} \quad (2.21).$$

Работа 5. Исследование деформации растяжения металлических проволок

В работе исследуется деформация одностороннего растяжения металлических проволок. Измерительная установка схематически изображена на рис. 2.7.

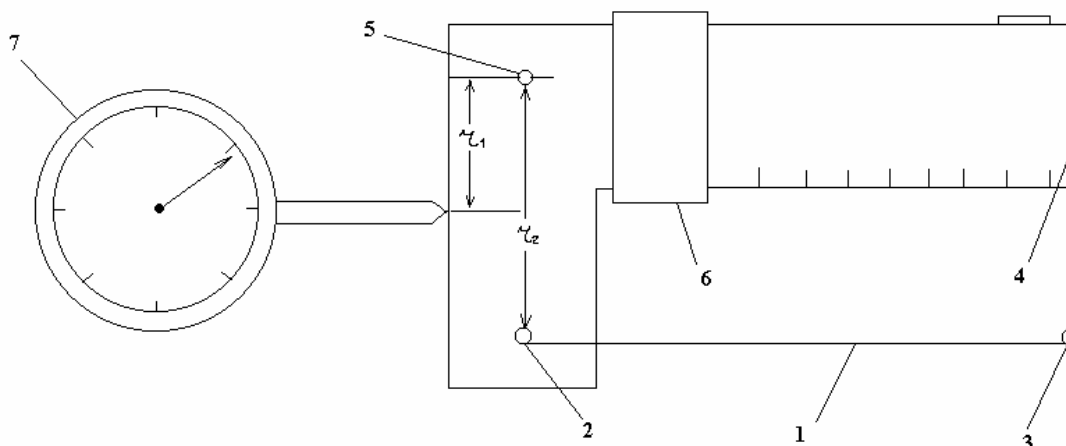


Рис. 2.7

Образец 1 в виде проволоки закрепляется горизонтально в натянутом состоянии между двумя болтами 2,3, к одному из которых прикреплен рычаг 4. Рычаг может поворачиваться вокруг горизонтальной оси 5. На рычаге размещается груз 6, изменяя положение которого, можно изменять приложенное к проволоке растягивающее напряжение.

Перемещение груза на одно деление шкалы вдоль рычага соответствует изменению растягивающей силы на 0,49 Н.

Для определения величины абсолютного удлинения образца служит датчик 7. Острие датчика упирается в плечо рычага, к которому прикреплен подвижный конец образца. Поскольку расстояние точки крепления образца r_2 и острия датчика r_1 от оси вращения

рычага различно, для получения удлинения образца необходимо показания индикатора датчика 7 умножить на коэффициент $k = \frac{r_2}{r_1} = 2,5$.

Выполнение работы

Устанавливают датчик для измерения величины абсолютного удлинения проволоки Δl (цена деления индикатора 1 дел=0,002 мм). Изменяя положение груза, измеряют абсолютную величину удлинения проволоки

$$\Delta l = 0,002 \text{ mm} \cdot x,$$

где x – показания стрелки индикатора датчика и по формуле (2.3) вычисляют относительное удлинение проволоки ϵ .

Также для каждого положения груза на рычаге вычисляют напряжение

$$\sigma = \frac{0,49 \cdot y}{\pi r^2},$$

где 0,49 Н – цена одного деления на рычаге, y – число, указывающее положение груза на рычаге (их от 1 до 25).

Результаты опытов и расчетов заносят в таблицу. Строят график зависимости напряжения σ от относительной деформации проволоки ϵ .

Пользуясь графиком, определяют:

а) модуль Юнга E , который равен тангенсу угла наклона линейного участка графика, т.е.

$$E = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma_{сп}}{\epsilon_{сп}};$$

б) определяют предел упругости σ_y , как максимальное напряжение, после снятия которого остаточные деформации отсутствуют.

Контрольные вопросы

1. Схема установки и последовательность выполнения данной работы.
2. Физическая природа упругих сил. Вид зависимости потенциальной энергии взаимодействия двух частиц от расстояния между ними.
3. Что называют деформацией? Виды деформаций. Деформация одностороннего растяжения. Закон Гука. Физический смысл модуля Юнга, размерность.
4. Упругая энергия при деформации растяжения.
5. Деформация сдвига. Модуль сдвига, физический смысл, размерность. Упругая энергия при деформации сдвига.
6. Какой вид имеет график деформации в случае одностороннего растяжения тонкого стержня? Поясните эту зависимость.
7. Что произойдет с образцом, если величину деформации довести до значения, лежащего в области пластических деформаций, а затем полностью снять нагрузку?
8. Как определяется модуль Юнга в данной работе?
9. Вычислите относительную и абсолютную погрешности, запишите окончательный результат опытов с учетом абсолютной погрешности.

Работа 6. Определение модуля кручения и модуля сдвига металлической проволоки методом крутильных колебаний

Закон Гука для деформации кручения записывается в следующем виде (2.15):

$$M = D\varphi,$$

где M – закручивающий момент, φ – угол кручения, D – модуль кручения – величина момента, вызывающего закручивание на угол, равный 1 радиану.

Для деформации сдвига (2.13) $\tau = G\theta$, где $\tau = \frac{F}{S}$ – касательное напряжение, вызывающее сдвиг; θ – угол сдвига; G – модуль сдвига – величина напряжения, вызывающего сдвиг, равный единице.

Для цилиндрического стержня (проволоки)

$$D = \frac{\pi R^4 G}{2l} \quad (2.22)$$

где l – длина, R – радиус проволоки (2.21).

Выполнение работы

Цель лабораторной работы – измерение модуля кручения металлической проволоки и определение модуля сдвига материала, из которого она изготовлена.

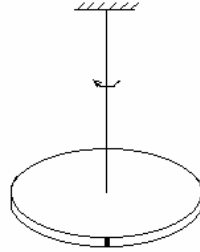


Рис. 2.8

Модуль кручения определяют методом крутильных колебаний. Для этого к исследуемой проволоке прикрепляют тяжелый металлический диск (рис. 2.8), который закручивают на небольшой угол и с помощью секундомера измеряют период возникающих при этом крутильных колебаний T_1 .

Из (1.35) следует, что

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}} \quad (2.23)$$

где I – момент инерции диска, D – момент кручения проволоки.

Если момент инерции диска I известен, D можно определить из (2.23). Если I неизвестен, то на диск накладывают тело, момент инерции которого можно рассчитать (в нашем случае кольцо), и измеряют период колебаний всей системы

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{I + I_k}{D}} \quad (2.24)$$

Решая совместно уравнения (2.23) и (2.24), получают модуль D

$$D = \frac{4\pi^2 I_k}{T_2^2 - T_1^2} \quad (2.25)$$

Момент инерции кольца вычисляют по формуле

$$I_k = \frac{m(R_1^2 + R_2^2)}{2},$$

где m – масса кольца, R_1 и R_2 – внешний и внутренний его радиусы.

Зная D , воспользовавшись (2.22), можно определить модуль сдвига материала проволоки

$$G = \frac{2lD}{\pi R^4}. \quad (2.26)$$

Результаты опытов и расчетов заносят в таблицу.

Контрольные вопросы

1. Схема установки и последовательность выполнения данной работы.
2. Неоднородные деформации. Деформации кручения, модуль кручения, его физический смысл и размерность.
3. Выведите формулу связи модуля кручения с модулем сдвига.
4. Какие формы и размеры тел требуют для закручивания больших усилий?
5. Выведите окончательную формулу для экспериментального определения модуля кручения. (2.26)

6. Вычислите относительную и абсолютную погрешности, запишите окончательный результат опытов с учетом абсолютной погрешности.

Цикл 3. Гармонические колебания. Волны

3.1. Гармонические колебания

Напомним, что если материальная точка движется относительно некоторого положения равновесия O так, что ее расстояние x от точки O в каждый момент t удовлетворяет уравнению

$$x = a \cos(\omega t + \varphi) \quad (3.1)$$

тогда говорят, что она совершает гармонические колебания.

В уравнении приняты обозначения:

x – смещение, a – амплитуда – максимальное смещение; $\omega t + \varphi$ – фаза колебания; φ – начальная фаза – фаза колебания при $t=0$; ω – циклическая частота, $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$.

Циклическая частота показывает, сколько колебаний совершает тело за 2π секунд; ν – частота колебаний, число колебаний за 1 секунду; T – период – продолжительность одного колебания.

Развертка гармонического колебания, т.е. зависимость $x(t)$ представлена на рис. 3.1.

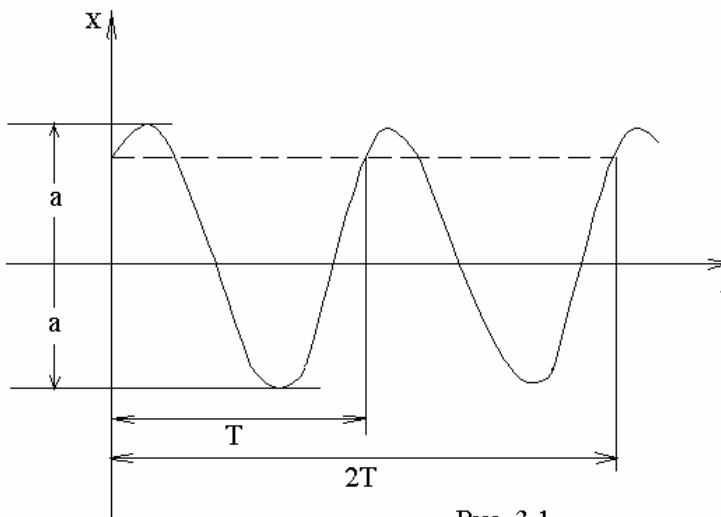


Рис. 3.1

Гармонические колебания тело (материальная точка) совершает, когда на него действует сила F , величина которой пропорциональна смещению x , а направление – противоположно направлению смещения:

$$F = -kx, \quad (3.2)$$

где k – коэффициент возвращающей силы.

Сила F всегда направлена к положению равновесия. Примером таких сил являются силы упругости.

3.2. Гармонический осциллятор

Систему, совершающую гармонические колебания, называют гармоническим осциллятором.

Дифференциальное уравнение, описывающее движение в такой системе, имеет следующий вид:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (3.3)$$

В частности, если на материальную точку массы m действует сила $F = -kx$, уравнение движения ее запишется на основании второго закона Ньютона так:

$$m\ddot{x} = -kx \text{ или } \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0, \quad (3.4)$$

где $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$ - ускорение, приобретаемое материальной точкой m .

Уравнение (3.4) сводится в (3.3), если отношение двух заведомо положительных величин k и m принять равным ω^2 :

$$\frac{k}{m} = \omega^2. \quad (3.5)$$

Уравнение гармонических колебаний (3.1) является решением уравнения (3.3), в чем можно убедиться простой подстановкой.

Уравнение (3.3) – линейное, однородное дифференциальное уравнение второго порядка. Его решение содержит две произвольные постоянные (в (3.1) ими являются a и φ), которые определяются из заданных начальных условий.

Следует обратить внимание на то, что коэффициент при неизвестном в (3.3) есть квадрат собственной циклической частоты данной системы.

3.3. Энергия системы, совершающей гармонические колебания

Энергия гармонического осциллятора складывается из кинетической и потенциальной энергий

$$E = E_{кин} + E_{ном}.$$

Найдем кинетическую энергию материальной точки массы m , движение которой описывается уравнением (3.1),

$$E_{кин} = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{ma^2\omega^2}{2} \sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{ka^2}{2} \sin^2(\omega t + \varphi)$$

Здесь учли, что $k = m\omega^2$ (3.5) и скорость есть первая производная от (3.1) по времени.

Потенциальная энергия, обусловленная действием силы,

$$E_{ном} = -A = -\int_0^x F dx = \int_0^x kx dx = \frac{kx^2}{2} = \frac{ka^2}{2} \cos^2(\omega t + \varphi)$$

Полная энергия системы

$$E = E_{кин} + E_{ном} = \frac{ka^2}{2}, \quad (3.6)$$

(т.е. $E \approx a^2$) полная энергия пропорциональна квадрату амплитуды и не зависит от времени.

3.4. Волны. Продольные и поперечные волны. Уравнение волны

Частицы упругой среды связаны между собой. Вследствие взаимодействия между ними возникающие в среде колебания передаются от одной частицы к другой и распространяются в виде упругой волны. Таким образом, упругие волны – это распространение колебаний в пространстве.

Если колебания частиц происходят в том же направлении, в котором распространяется волна, то ее называют продольной, если же частицы колеблются перпендикулярно направлению распространения, волну называют поперечной. В обоих случаях волна описывается уравнением, которое задает смещение ξ любой колеблющейся точки среды как функцию ее координаты и времени $\xi = \xi(x, t)$.

Запишем уравнение волны, распространяющейся в направлении оси x (рис. 3.2).

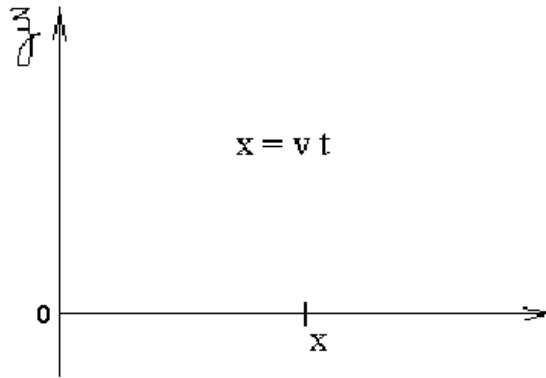


Рис. 3.2

Пусть точка среды, находящаяся первоначально в начале координат O , начнет совершать относительно O колебания, смещение которых $\xi(0, t) = a \cos \omega t$.

В точку с координатой x колебания придут спустя время $\tau = \frac{x}{v}$, где v – скорость, с которой распространяется волновой процесс, т.е. колебания в данной среде. Поэтому смещение точки с координатой x будет описываться уравнением

$$\xi(x, t) = a \cos \omega(t - \tau) = a \cos \omega\left(t - \frac{x}{v}\right). \quad (3.7)$$

Функция $\xi(x, t)$ обладает периодичностью и во времени, и в пространстве.

В любой точке среды x смещения повторяются спустя время, равное $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

В двух точках среды x_1 и x_2 смещения в каждый момент времени будут одинаковыми $\xi(x_1, t) = \xi(x_2, t)$, если

$$\omega\left(t - \frac{x_1}{v}\right) = \omega\left(t - \frac{x_2}{v}\right) + 2\pi.$$

Отсюда $\frac{\omega(x_2 - x_1)}{v} = 2\pi$, а $\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi v}{2\pi v} = \frac{v}{v} = vT = \lambda$.

Минимальное расстояние между двумя точками, колеблющимися одинаковым образом (для которых фазы колебаний отличаются на 2π), называют длиной волны. Она равна расстоянию, на которое распространяется волновой процесс за время, равное одному периоду

$$\lambda = vT. \quad (3.8)$$

3.5. Плоские волны. Сферические волны

Уравнение (3.7) получено при рассмотрении одномерного случая, например, распространения упругих колебаний вдоль натянутого шнура.

Это же уравнение описывает плоскую волну, в которой все точки плоскости, перпендикулярной к направлению распространения волны, колеблются одинаково, т.е. в одинаковой фазе. Геометрическое место точек среды, совершающих колебания в одной фазе, называют волновой поверхностью.

Уравнение плоской волны (3.7) удобно записать так, чтобы переменные t и x входили в него симметричным образом, а именно

$$\xi(x, t) = a \cos \omega\left(t - \frac{x}{v}\right) = a \cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{v}\right) = a \cos(\omega t - kx). \quad (3.9)$$

Здесь $k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$ – модуль волнового вектора $\vec{k} = k\vec{n}$, где \vec{n} – единичный вектор в направлении нормали к волновой поверхности (вдоль оси x). Модуль волнового вектора k называют волновым числом. Оно показывает, сколько длин волн укладывается на отрезке, равном 2π .

Уравнение плоской волны, распространяющейся в произвольном направлении, запишется

$$\xi(\vec{r}, t) = a \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}), \quad (3.10)$$

где \vec{k} - волновой вектор, указывающий направление распространения волны. Из рис. 3.3 видно, что скалярное произведение $\vec{k}\vec{r} = \frac{2\pi}{\lambda}(\vec{n}\vec{r}) = \frac{2\pi r}{\lambda} \cos \theta$ имеет одинаковую величину для всех точек плоскости АВ, перпендикулярной вектору \vec{k} , следовательно, фазы колебаний всех ее точек одинаковы. Плоскость АВ будет волновой поверхностью, как и всякая другая, параллельная ей, плоскость.

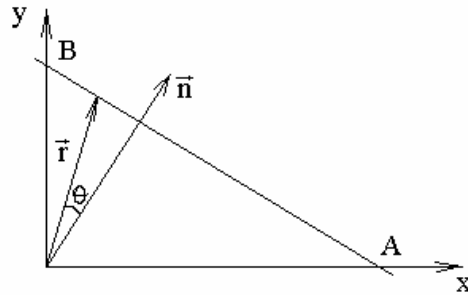


Рис. 3.3

Если источник волны точечный, колебания от него распространяются во все стороны, волновые поверхности в этом случае (сферы и волны) называют сферическими. Уравнение сферической волны имеет вид:

$$\xi(\vec{r}, t) = \frac{a}{r} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}). \quad (3.11)$$

Фаза колебаний меняется с расстоянием от источника так же, как в одномерной или плоской волне, а амплитуда убывает обратно пропорционально расстоянию от источника r . Это обусловлено тем, что энергия, которую несет волна, распределяется по все увеличивающимся поверхностям. Площадь их растет пропорционально квадрату расстояния от источника, следовательно, энергия, приходящаяся на единицу площади, убывает пропорционально r^2 . Поскольку энергия $\approx a^2$, сама амплитуда должна убывать обратно пропорционально первой степени расстояния.

3.6. Скорость распространения волн в упругих средах

Скорость распространения волны в упругой среде равна скорости распространения в ней импульса упругой деформации, который можно найти следующим образом.

Выделим в однородной упругой среде цилиндр сечением S (рис. 3.4), на которое в течение малого времени dt действовала сила F . В бесконечно тонком слое dx , прилегающем к S , она вызывает увеличение плотности от ρ до ρ' : $\Delta\rho = \rho' - \rho$.

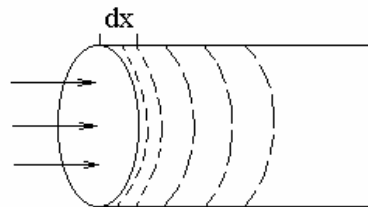


Рис. 3.4

Возникающие упругие силы стремятся остановить частицы этого слоя и привести в движение частицы следующего. Вдоль цилиндра начинает распространяться область сжатия со скоростью $v = \frac{dx}{dt}$. Импульс, сообщенный ей силой F , $dK = \Delta\rho S dx v$. На основании второго закона Ньютона, если пренебречь силами трения (вязкостью среды),

$$F = \frac{dk}{dt} = \Delta p S \frac{dx}{dt} v = \Delta p S v^2.$$

Откуда скорость распространения деформации вдоль среды

$$v = \sqrt{\frac{F}{S \Delta p}} = \sqrt{\frac{\Delta \sigma}{\Delta \rho}}, \quad (3.12)$$

где $\Delta \sigma = \frac{F}{S}$ - изменение давления, т.е. напряжение, вызванное силой F.

Покажем, что скорость распространения упругих возмущений определяется упругими свойствами среды.

Изменение плотности $\Delta \rho$ пропорционально ρ :

$$\Delta \rho = -\varepsilon \rho, \quad (3.13)$$

где $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ - относительная деформация сжатия (или растяжения).

Это следует из того, что масса слоя dx при его деформации остается неизменной, а изменение плотности происходит вследствие изменения его размеров. Для слоя конечной

длины l $\rho = \frac{m}{v} = \frac{m}{Sl}$. Отсюда $d\rho = -\frac{m}{Sl} \cdot \frac{dl}{l} = -\varepsilon \rho \cdot \Delta \rho = \frac{F}{S}$, согласно закону Гука (2.6),

$$\Delta \sigma = -E \varepsilon, \quad (3.14)$$

где E – модуль Юнга.

Подставляя (3.13) и (3.14) в (3.12), для скорости распространения продольной волны v_{\parallel} получаем

$$v_{\parallel} = \sqrt{\frac{-E \varepsilon}{-\varepsilon \rho}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (3.15)$$

Скорость распространения поперечных волн связана с модулем сдвига G аналогичным соотношением:

$$v_{\perp} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \quad (3.16)$$

Таким образом, в газах и жидкостях могут распространяться только продольные волны, так как эти тела оказывают упругое сопротивление только деформации сжатия, в твердой среде – продольные и поперечные волны (оказывают упругое сопротивление и деформации сдвига).

3.7. Наложение волн. Интерференция. Когерентные волны. Условие максимума и минимума интерференции

Если в среде распространяются волны не от одного, а от нескольких источников, каждая точка среды совершает сложное колебание, являющееся результирующим всех составляющих движений.

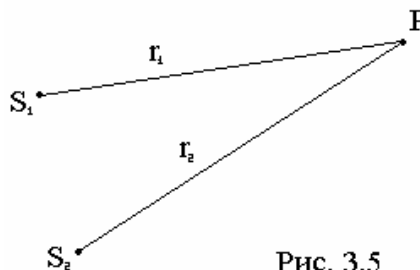


Рис. 3.5

Рассмотрим случай сложения волн от двух источников S_1 и S_2 (рис. 3.5). Уравнения колебаний, пришедших от каждого из них в некоторую произвольно выбранную точку среды P, будут иметь вид

$$\begin{aligned}\xi_1 &= a_1 \cos(\omega_1 t - k_1 r_1), \\ \xi_2 &= a_2 \cos(\omega_2 t - k_2 r_2)\end{aligned}$$

Начальные фазы обоих источников колебаний принимаем равными нулю.

Смещение в точке Р будет сложной функцией времени

$$\xi = \xi_1(r_1, t) + \xi_2(r_2, t).$$

Известно, что квадрат результирующей амплитуды в каждый момент времени t

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos \delta, \quad (3.17)$$

т.е. величина a определяется разностью фаз δ складывающихся колебаний,

$$\delta = (\omega_1 t - k_1 r_1) - (\omega_2 t - k_2 r_2). \quad (3.17a)$$

Если ω_1 и ω_2 велики, ξ_1 , ξ_2 , ξ быстро меняющиеся со временем функции, то регистрируемая в точке Р интенсивность колебаний (пропорциональная квадрату амплитуды) $I = I_0 \bar{a}^2$, где I_0 - коэффициент пропорциональности; \bar{a}^2 - среднее значение a^2 .

Средние значения постоянных a_1^2 и a_2^2 равны им самим $\bar{a}_1^2 = a_1^2$; $\bar{a}_2^2 = a_2^2$; $\cos \delta = 0$, следовательно,

$a^2 = \bar{a}_1^2 + \bar{a}_2^2 + 2\bar{a}_1 \bar{a}_2 \cos \delta = a_1^2 + a_2^2$; $I = I_0$; $a^2 = I_0 a_1^2 + I_0 a_2^2 = I_1 + I_2 = 2I$, если $I_2 = I_1$, т.е. суммарная интенсивность равна сумме интенсивностей.

Особый интерес представляет случай, когда разность фаз колебаний, приходящих в любую точку среды, не зависит от времени. В таком случае наблюдается интерференция – это наложение двух или нескольких волн, приводящих к устойчивому во времени усилению колебаний в одних точках пространства и ослаблению – в других точках пространства. Интерферировать могут только когерентные волны. Ими называют волны одинаковой частоты (монокроматические), разность фаз которых постоянна. Источники, позволяющие получать когерентные волны, называются когерентными источниками.

Так как для когерентных волн: $\omega_1 = \omega_2 = \omega$; $k_1 = k_2 = k$, то разность фаз (3.17a)

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1).$$

Пусть в точках среды

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = 2m\pi \text{ или } r_2 - r_1 = 2m \frac{\lambda}{2}, \quad (3.18)$$

Где m – целое число, принимающее значения 0, 1, 2, ... Тогда $\cos \delta = +1$ и уравнение (3.17) принимает вид

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2. \quad (3.19)$$

Так как интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды ($I \sim a^2$), то из (3.19) следует $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$, а если $I_2 = I_1$, то $I = 4I_1$.

Поэтому (3.18) есть условие максимума интерференции.

Таким образом, если на геометрической разности хода ($r_2 - r_1$) укладывается четное число полуволен, то в этих точках наблюдается интерференционные максимумы.

$$\text{В тех точках (где } \delta = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = (2m+1)\pi), \text{ для которых } r_2 - r_1 = (2m+1)\frac{\lambda}{2}, \quad (3.20)$$

будет иметь $\cos \delta = -1$ и тогда согласно (3.22) результирующая амплитуда в этой точке $a^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2$, а интенсивность $I = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$. Если $I_2 = I_1$, то $I = 0$, т.е. результирующая интенсивность I равна нулю. Поэтому (3.20) есть условие минимума интерференции. Другими словами, если на геометрической разности хода ($r_2 - r_1$) укладывается нечетное число полуволен, то в этих точках наблюдается интерференционные минимумы.

3.8. Стоячие волны

Распространяющиеся от источника волны называют бегущими, потому что их гребни перемещаются в пространстве с некоторой скоростью v . Смещение $\xi(x, t)$ для какого-то момента времени t изобразится синусоидой 1 (рис. 3.6). В следующий момент времени функция $\xi(x, t + \Delta t)$ изобразится синусоидой 2. Гребни волны смещаются на $\Delta x = v\Delta t$.

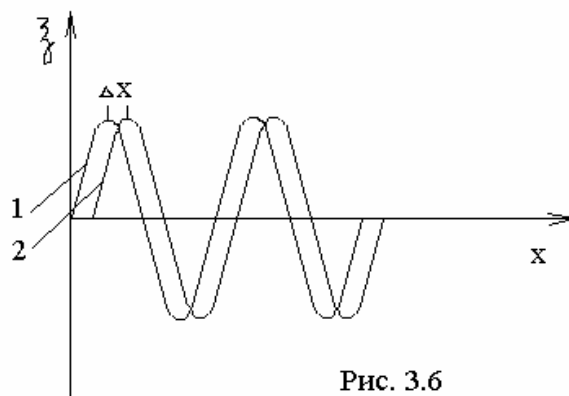


Рис. 3.6

В бегущей волне соседние точки совершают колебания с отличающимися фазами. Перемещение гребней связано с перемещением фазы колебания, соответствующей максимальному смещению, поэтому v называют фазовой скоростью.

Если волна доходит до границы среды или до какой-то преграды, она отражается. Тогда на бегущую волну, описываемую уравнением

$$\xi_1(x, t) = a_1 \cos(\omega t - kx),$$

накладывается отраженная, распространяющаяся в противоположном направлении

$$\xi_2(-x, t) = a \cos(\omega t + kx).$$

Результирующее смещение, вызванное этими волнами,

$$\xi(x, t) = \xi_1(x, t) + \xi_2(x, t) = a \cos(\omega t - kx) + a \cos(\omega t + kx).$$

Воспользовавшись формулами сложения тригонометрических функций, получим

$$\xi(x, t) = 2a \cos kx \cos \omega t. \quad (3.21)$$

Уравнение (3.21) является уравнением стоячей волны. Исследуем его.

Частицы среды совершают колебания с частотой ω , а амплитуда их колебаний $A = 2a \cos kx$ зависит от x . Амплитуда колебаний точек, находящихся от источника на расстояниях, для которых $\cos kx = \pm 1$, т.е. $kx = \frac{2\pi}{\lambda}x = m\pi, x = m\frac{\lambda}{2}$ максимальна и равна $A = |2a|$ (знак «+» или «-» указывает на направление отклонения). В точках, в которых $\cos kx = 0$, т.е. $kx = \frac{2\pi}{\lambda}x = (2m+1)\frac{\pi}{2}, x = (2m+1)\frac{\lambda}{4}, A = 0$ в любой момент времени.

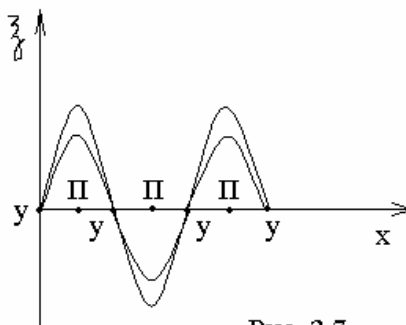


Рис. 3.7

На рис. 3.7 изображены смещения в стоячей волне для двух близких моментов времени t и $t + \Delta t$ и отмечены положения узлов (y) и пучностей (π). Между двумя узлами имеется пучность стоячей волны.

Все точки между двумя соседними узлами колеблются в одной фазе. При переходе через узел смещения они меняют знак, что соответствует изменению фазы π (фаза меняется на противоположную).

При образовании стоячей волны важное значение имеют условия на границе, от которой происходит отражение.

Если волна отражается от более плотной среды, на границе образуется узел стоячей волны. Это значит, что в пограничной точке фаза колебаний отраженной волны меняется скачком по сравнению с бегущей на π или иначе отражение происходит с потерей полуволны.

Если отражение происходит от менее плотной среды, фаза отраженной волны не меняется, в граничных точках имеют место пучности стоячей волны.

Стоячие волны являются результатом интерференции волн – бегущей и отраженной.

Работа 7. Определение скорости звука методом интерференции

Упругие волны, распространяющиеся в упругих средах, называют звуковыми или акустическими.

Скорость распространения звуковых волн в газах, так же как и в любой среде, определяется соотношением

$$v = \sqrt{\frac{\Delta P}{\Delta \rho}}, \quad (3.22)$$

где ΔP и $\Delta \rho$ - изменения давления и плотности при распространении продольной волны.

Распространение звуковой волны в газе связано с распространением следующих друг за другом сгущений и разрежений, увеличений и уменьшений давления, протекающих так быстро, что эти процессы можно считать адиабатическими и воспользоваться для их описания уравнением Пуассона

$$PV^\gamma = const, \quad (3.23)$$

где P и V – давление и объем некоторой массы газа m ; $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ - отношение теплоемкостей газа при постоянном давлении и постоянном объеме.

Уравнение Пуассона можно переписать в виде:

$$\frac{P}{\rho^\gamma} = const,$$

так как плотность ρ обратно пропорциональна объему: $\rho = \frac{m}{V}$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\rho} &= const \gamma \rho^{\gamma-1} = \frac{P}{\rho^\gamma} \gamma \rho^{\gamma-1} = \gamma \frac{P}{\rho} \\ \text{и } v &= \sqrt{\frac{dP}{d\rho}} = \sqrt{\frac{P}{\rho}} \gamma. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Воспользовавшись уравнением Менделеева-Клапейрона $PV = \frac{m}{\mu} RT$, получим

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{P\mu}{RT}. \quad (3.25)$$

Поставив (3.25) в (3.24), будем иметь

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}. \quad (3.26)$$

Таким образом, скорость звука в газах зависит от его молекулярной массы μ и от температуры.

Экспериментальное определение скорости звука в газах основывается на использовании явления интерференции звуковых волн.

Если звуковая волна, вышедшая из одного источника, будучи разделенной на две, проходит до приемника разные пути r_1 и r_2 , то приемник зафиксирует это усиление, либо ослабление звучания вследствие интерференции пришедших к нему колебаний.

Максимум громкости будет иметь место, если разность хода у частей волны $\Delta r = r_2 - r_1$ будет равна целому числу длин волн (см. п.6) $r_2 - r_1 = 2m \frac{\lambda}{2}$, и минимум, если $r_2 - r_1 = (2m + 1) \frac{\lambda}{2}$, где m – целое число; $m = 0, 1, 2, \dots$

Это явление в данной работе используется для определения скорости звука в воздухе.

Возбудителем звуковых волн служит генератор электрических колебаний звуковой частоты (ЗГ), которые преобразуются в звуковые с помощью динамика. К динамику подведены открытые концы двух одинаковых изогнутых металлических труб. Другие их концы закрыты общей пластинкой с отрезком, к которому можно присоединять слуховую трубку. Длину одной из труб можно менять, выдвигая ее изогнутый конец.

Таким образом, от одного источника звуковые волны распространяются по двум параллельно идущим трубкам. В том месте, где установлен слуховой аппарат, волны сходятся.

При одинаковой длине труб волны приходят в одной фазе, так как они вышли из одного источника и прошли равные пути, разность хода при этом $r_2 - r_1 = 0$, наложение волн дает максимум звучания.

Если увеличить длину одной из труб, выдвигая ее, увеличивается r_2 . При некотором его значении звук ослабляется, это значит, что $r_2 - r_1 = \frac{\lambda}{2}$.

При дальнейшем выдвигении трубы можно получить максимум звука при $r_2 - r_1 = 2 \frac{\lambda}{2}$ и минимум при $r_2 - r_1 = 3 \frac{\lambda}{2}$. Отсюда можно найти длину звуковой волны λ . Частоту колебаний прочитывают на шкале генератора, следовательно, скорость звука можно определить из соотношения

$$\lambda = vT = \frac{v}{\nu}, \text{ то } v = \lambda \nu. \quad (3.27)$$

Выполнение работы

Включают ЗГ, устанавливают нужную частоту колебаний. Выдвигают подвижную часть трубы до тех пор, пока не зафиксируют исчезновение звука. Измеряют длину l_1 , на которую понадобилось выдвинуть трубу. Общее удлинение пути волны будет равно $2l_1$. Поскольку интерференционный минимум образуется при разности хода, $r_2 - r_1 = \frac{\lambda}{2}$, $r_2 - r_1 = 2l_1$, откуда

$$\frac{\lambda}{2} = 2l_1 \text{ и } \lambda = 4l_1.$$

При дальнейшем выдвигении трубы можно найти следующий минимум, для него $r_2 - r_1 = 3 \frac{\lambda}{2} = 2l_2$ и $\lambda = \frac{4l_2}{3}$ и т.д.

Положение каждого минимума определяется на слух, фиксируется неточно, так как минимумы размыты. Каждое измерение необходимо повторить несколько раз и для λ брать средние значения. Измерения производят для ряда частот: 800, 1000, 1500 и 2000 Гц. Определив таким образом длину волн λ и зная частоты, по формуле (3.27) рассчитывают скорость звука. Результаты опытов и расчетов заносят в таблицу.

Контрольные вопросы

1. Схема установки и последовательность выполнения данной работы.
2. Какие колебательные движения называются гармоническими? Скорость и ускорение при гармоническом колебательном движении.
3. Какова природа сил, поддерживающих колебательное движение? Гармонический осциллятор. Уравнение гармонического осциллятора.
4. Энергия системы, совершающей гармонические колебания.
5. Процесс возникновения волны. Виды волн и уравнения, их описывающие.
6. Скорость распространения волн в упругих средах. Как она зависит от плотности среды?
7. Когерентные источники. Интерференция. Условие максимума и минимума интенсивности.
8. Что называют стоячей волной? Уравнение стоячей волны. Пучности стоячей волны. На каком расстоянии друг от друга находятся узлы (пучности) стоячей волны? Как влияет условие на границе при образовании стоячей волны?
9. Выведите окончательную формулу для экспериментального определения скорости звука в воздухе.
10. Вычислите относительную и абсолютную погрешности, запишите окончательный результат опытов с учетом абсолютной погрешности.

Цикл 4. Затухающие колебания

4.1. Дифференциальное уравнение затухающих колебаний и его решение

При всяком свободном колебании происходит постепенное расходование энергии движения на работу против сил трения и сил сопротивления среды. При этом амплитуда и скорость колебательного движения убывает, т.е. происходит затухание колебаний. Период затухающих колебаний больше периода собственных колебаний, которые совершало бы тело при отсутствии трения.

Затухающие колебания уже не будут гармоническими и даже периодическими, так как характеристики колебания через период не повторяются. Однако, если энергия уменьшается медленно, то колебания можно рассматривать как периодические с убывающей амплитудой.

Периодом затухающих колебаний называют время, в течение которого система дважды проходит положение равновесия в одном и том же направлении. Амплитудой затухающих колебаний называют наибольшее значение смещения в пределах одного периода.

Закон убывания амплитуды затухающих колебаний зависит от характера сил сопротивления.

Особенности затухающих колебаний могут быть выяснены на примере колебаний груза массой m , подвешенного на легкой упругой пружине. Выделенный из положения равновесия груз будет совершать свободные колебания. При этом на него будут действовать две силы: упругая сила пружины F_1 и сила трения F_2 .

Упругая сила пружины F_1 пропорциональна смещению и направлена в сторону, противоположную ему

$$F_1 = -kx, \quad (4.1)$$

где k – коэффициент упругости пружины; x – смещение.

Сила трения в случае вязкой среды и малых скоростей пропорциональна скорости движущегося тела и направлена в сторону, противоположную скорости.

$$F_2 = -rv = r \frac{dx}{dt}, \quad (4.2)$$

где r – коэффициент сопротивления; v – скорость движущегося тела.

Под действием сил F_1 и F_2 тело приобретает ускорение a , которое можно определить из второго закона Ньютона:

$$ma = -kx - rv = m \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (4.3)$$

Разделив правую и левую части выражения (4.3) на массу m и введя обозначения:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}, \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \frac{r}{m} = 2\beta \quad (4.4)$$

получим дифференциальное уравнение затухающих колебаний

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \quad (4.5)$$

где ω_0 - собственная частота свободных колебаний; β - коэффициент затухания. Он характеризует относительное уменьшение амплитуды затухающих колебаний за 1 сек.

С помощью подстановки приведем (4.5) к виду уравнения свободных колебаний (3.3). Для этого введем новую переменную $z(t)$, связанную с x соотношением

$$x = z(t)e^{-\beta t}, \quad (4.6)$$

Продифференцируем (4.6) дважды по времени:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dz}{dt} e^{-\beta t} - z\beta e^{-\beta t}; \quad (4.7)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2} e^{-\beta t} - 2\beta e^{-\beta t} \frac{dz}{dt} + \beta^2 e^{-\beta t} z$$

Подставляя (4.7) в уравнение (4.5), получим

$$\frac{d^2z}{dt^2} + (\omega_0^2 - \beta^2)z = 0. \quad (4.8)$$

Если $\omega_0^2 > \beta^2$ и $\omega_0^2 - \beta^2 > 0$, то можно ввести обозначение $\omega_0^2 - \beta^2 = \omega^2$. Тогда уравнение (4.8) примет вид

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \omega^2 z = 0. \quad (4.9)$$

Решением уравнения (4.9) является функция

$$z = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (4.11)$$

Здесь A_0 - амплитуда в момент времени $t=0$.

Частота ω затухающих колебаний меньше собственной частоты ω_0 и равна, с учетом (4.4)

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}}. \quad (4.12)$$

Если β - малая величина, то величины ω и ω_0 мало отличаются друг от друга.

Затухающие колебания можно рассматривать как колебания с постоянной ω и постоянным периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (4.13)$$

Амплитуда затухающих колебаний уменьшается со временем по экспоненциальному закону

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}, \quad (4.14)$$

Развертка таких колебаний приведена на рис. 4.1.

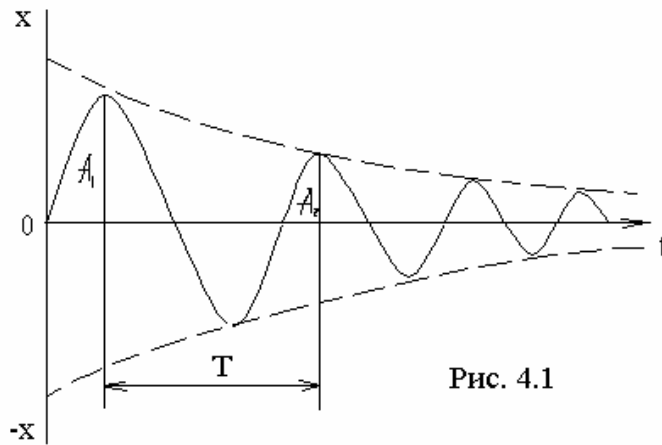


Рис. 4.1

Как видно из уравнения (4.14), чем больше коэффициент затухания β , тем быстрее уменьшается амплитуда; т.е. быстрее затухают колебания (см. рис. 4.1).

4.2. Характеристики затухающих колебаний: коэффициент затухания, логарифмический декремент затухания, добротность

Характерной особенностью затухающих колебаний (при линейном законе сопротивления) является то, что отношение любых двух амплитуд, разделенных по времени одним периодом, остается постоянным в течение всего процесса колебаний. Действительно, для амплитуд, разделенных по времени одним периодом, согласно (4.14), можно записать

$$\frac{A_t}{A_{t+T}} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = e^{\beta T} = \text{const}. \quad (4.15)$$

Натуральный логарифм этого отношения, характеризующий затухание колебаний за период, называют логарифмическим декрементом затухания, и он равен:

$$\lambda = \ln \frac{A_t}{A_{t+T}} = \beta T. \quad (4.16)$$

Скорость затухания колебаний определяется величиной $\beta = \frac{r}{2m}$, которую называют коэффициентом затухания. Найдем время τ , за которое амплитуда уменьшится в e раз ($e=2,7$).

По определению $e^{-\beta \tau} = e^{-1}$, откуда $\beta \tau = 1$. Следовательно, коэффициент затухания обратный по величине тому промежутку времени, за который амплитуда уменьшается в e раз ($e=2,7$).

Добротностью колебательной системы называется безразмерная величина Q , равная отношению энергии $E(t)$ колеблющейся системы в произвольный момент времени t к убыли этой энергии за промежуток времени от t до $t+T$, т.е. за один условный период затухающих колебаний, умноженной на 2π :

$$Q = \frac{E(t)}{E(t) - E(t+T)} 2\pi. \quad (4.17)$$

Известно, что энергия пропорциональна квадрату амплитуды, т.е. $E \sim A^2$, тогда

$$Q = \frac{A^2(t)}{A^2(t) - A^2(t+T)} 2\pi. \quad (4.18)$$

Учитывая (4.15) и (4.16), получим

$$Q = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\beta T}} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\lambda}}. \quad (4.19)$$

При малых значениях логарифмического декремента затухания ($\lambda \ll 1$) выражение $1 - e^{-2\lambda} \approx 2\lambda$ и тогда добротность колебательной системы

$$Q = \frac{\pi}{\lambda}. \quad (4.20)$$

Работа 8. Изучение характеристик механических затухающих колебаний

Вывод рабочих формул

Непосредственное измерение двух последовательных амплитуд A_1 и A_2 связано с большими погрешностями измерений. Для более точного определения характеристик затухающих колебаний измеряют две амплитуды, отстоящие на n периодов друг от друга. Тогда, например,

$$\ln \frac{A_0}{A_n} = n\lambda \quad \text{или} \quad \lambda = \frac{1}{n} \ln \frac{A_0}{A_n}. \quad (4.21)$$

Используя зависимость (4.16) и (4.21), можно найти коэффициент затухания

$$\beta = \frac{1}{nT} \ln \frac{A_0}{A_n}. \quad (4.22)$$

Обычно время колебаний nT выбирают таким образом, чтобы первоначальная амплитуда уменьшалась в целое число раз, например вдвое. Поэтому

$$\frac{A_0}{A_n} = 2 \quad \text{и} \quad \beta = \frac{1}{nT} \ln 2 = \frac{0.693}{nT}. \quad (4.23)$$

Механическая схема установки

Установка представляет собой груз (1), подвешенный на упругой проволоке (2) (рис. 4.2), с закрепленным в его верхней части проволочным указателем (3). Для увеличения затухания груз помещен в сосуд (5) с трансформаторным маслом. Измерение амплитуды крутильных колебаний производится с помощью указателя (3) и шкалы (4).

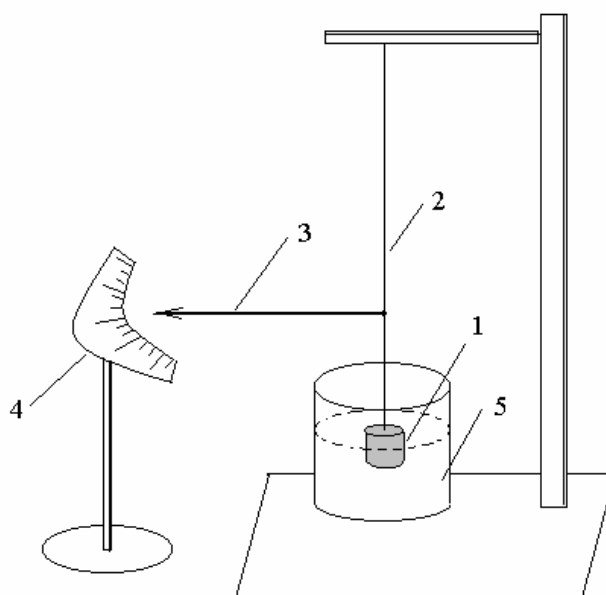


Рис. 4.2

Выполнение работы

Сообщить грузу крутильные колебания на угол 3-5°.

В момент, когда указатель находится в крайнем положении на целом числе делений шкалы, включить секундомер.

Вести счет полных колебаний, и когда амплитуда уменьшится вдвое, выключить секундомер.

Вычислить период колебаний по формуле $T = \frac{t}{n}$, где t – время, в течение которого груз совершил n полных колебаний.

По формуле (4.23) определить коэффициент затухания β , зная λ , по формуле (4.16) определить логарифмический декремент затухания. Зная λ , по формуле (4.20) вычислить добротность Q .

Измерения повторить пять раз и вычислить средние значения β , λ и Q .

Контрольные вопросы

1. Схема установки и последовательность выполнения данной работы.
2. Дайте определение гармонических колебаний и основных характеристик таких колебаний.
3. Дайте определение затухающих колебаний. Запишите дифференциальное уравнение такого колебания и найдите его решение.
4. Частота затухающих колебаний, ее связь с собственной частотой. Период затухающих колебаний.
5. Что такое β , λ и Q ? Объясните их физический смысл.
6. Выведите формулу для определения λ . Как определяются в данной работе T , β , λ и Q ?
7. Вычислите относительную и абсолютную погрешности, запишите окончательный результат с учетом абсолютной погрешности.

Цикл 5. Гравитационное поле Земли. Сила тяжести. Ускорение силы тяжести. Маятники

5.1. Гравитационное поле Земли. Сила тяжести. Ускорение силы тяжести

Взаимное притяжение тел, как показывает опыт, осуществляется через пространство, разделяющее эти тела, даже и в том случае, когда они находятся в вакууме. Объясняется это тем, что всякое тело изменяет свойства окружающего его пространства. Изменение свойств окружающего тело пространства проявляется, в частности, в том, что на все другие тела, вносимые в него, действуют силы гравитационного притяжения.

Поэтому область пространства, каждой точке которой можно сопоставить определенную по значению и направлению силу гравитационного притяжения, называют гравитационным полем или полем тяготения. Гравитационное поле порождается телами и так же, как и другие физические поля (электрическое, магнитное и т.д.), является одной из форм существования материи.

Пусть в какую-либо точку поля тяготения, создаваемого телом массы m_1 , помещено другое тело, принимаемое за материальную точку массы m_2 . Тогда в соответствии с законом всемирного тяготения

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}. \quad (5.1)$$

Значение силы притяжения, действующей в данном поле на второе тело, будет пропорционально его массе:

$$F_{21} = G \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Здесь g – гравитационная постоянная, r – расстояние между телами.

Поочередно помещая в данную точку поля тела разной массы, мы получим соответственно различные значения силы гравитационного притяжения. Если же взять отношение

$$\frac{F_{21}}{m_2} = G \frac{m_1}{r^2} = E, \quad (5.2)$$

то оно не зависит от массы тела, помещаемого в данную точку поля, а определяется массой m_1 тела, создающего поле, и расстоянием r от этого тела до данной точки поля.

Величину E , равную отношению силы гравитационного притяжения, действующего на материальную точку, находящуюся в данной точке поля, к её массе называют напряжённостью поля тяготения, т.е.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{m}. \quad (5.3)$$

Напряжённость E поля тяготения является силовой характеристикой поля тяготения и как сила притяжения, - величина векторная и совпадает с вектором этой силы по направлению, а размерность её совпадает с размерностью ускорения. При наложении нескольких полей напряжённость результирующего поля равна векторной сумме напряжённостей всех этих полей (n):

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i. \quad (5.4)$$

Это утверждение получило название принципа суперпозиции (наложения) полей. Напряжённость поля, создаваемая Землёй на расстоянии $r=R+h$, от её центра

$$\vec{E} = G \frac{M}{r^3} \vec{r}, \quad (5.5)$$

где R – радиус Земли, M – масса Земли, h – высота над поверхностью Земли.

Пользуясь понятием напряжённости поля тяготения, его можно изобразить графически с помощью линий напряжённости, или силовых линий. Линией напряжённости (силовой линией) называют такую линию, в каждой точке которой вектор напряжённости направлен по касательной. Линиям напряжённости принято приписывать направление, совпадающее с направлением вектора напряжённости в каждой точке линии. В тех местах поля, где напряжённость меньше, линии напряжённости проходят менее густо, чем там, где напряжённость больше.

Гравитационные силы вблизи поверхности Земли называют силами тяжести (силы тяготения). Сила тяжести действует со стороны Земли на данное тело и направлена к центру Земли. Силу тяжести не следует отождествлять с весом тела. Весом тела называют силу, с которой тело действует на горизонтальную опору или подвес благодаря силам тяготения; на вес тела влияет характер движения системы отсчёта. Если опора или подвес покоятся или движутся равномерно, вес тела по модулю равен силе тяжести. При движении опоры с ускорением эти силы не равны.

Если на тело действует только сила тяжести (нет сопротивления воздуха и т.д.), то оно совершает свободное падение с ускорением, которое называют ускорением силы тяжести или ускорением свободного падения g . Ускорение g вблизи поверхности Земли есть постоянная для всех тел величина. Покажем это. Пусть тело массой m движется вдоль оси X . Тогда уравнение его движения в скалярном виде имеет вид:

$$F = ma = G \frac{Mm}{R^2}, \quad (5.6)$$

где M – масса Земли, R – её радиус. Сократив на массу тела m и учитывая, что ускорение силы тяжести принято обозначать буквой g , из (5.6) получим

$$g = G \frac{M}{R^2}. \quad (5.7)$$

Так как в выражении (5.7) входят все постоянные величины и не входит масса падающего тела, то g вблизи поверхности Земли есть одинаковая для всех тел величина, но зависящая от высоты h над поверхностью Земли.

$$g = G \frac{M}{(R+h)^2}. \quad (5.8)$$

Кроме того, ускорение g неодинаково в разных местах Земли.

Тому, что ускорение силы тяжести g неодинаково в разных местах Земли, есть несколько причин. Одна из них состоит в том, что земной шар немного приплюснут у полюсов и расстояние до центра Земли у полюса меньше, чем на экваторе. По этой причине на полюсе g должно быть больше, чем на экваторе.

Другая, более важная причина – это вращение Земли вокруг её оси. Пусть тело массы m находится на поверхности Земли в точке, широта которой определяется углом φ (рис. 5.1).

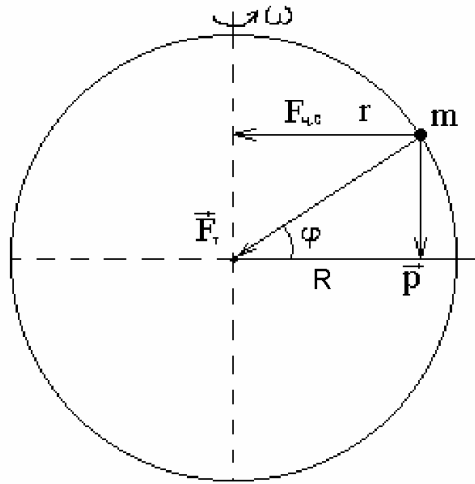


рис. 5.1

На тело действует сила тяжести \vec{F}_T . Если бы Земля не совершала суточного вращения, то эта сила была бы одинакова во всех её точках и создавала бы вес тела, а значит, и ускорение силы тяжести.

Напомним, что весом тела называют силу, с которой тело давит на неподвижную относительно него опору, на которой оно лежит, или растягивает нить, на которой оно подвешено. Вес тела, приложенный к опоре, а не к самому телу, может в широких пределах меняться в зависимости от движения опоры.

Земля вращается с угловой скоростью ω (суточное вращение) и при этом тело m вместе с Землёй описывает окружности радиуса (см. рис. 5.1).

$$r_\varphi = R \cdot \cos \varphi . \quad (5.9)$$

Во всяком криволинейном движении есть нормальное ускорение

$$a_n = \frac{V^2}{r_\varphi} . \quad (5.10)$$

Так как $V = \omega r_\varphi$, то из (5.9) и (5.10) получим

$$a_n = \omega^2 R \cos \varphi . \quad (5.11)$$

Нормальное ускорение называют центростремительным. Чтобы найти силу, вызывающую центростремительное ускорение, разложим силу \vec{F}_T на составляющие: центростремительную силу ($\vec{F}_{у.с.}$) и силу веса (\vec{p}). Из рис.5.1 видно, что сила \vec{p} всюду, кроме полюсов, меньше силы тяжести.

Приближённо можно считать, что

$$P \simeq F_T - F_{у.с.} \cos \varphi , \quad (5.12)$$

где $F_{у.с.} \cos \varphi$ - есть проекция $\vec{F}_{у.с.}$ на направление \vec{F}_T . Уравнение (5.12) с учётом (5.1) запишем в виде

$$mg_\varphi \simeq G \frac{Mm}{R^2} - ma_n \cos \varphi . \quad (5.13)$$

Подставив в (5.12) выражение (5.6) и (5.11), после сокращения на массу тела m , получим

$$g_\varphi \simeq g_o - \omega^2 R \cos^2 \varphi . \quad (5.14)$$

Здесь g_o – ускорение силы тяжести на полюсах.

Из (5.14) следует, что:

на полюсе $\varphi = 90^\circ$ и $g_\varphi = g_o$ - максимально;

на экваторе $\varphi = 0^\circ$ и g_φ - минимально.

Кроме того, ускорение силы тяжести g может быть различным даже в точках земного шара, находящихся на одной широте, поскольку на ускорение силы тяжести могут оказывать

влияние различные неоднородности распределения масс внутри Земли. Измеряя g в различных местах Земли, геологи отыскивают залежи полезных ископаемых. Такой раздел геологи называют гравиметрией.

Отметим также, что если опора или подвес движутся с ускорением $a = g$ вес тела становится равным нулю, т.е. наступает состояние невесомости – это состояние тела, когда на него действует только сила тяжести и не возникает веса тела.

Силы, работа которых не зависит от формы пути, а зависит только от начального и конечного положения, называют консервативными (потенциальными).

Силовые поля, в которых действуют потенциальные силы, называют потенциальными полями (консервативными). Силовые поля, в которых действуют непотенциальные силы, называют непотенциальными полями (неконсервативными).

Покажем, что силы тяжести являются консервативными силами. Для этого подсчитаем работу силы тяжести при перемещении материальной точки по произвольному пути из точки 1 в точку 2. Тогда работа

$$A_{12} = \int_1^2 F_x dx = mg (X_1 - X_2).$$

Видно, что работа силы тяжести не зависит от формы пути, по которому перемещается материальная точка, а определяется лишь начальным и конечным положениями (X_1 и X_2) точки. Следовательно, силы тяжести являются потенциальными силами, а силовые поля сил тяжести – потенциальными полями. Поэтому в этом поле можно ввести понятие потенциала, который является энергетической характеристикой поля сил тяжести.

Потенциальная энергия материальной точки m в данной точке поля пропорциональна массе этой точки

$$\Pi = -G \frac{Mm}{R+h},$$

и поэтому не может быть энергетической характеристикой поля. Если же взять отношение потенциальной энергии в данной точке поля к массе помещённой в данную точку поля, т.е.

$$\frac{\Pi}{m} = -G \frac{M}{R+h} = \varphi, \quad (5.15)$$

то оно уже не зависит от массы m точки, а определяется массой M Земли, создающего поле, и расстоянием $R + h = r$ от центра Земли до данной точки поля. Величину φ , равную этому отношению (5.15) и называют потенциалом поля тяжести.

Потенциал в некоторой точке поля тяготения, созданный в результате наложения полей тяготения, обусловленных отдельными материальными точками, равен сумме потенциалов в этой точке, соответствующих каждому из полей в отдельности (принцип суперпозиции), т.е.

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i,$$

где n – число материальных точек.

Точки пространства, в которых потенциал поля тяготения имеет одно и то же значение, располагаются на некоторой поверхности, называемой поверхностью равного потенциала или эквипотенциальной поверхностью.

Уравнение эквипотенциальной поверхности, по определению, имеет вид $\varphi = const$.

Энергетическая характеристика поля тяготения – потенциал и его силовая характеристика – напряжённость взаимосвязаны соотношением

$$\vec{E} = -grad \varphi,$$

т.е. напряжённость поля тяготения равна градиенту потенциала, взятому с обратным знаком.

Поле тяготения мы рассмотрим на основе закона всемирного тяготения (5.1), но этот закон не учитывает зависимости силы взаимного притяжения тел от времени. Иначе говоря, в нём предполагается, что действие сил притяжения проявляется мгновенно и не зависит от свойств пространства, разделяющего взаимодействующие тела (теория дальнего действия).

5.2. Маятники

Математический маятник – это материальная точка (шарик), подвешенная на длинной, невесомой нерастяжимой нити (рис. 5.2).

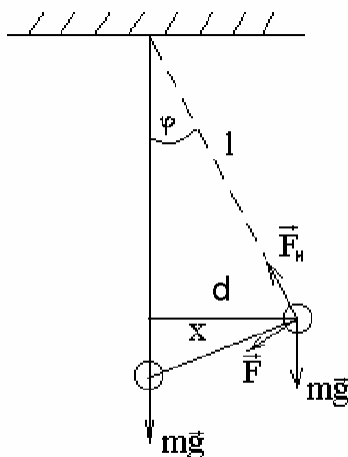


рис. 5.2

Если шарик отвести от положения равновесия так, что нить образует угол φ с вертикальным положением, то на шарик будет действовать сила \vec{F} , стремящаяся вернуть его в положение равновесия. Сила \vec{F} является результирующей двух сил: силы тяжести $m\vec{g}$ и силы натяжения \vec{F}_n . Из рис. 5.2 видно, что

$$F = mg \sin \varphi.$$

Для малых углов отклонения φ можно считать, что $d \approx X$ и тогда

$$\varphi = \frac{d}{l}.$$

Следовательно,

$$F = -mg \frac{X}{l}. \quad (5.16)$$

Знак « \rightarrow » указывает, что сила F направлена в сторону, противоположную смещению. Как следует из (5.10), при небольших значениях угла φ сила F пропорциональна смещению, и, следовательно, при небольших амплитудах маятник будет совершать гармонические колебания.

Силы, которые по своей природе не являются упругими, но зависят от величины смещения относительно положения равновесия по такому же закону, как и упругие силы,

$$F = -kx \quad (5.17)$$

называются квазиупругими. В данном случае сила \vec{F} (см. рис. 5.2) является примером квазиупругой силы.

Найдём период колебаний математического маятника. Из сравнения формул (5.16) и (5.17) находим, что

$$kx = \frac{mg}{l} x.$$

Учитывая, что $k = m\omega^2$, а $\omega = \frac{2\pi}{T}$ получим

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (5.18)$$

Из формулы (5.12) видно, что при небольших амплитудах период колебаний не зависит ни от самой амплитуды, ни от массы маятника. Зависимость периода колебаний маятника от ускорения силы тяжести используется для точных измерений g в различных местах на поверхности Земли.

Физический маятник – это любое твёрдое тело, которое может совершать колебания относительно горизонтальной оси, не проходящей через его центр тяжести (рис. 5.3).

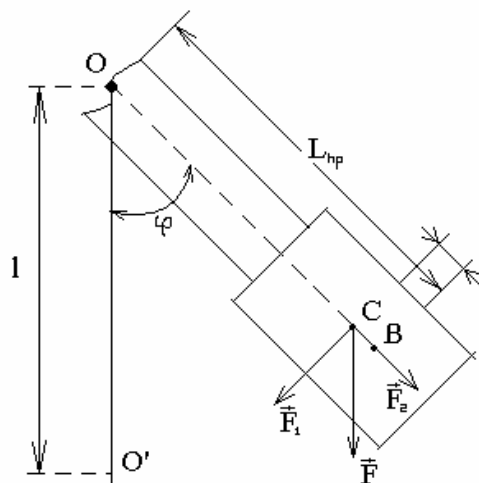


Рис. 5.3

Здесь: o – ось вращения, она перпендикулярна плоскости чертежа; C – центр тяжести; l – расстояние от центра тяжести до оси вращения.

Если физический маятник вывести из положения равновесия, отклонив на некоторый угол φ , то силу тяжести \vec{F} можно разложить на две составляющие (см. рис. 5.3) \vec{F}_1 и \vec{F}_2 . Полагая, что $\sin \varphi \approx \varphi$ при небольших углах отклонения и учитывая направление силы и учитывая направление силы \vec{F}_1 (обратное отклонению маятника), можно записать, что

$$F_1 = -F \sin \varphi \approx -F \cdot \varphi.$$

Тогда, момент силы F_1 относительно оси вращения

$$M \approx mgl \cdot \varphi.$$

Согласно второму закону Ньютона для вращательного движения

$$M = \beta \cdot J,$$

где β - угловое ускорение; I – момент инерции маятника относительно оси вращения.

Откуда следует, что угловое ускорение

$$\beta = -\frac{mgl}{J} \varphi, \quad (5.19)$$

т.е. оно пропорционально угловому смещению.

Из (5.19) следует, что при небольших углах отклонения физический маятник будет совершать гармонические колебания. Найдём период этих колебаний. Так как угловое ускорение есть вторая производная от угла отклонения по времени ($\ddot{\varphi}$), то выражение (5.19) запишем в виде

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgl}{J} \varphi = 0.$$

Полученное уравнение аналогично уравнению (3.3), где

$$\omega^2 = \frac{mgl}{J},$$

а учитывая, что период $T = \frac{2\pi}{\omega}$, то для рассматриваемого случая

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}}. \quad (5.20)$$

Из сопоставлений формул (5.20) и (5.18) следует, что математический маятник с длиной

$$L_{np.} = \frac{J}{ml} \quad (5.21)$$

будет иметь такой же период колебаний, как и данный физический маятник. Величину (5.21) называют приведённой длиной физического маятника. Таким образом, приведённая длина физического маятника – это длина математического маятника, который имеет такой же период колебаний, что и данный физический маятник, поэтому

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L_{np.}}{g}} . \quad (5.22)$$

Из (5.22) видно, что измерение I и l можно заменить измерением приведённой длины маятника.

Точку В, отстоящую от оси вращения на расстоянии L (см. рис. 5.3), называют центром качания маятника. Точки подвеса O и центра качаний B являются точками сопряженными. Это значит, если маятник повернуть и подвесить так, что точкой подвеса окажется точка В, тогда точка O будет центром качаний, а период колебаний маятника не изменится. Описанное свойство точки подвеса и центра качаний используется для определения приведённой длины.

Работа 9а. Изучение характеристик силового поля на примере гравитационного поля Земли

Характеристиками гравитационного поля Земли являются: напряженность (E) – силовая характеристика поля; потенциал φ – энергетическая характеристика поля Земли. Эти характеристики поля Земли около её поверхности можно рассчитать по формулам (5.5) и (5.15), подставив в них значения массы Земли, радиуса Земли и гравитационную постоянную.

Однако есть и другой путь, поскольку у поверхности Земли ускорение силы тяжести

$$g = G \frac{M_3}{R_3^2} . \quad (5.23)$$

Тогда из сравнения соотношений (5.5) и (5.23) следует, что

$$E_0 = g . \quad (5.24)$$

Зная напряжённость поля Земли E_0 (5.24) и учитывая (5.5) и (5.15) будем иметь

$$\varphi_0 = -E_0 R_3 . \quad (5.25)$$

В данной работе для нахождения напряжённости и потенциала гравитационного поля Земли используют значения ускорения силы тяжести, которое определяется опытным путём при помощи математического маятника.

Механическая схема установки представлена на рис. 5.4.

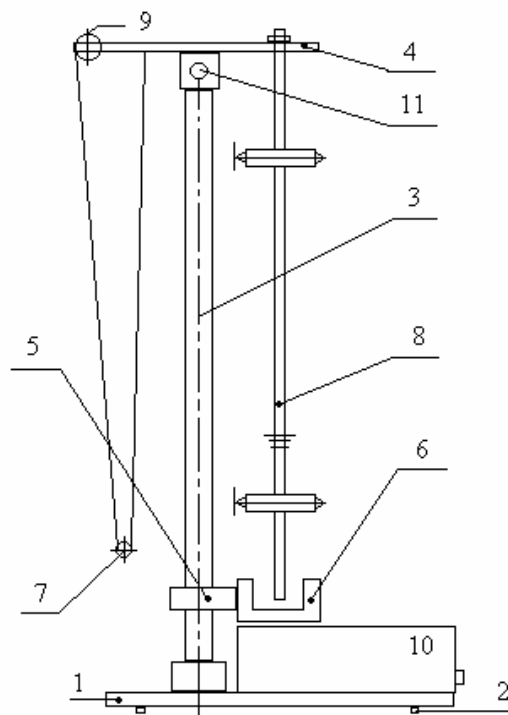


Рис. 5.4

В основании установки закреплена колонка (3), на которой зафиксированы кронштейны – верхний (4) и нижний (5) с фотоэлектрическим датчиком (6). После отвинчивания воротка (11) верхний кронштейн поворачивается вокруг колонки (3) на 180°. С одной стороны кронштейна (4) находится математический маятник (7), с другой – оборотный маятник (8). Длина математического маятника регулируется с помощью воротка (9), а её величина определяется при помощи шкалы на колонке (3).

Оборотный маятник выполнен в виде стального стержня, на котором фиксированы два повернутых друг к другу лезвия ножа (1) и два груза (2). На этом стержне через 10 мм сделаны кольцевые метки, служащие для точного определения длины оборотного маятника (расстояния между ножами). Ножи и грузы можно перемещать вдоль оси стержня и фиксировать в любом положении.

Нижний кронштейн вместе с фотоэлектрическим датчиком можно перемещать вдоль колонки и фиксировать в произвольно избранном положении.

Выполнение работы

1. Включить установку в сеть 220 В, нажать переключатель сеть, проверяя, все ли индикаторы установки показывают цифру «ноль» и светится ли лампочка фотоэлектрического датчика. Установка готова к работе непосредственно после сетевого напряжения и не нуждается в нагреве.
2. Привести математический маятник в колебательное движение, отклоняя шарик на 4-5° от положения равновесия. Нажать клавишу «сброс». Во время движения маятника световой поток, падающий с лампочки на фоторезистор, прерывается, в результате чего в цепи фоторезистора генерируются электрические импульсы, которые после усиления в схеме транзистора подводятся к входу миллисекундометра.
3. После подсчёта измерителем времени десяти колебаний нажать клавишу «стоп».
4. Определив период колебаний T маятника по формуле ($T = \frac{t}{n}$) и списав на шкале колонки длину l маятника в метрах, рассчитывают по формуле (5.18) ускорение силы тяжести.
5. Измерения периода T провести три раза и найти среднее значения ускорения силы тяжести.

6. По формулам (5.24) и (5.25) определяют E_0 и φ_0 . Результаты опытов и расчётов занести в таблицу.

Контрольные вопросы

1. Схема установки и последовательность выполнения работы.
2. Дайте определение гравитационного поля. Какие характеристики вводятся для описания таких полей? Принцип суперпозиции полей. Эквипотенциальные поверхности. Линии напряжённости. Связь между вектором \vec{E} и потенциалом φ .
3. Сформулируйте и запишите закон всемирного тяготения. Что такое свободное падение тел. Физический смысл гравитационной постоянной. Сила тяжести. Вес тела. Состояние невесомости. Покажите, что ускорение силы тяжести вблизи поверхности Земли является одинаковой для всех тел величиной.
4. Дайте определение консервативных и неконсервативных сил и соответственно полей. Покажите, что силы тяжести являются консервативными силами.
5. Как зависит g от широты? Докажите это (см. ф-лу 5.14). Что такое гравиметрия?
6. Математический маятник, его частота и период колебания. В каких положениях колебания маятника его кинетическая и потенциальная энергии имеют максимальные значения. Выведите формулу (5.18).
7. Вычислите относительную и абсолютную погрешности, запишите окончательный результат с учётом абсолютной и относительной погрешности.

Работа 9б. Определение ускорения силы тяжести с помощью физического маятника

Выполнение работы

Для определения ускорения силы тяжести пользуются оборотным маятником (рис. 5.5) – это стержень с грузами B_1, B_2, B_3 . Маятник можно подвешивать на одной из призм A или B . Грузы B_1 и B_2 закреплены неподвижно, груз B_3 можно перемещать, изменяя тем самым положение центр масс маятника.

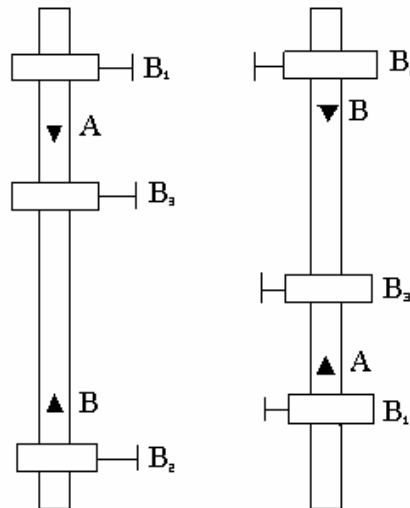


Рис. 5.5

Если найти такое положение груза B_3 , при котором периоды колебаний маятника окажутся одинаковыми при подвешивании его на призмах A и B , то расстояние между призмами будет равно приведённой длине $AB=L$.

Нужное положение груза B_3 определяют следующим образом. Закрепляют в одном из возможных для него крайних положений и с помощью секундометра измеряют продолжительность 40-50 колебаний маятника, подвешенного на призмах t_A и t_B . Затем, постепенно перемещая груз B_3 вдоль стержня, повторяют измерения для каждого его положения вплоть до крайнего.

По полученным данным строят две кривые – зависимости t_A и t_B от положения груза B_3 . Точка пересечения этих кривых показывает положение груза B_3 , при котором t_A и t_B , точки А и В являются сопряжёнными, а расстояние между ними, т.е. расстояние между вершинами призм, равно приведённой длине L .

Устанавливают груз на B_3 на найденное таким образом расстояние от начального его положения и определяют период, измеряя продолжительность 50-100 колебаний маятника:

$$T = \frac{t}{n},$$

где n – число колебаний маятника.

Расстояние между призмами А и В определяют линейкой и по формуле (5.22) рассчитывают ускорение силы тяжести g .

Результаты опытов и расчётов заносят в таблицу.

Контрольные вопросы

1. Схема установки и последовательность выполнения данной работы.
2. Сила тяжести. Вес тела. Состояние невесомости. Дайте определение ускорения силы тяжести. Как оно направлено? Покажите, что ускорение силы тяжести вблизи поверхности Земли является одинаковой для всех тел величиной.
3. Где ускорение силы тяжести больше: на экваторе или на полюсах земного шара? Почему? Как ускорение силы тяжести зависит от высоты над поверхностью Земли? Выведите формулу (5.14).
4. Физический маятник, его уравнение движения, частота и период. Центр качания и приведённая длина маятника.
5. Использование обратного маятника для определения ускорения силы тяжести. Выведите формулу (5.22) для экспериментального определения ускорения силы тяжести.
6. Вычислите относительную и абсолютную погрешности, запишите окончательный результат с учётом абсолютной погрешности.