С.Н. Зиненко

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Функции нескольких переменных

(теория, задачи, решения)

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

2004

УДК 517
ББК 22.1

Зиненко С.Н. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ: в 2-х частях. - Ч.2. Функции нескольких переменных. Учебное пособие. – Харьков: ХНУ, 2004. – 132 с.

В учебном пособии приводится материал по математическому анализу, изучаемый на практических занятиях во II семестре студентами I курса физического факультета. В соответствии с программой курса, материал разбит на 25 занятий, затрагивающих следующие темы: дифференцирование и интегрирование функций нескольких переменных, ряды и интегралы с параметром. В начале каждого занятия приводится минимально необходимый для решения и понимания задач теоретический материал. Практически все задачи сопровождаются подробным решением. Комментарии к решению задач настолько подробны, что изучение соответствующего материала возможно проводить самостоятельно, даже студентам, со слабой математической подготовкой. Задачи, предлагаемые для самостоятельной работы, полностью аналогичны аудиторным заданиям.

Для студентов физического и радиофизического факультетов.

Рецензенты:

Ю.В. Гандель – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики и вычислительной математики Харьковского национального университета им. В.Н. Каразина.

Утверждено к печати ученым советом физического факультета Харьковского национального университета им. В.Н. Каразина.

Содержание

Дифференцирование функций

Интегрирование функций

Ряды и интегралы с параметром

26. Частные производные и дифференциал функции

Условия.

<table>
<tr><td colspan="2">Найти частные производные $f'_x, \ldots$ и дифференциал df функции $f(x,\ldots)$.</td></tr>
<tr><td>№ 26.1. $z=\dfrac{x}{y}$
№ 26.2. $z=x^3\cdot\sqrt{y}+\sqrt[3]{x}\cdot y^5$
№ 26.3. $z=\operatorname{arctg}\left(x^2\cdot\sqrt[3]{y}\right)$
№ 26.4. $z=\ln\operatorname{tg}\dfrac{x^3}{y}$
№ 26.5. $z=x^y$
№ 26.6. $u=x^{\frac{y}{z}}$
№ 26.7. $u=\dfrac{\sin\left(xy^2\right)}{\cos z}$
№ 26.8. $u=x^{y^z}$</td><td>№ 26.1. $z=xy$
№ 26.2. $z=x^2\cdot\sqrt[4]{y}^3-\sqrt[5]{x}\cdot y^3$
№ 26.3. $z=\arcsin\dfrac{x^3}{\sqrt{y}}$
№ 26.4. $z=\operatorname{ctg}\ \arcsin\dfrac{y}{x^2}$
№ 26.5. $z=(\sin x)^{\cos y}$
№ 26.6. $u=z^{xy^2}$
№ 26.7. $u=\dfrac{\operatorname{tg}\left(x^2y\right)}{\operatorname{arctg}z}$
№ 26.8. $u=z^{y^x}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">№ 26.9. Заменяя приращение функции дифференциалом, найти приближенно следующие значения.</td></tr>
<tr><td>$1{,}1^{1{,}8}$</td><td>$\sqrt[3]{1{,}1}\cdot\sqrt[4]{0{,}8}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">№ 26.10. Насколько приближенно изменились периметр и площадь</td></tr>
<tr><td>параллелограмма, у которого стороны $x,\ \ y$ и угол между ними α изменились на $\Delta x,\ \ \Delta y,\ \ \Delta\alpha$.</td><td>треугольника, у которого стороны $x,\ \ y$ и угол между ними α изменились на $\Delta x,\ \ \Delta y,\ \ \Delta\alpha$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">№ 26.11. Насколько приближенно изменились площади основания, боковой поверхности и объем</td></tr>
<tr><td>кругового конуса, у которого радиус основания r и высота h изменились на $\Delta r,\ \ \Delta h$.</td><td>правильной треугольной пирамиды, у которой длина стороны основания a и высота h изменились на $\Delta a,\ \ \Delta h$.</td></tr>
</table>

Теория.

Частная производная функции $u=f(x,y,z,\ldots)$ *нескольких переменных по переменной* x *- это обычная производная, если на остальные переменные* $y,z,\ldots$ *временно смотреть как на фиксированные параметры (т.е. функцию воспринимать, как функцию одной переменной* x*)*

$$u'_x=\frac{\partial f(x,y,z,\ldots)}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y,z,\ldots)-f(x,y,z,\ldots)}{\Delta x}.$$

Функция $u=f(x,y,z,\ldots)$ *называется дифференцируемой в точке* $(x,y,z,\ldots)$, *если ее приращение допускает выделение главной линейной части*

$$\Delta u=\Delta f(x,y,z,\ldots)=f(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z,\ldots)-f(x,y,z,\ldots)=$$
$$=A\Delta x+B\Delta y+C\Delta z+\ldots+o\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2+\ldots}\right),$$

называемой дифференциалом функции

$$du=df(x,y,z,\ldots)=Adx+Bdy+Cdz+\ldots\qquad\left(dx\equiv\Delta x,\quad dy\equiv\Delta y,\quad dz\equiv\Delta z,\ldots\right).$$

Если $\exists$ *дифференциал* du, *то* $\exists$ *частные производные* u'_x, u'_y, $u'_z,\ldots$, *причем*

$$\boxed{du=u'_xdx+u'_ydy+u'_zdz+\ldots}$$

Правила дифференцирования функций нескольких переменных, связанные с арифметическими операциями, полностью аналогичны соответствующим правилам для функций одной переменной:

Теорема *(правила дифференцирования).*

Пусть

1) $u = f(x,...), \quad v = g(x,...)$

$\Rightarrow$

1) $(u+v)'_x = u'_x + v'_x \quad ... \qquad d(u+v) = du + dv$

2) $(u-v)'_x = u'_x - v'_x \quad ... \qquad d(u-v) = du - dv$

3) $(uv)'_x = u'_x v + u v'_x \quad ... \qquad d(uv) = du\ v + u\ dv$

4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'_x = \dfrac{u'_x v - u v'_x}{v^2} \quad ... \qquad d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{du\ v - u\ dv}{v^2}$

Решения.

№ 26.1.

$$z = \frac{x}{y} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z'_x = \left(\dfrac{x}{y}\right)'_x = \dfrac{1}{y} \\ z'_y = \left(\dfrac{x}{y}\right)'_y = \left(x \cdot y^{-1}\right)'_y = x \cdot \left(-y^{-2}\right) = -\dfrac{x}{y^2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z'_x = \dfrac{1}{y} \\ z'_y = -\dfrac{x}{y^2} \end{array}\right. \Rightarrow dz = \frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy$$

Сравнить.

$$z = \frac{x}{y} \quad \Rightarrow \quad dz = d\,\frac{x}{y} = \frac{dx \cdot y - x \cdot dy}{y^2} = \frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy \quad \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z'_x = \dfrac{1}{y} \\ z'_y = -\dfrac{x}{y^2} \end{array}\right.$$

№ 26.3.

$$z = \operatorname{arctg}\left(x^2 \cdot \sqrt[3]{y}\right) \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} z'_x = \left(\operatorname{arctg}\left(x^2 \cdot \sqrt[3]{y}\right)\right)'_x = \dfrac{1}{1+\left(x^2 \cdot \sqrt[3]{y}\right)^2}\left(x^2 \cdot \sqrt[3]{y}\right)'_x = \dfrac{1}{1+\left(x^2 \cdot \sqrt[3]{y}\right)^2} 2x \cdot \sqrt[3]{y} \\ z'_y = \left(\operatorname{arctg}\left(x^2 \cdot \sqrt[3]{y}\right)\right)'_y = \dfrac{1}{1+\left(x^2 \cdot \sqrt[3]{y}\right)^2}\left(x^2 \cdot \sqrt[3]{y}\right)'_y = \dfrac{1}{1+\left(x^2 \cdot \sqrt[3]{y}\right)^2}\left(x^2 \cdot y^{\frac{1}{3}}\right)'_y = \dfrac{1}{1+\left(x^2 \cdot \sqrt[3]{y}\right)^2} x^2 \cdot \left(\dfrac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}}\right) \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$

$$dz = \frac{1}{1+\left(x^2 \cdot y^{\frac{1}{3}}\right)^2} 2x \cdot y^{\frac{1}{3}} dx + \frac{1}{1+\left(x^2 \cdot y^{\frac{1}{3}}\right)^2} x^2 \cdot \left(\frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}}\right) dy$$

Сравнить.

$$d \operatorname{arctg}\left(x^2 \cdot y^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{1+\left(x^2 \cdot y^{\frac{1}{3}}\right)^2} d\left(x^2 \cdot y^{\frac{1}{3}}\right) =$$

$$= \frac{1}{1+\left(x^2 \cdot y^{\frac{1}{3}}\right)^2}\left(2xdx \cdot y^{\frac{1}{3}} + x^2 \cdot \left(\frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}}\right) dy\right) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z'_x = \dfrac{1}{1+\left(x^2 \cdot y^{\frac{1}{3}}\right)^2} 2x \cdot y^{\frac{1}{3}} \\ z'_y = \dfrac{1}{1+\left(x^2 \cdot y^{\frac{1}{3}}\right)^2} x^2 \cdot \left(\dfrac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}}\right) \end{array}\right.$$

№ 26.5.

$$z=x^y \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z'_x=\left(x^y\right)'_x=\left[\left(x^\alpha\right)'=\alpha\, x^{\alpha-1}\right]=yx^{y-1} \\ z'_y=\left(x^y\right)'_y=\left[\left(a^y\right)'=a^y\ln a\right]=x^y\ln x \end{array}\right. \Rightarrow\ dz=yx^{y-1}dx+x^y\ln x dy$$

Сравнить.

$$z=x^y\ \Rightarrow\ dx^y=de^{y\ln x}=e^{y\ln x}d(y\cdot\ln x)=x^y\left(dy\cdot\ln x+y\frac{1}{x}dx\right)=yx^{y-1}dx+x^y\ln x dy\ \Rightarrow\ \left[\begin{array}{l} z'_x=yx^{y-1} \\ z'_y=x^y\ln x \end{array}\right.$$

Замечание. Нахождение дифференциала df функции нескольких переменных $f(x,...)$ полностью аналогично случаю функции одной переменной $f(x)$. В то же время, при нахождении частных производных приходится “переключать” сознание с одной переменной на другую, воспринимая функцию нескольких переменных последовательно, как функцию одной какой-либо переменной, считая остальные – постоянными параметрами. В этом смысле – порой “проще” найти дифференциал и из него получить частные производные.

№ 26.6.

$u=x^{\frac{y}{z}}$

$$du=dx^{\frac{y}{z}}=de^{\frac{y}{z}\ln x}=e^{\frac{y}{z}\ln x}d\left(\frac{y}{z}\cdot\ln x\right)=x^{\frac{y}{z}}\left(d\frac{y}{z}\cdot\ln x+\frac{y}{z}\cdot d\ln x\right)=$$

$$=x^{\frac{y}{z}}\left(\frac{dy\cdot z-y\cdot dz}{z^2}\cdot\ln x+\frac{y}{z}\cdot\frac{1}{x}dx\right)=x^{\frac{y}{z}}\left(\frac{y}{xz}dx+\frac{1}{z}\ln x dy-\frac{y}{z^2}\ln x dz\right)= \qquad \Rightarrow \left[\begin{array}{l} u'_x=\frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1} \\ u'_y=\frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\ln x \\ u'_z=-\frac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\ln x \end{array}\right.$$

$$=\frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}dx+\frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\ln x dy-\frac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\ln x dz$$

№ 26.8.

$u=x^{y^z}$

$$du=dx^{y^z}=de^{y^z\ln x}=e^{y^z\ln x}d\left(y^z\ln x\right)=x^{y^z}\left(dy^z\cdot\ln x+y^z d\ln x\right)=$$

$$=x^{y^z}\left(de^{z\ln y}\cdot\ln x+y^z\frac{1}{x}dx\right)=x^{y^z}\left(e^{z\ln y}\left(dz\cdot\ln y+z\cdot\frac{1}{y}dy\right)\cdot\ln x+y^z\frac{1}{x}dx\right)= \qquad \Rightarrow \left[\begin{array}{l} u'_x=x^{y^z-1}y^z \\ u'_y=x^{y^z}y^{z-1}z\ln x \\ u'_z=x^{y^z}y^z\ln y\ln x \end{array}\right.$$

$$=x^{y^z-1}y^z dx+x^{y^z}y^{z-1}z\ln x dy+x^{y^z}y^z\ln y\ln x dz$$

№ 26.9.

$1{,}1^{1{,}8}=?$

Рассмотрим функцию двух переменных $z=f(x,y)=x^y$. Требуется ее вычислить приближенно, при:

$$\left[\begin{array}{l} x=1{,}1=1{,}0+0{,}1=x_0+\Delta x,\quad x_0=1,\quad \Delta x=0{,}1 \\ y=1{,}8=2-0{,}2=y_0+\Delta y,\quad y_0=2,\quad \Delta y=-0{,}2 \end{array}\right.$$

Из определения дифференциала

$$\Delta f(x_0,y_0)=df(x_0,y_0)+o\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right)\underset{\Delta x,\ \Delta y\approx 0}{\approx} df(x_0,y_0)=f_x'(x_0,y_0)\Delta x+f_y'(x_0,y_0)\Delta y$$

вытекает

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\approx f_x'(x_0,y_0)\Delta x+f_y'(x_0,y_0)\Delta y,$$

или

$$f(x,y)\approx f(x_0,y_0)+f_x'(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y'(x_0,y_0)(y-y_0)$$

Имеем (см. **№ 26.5.**)

$$z=x^y \quad\Rightarrow\quad dx^y=de^{y\ln x}=e^{y\ln x}d(y\cdot\ln x)=x^y\left(dy\cdot\ln x+y\frac{1}{x}dx\right)=yx^{y-1}dx+x^y\ln x dy$$

$$x^y\approx x_0^{y_0}+y_0x_0^{y_0-1}\left(x-x_0\right)+x_0^{y_0}\ln x_0\left(y-y_0\right)$$

$$1{,}1^{1{,}98}\approx 1{,}0^{2{,}0}+2{,}0\cdot 1{,}0^{2{,}0-1}\cdot 0{,}1+1{,}0^{2{,}0}\ln 1{,}0\cdot(-0{,}2)=1^2+2\cdot 1^1\cdot 0{,}1-1^2\cdot\ln 1\cdot 0{,}2=1+2\cdot 0{,}1-0{,}2\cdot 0=1{,}2$$

Сравнить с “точным” значением

$$1{,}18715337982877984245433538968 76\ldots$$

Замечание. По-существу, при приближенном вычислении функции, мы воспользовались формулой Тейлора с точностью до слагаемых **первого** порядка **малости**:

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+df(x_0,y_0)+o\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right)^{\mathbf{1}}\approx f(x_0,y_0)+df(x_0,y_0)$$

№ 26.10.

Имеем:

$$p=2(x+y),\quad S=x\cdot y\cdot\sin\alpha.$$

При изменении сторон $x\to x+\Delta x=x+dx,\ y\to y+\Delta y=y+dy$ и угла между ними $\alpha\to\alpha+\Delta\alpha=\alpha+d\alpha$ периметр p и площадь S изменятся приблизительно на

$\Delta p\approx dp=d\left(2x+2y\right)=2dx+2dy$;

$\Delta S\approx dS=d\left(xy\sin\alpha\right)=y\sin\alpha dx+x\sin\alpha dy+xy\cos\alpha d\alpha.$

№:26.11.

Имеем:

$$S=S_{OCH}=\pi r^2,\quad C=S_{\delta OK}=\pi r\sqrt{r^2+h^2},\quad V=V_{KOH}=\frac{1}{3}h\cdot S_{OCH}=\frac{1}{3}h\cdot\pi r^2.$$

При изменении радиуса основания $r\to r+\Delta r=r+dr$ и высоты $h\to h+\Delta h=h+dh$ площади основания S, боковой поверхности C и объем конуса V изменятся приблизительно на

$\Delta S\approx dS=d(\pi r^2)=2\pi r dr$;

$$\Delta C\approx dC=d\left(\pi r\sqrt{r^2+h^2}\right)=\pi dr\cdot\sqrt{r^2+h^2}+\pi r\frac{1}{\sqrt{r^2+h^2}}(rdr+hdh)=\pi\frac{2r^2+h^2}{\sqrt{r^2+h^2}}dr+\pi\frac{rh}{\sqrt{r^2+h^2}}dh$$

$$\Delta V\approx dV=d\left(\frac{1}{3}\pi r^2h\right)=\frac{1}{3}2\pi rhdr+\frac{1}{3}\pi r^2dh$$

27. Производная по направлению. Градиент

Условия.

№ 27.1. Высота поверхности над данной точкой местности (x,y) равна: $z = f(x,y)$. Найти:

1) крутизну подъема поверхности в точке $A(x_A, y_A)$ в направлении точки $B(x_B, y_B)$;
2) величину и направление наибольшего роста (убывания) высоты в точке $A(x_A, y_A)$;
3) скорость изменения высоты вдоль линии уровня.

$z=x^2+y^2,\quad A(1,2)\to B(4,-2)$	$z=\sqrt{x^2+y^2},\quad A(2,1)\to B(6,-2)$

№ 27.2. Температура неравномерно нагретой пластины в точке (x,y) равна: $u = f(x,y)$. Найти:

1) скорость изменения температуры в точке $A(x_A, y_A)$ в направлении точки $B(x_B, y_B)$;
2) величину и направление наибольшего роста (убывания) температуры в точке $A(x_A, y_A)$;
3) скорость изменения температуры вдоль изотермы.

$u=\sin\dfrac{x}{y},\quad A(\pi,-1)\to O(0,0)$	$u=\cos\left(xy^2\right),\quad A\left(\dfrac{\pi}{2},-1\right)\to B\left(\dfrac{3\pi}{2},0\right)$

№ 27.3. Потенциал электростатического поля, созданного неравномерно распределенным в некотором объеме зарядом, в точке пространства (x,y,z) равен: $u = f(x,y,z)$. Найти:

1) скорость изменения потенциала в точке $A(x_A, y_A, z_A)$ в направлении точки $B(x_B, y_B, z_B)$;
2) величину и направление наибольшего роста (убывания) потенциала в точке $A(x_A, y_A, z_A)$;
3) скорость изменения потенциала вдоль эквипотенциальной поверхности.

$u=xy^2-z^3,\quad A(2,3,4)\to B(4,-3,7)$	$u=x^3y^2-\sqrt{z},\quad A(1,-2,4)\to B(3,1,-2)$

№ 27.4. Найти величину и направление градиента функции.

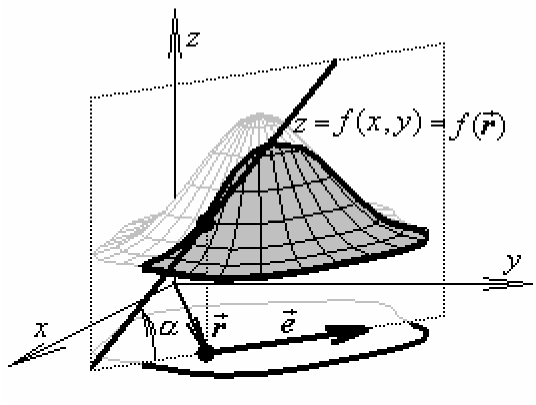
$u=-\gamma\dfrac{M}{\lvert\vec{r}\rvert}=-\gamma\dfrac{M}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$	$u=\dfrac{k}{2}\lvert\vec{r}\rvert^2=\dfrac{k}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)$

Теория.

Удобно рассматривать функцию нескольких переменных $z = f(x,y)$, *как функцию векторного аргумента* $z = f(\vec{r})$:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Придадим приращение $\Delta\vec{r} = \Delta t\,\vec{e}$ *радиус-вектору* $\vec{r}$ *точки* (x,y) *величины* Δt *по направлению единичного вектора* $\vec{e} = \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \end{bmatrix}$.



$f'_{\vec{e}}(\vec{r}) = \operatorname{tg}\alpha$

Производной функции $z = f(\vec{r})$ *в точке* $\vec{r}$ *по направлению* $\vec{e}$ *называется*

$$z'_{\vec{e}}(\vec{r}) = \frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(\vec{r}) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(\vec{r}+\Delta t\vec{e})-f(\vec{r})}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(x+\Delta t\, e_x, y+\Delta t\, e_y)-f(x,y)}{\Delta t}.$$

Геометрический смысл производной по направлению (в случае функции двух переменных) – тангенс угла между касательной прямой к сечению поверхности $z = f(\vec{r})$, *вертикальной плоскостью, параллельной направлению* $\vec{e}$, *и координатной плоскостью* xOy: $f'_{\vec{e}}(\vec{r}) = \operatorname{tg}\alpha$ *(крутизна подъема поверхности в точке* $\vec{r}$ *по направлению* $\vec{e}$*)*

Физический смысл – скорость изменения функции в точке $\vec{r}$ *по направлению* $\vec{e}$.

Если функция дифференцируема, то:

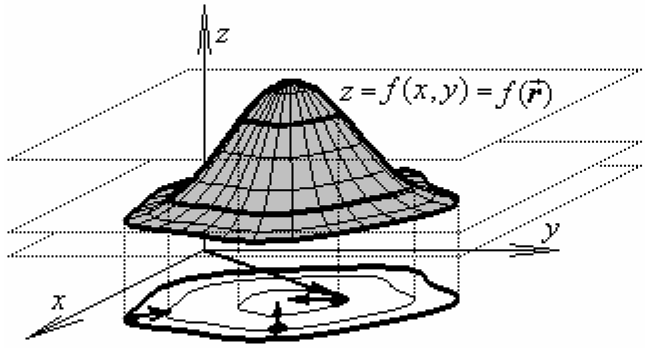
$$\boxed{z'_{\vec{e}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = z'_x\ e_x + z'_y\ e_y = (\operatorname{grad} z, \vec{\boldsymbol{e}})},\quad \text{где}\qquad \operatorname{grad} z = \begin{bmatrix} z'_x \\ z'_y \end{bmatrix}$$

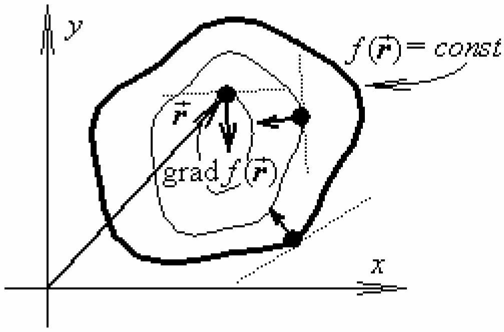
вектор градиента функции. Из геометрического и физического смысла производной по направлению вытекает геометрический и физический смысл градиента:

Теорема.

1) *направление* $\operatorname{grad} f(\vec{\boldsymbol{r}})$ – *направление* $\vec{\boldsymbol{e}}_{\max}$ *наибольшего роста функции* $u = f(\vec{\boldsymbol{r}})$*;*
2) *длина* $\operatorname{grad} f(\vec{\boldsymbol{r}})$ – *величина* $u'_{\vec{e}_{\max}}$ *наибольшего роста функции* $u = f(\vec{\boldsymbol{r}})$*;*
3) $\operatorname{grad} f(\vec{\boldsymbol{r}}) \perp$ *поверхности (линии) уровня* $u = f(\vec{\boldsymbol{r}}) = const$*, проходящей через точку* $\vec{\boldsymbol{r}}$.

$$\operatorname{grad} u = \vec{\boldsymbol{e}}_{\max}\ u'_{\vec{e}_{\max}}.$$





Решения.

№ 27.1.

1) Крутизна подъема поверхности $z = x^2 + y^2$ в точке $A(1,2)$ в направлении точки $B(4,-2)$ - это производная функции $z = x^2 + y^2$ в точке $A(1,2)$ по направлению $\vec{\boldsymbol{e}} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB}$:

$$z'_{\vec{e}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = (\operatorname{grad} z, \vec{\boldsymbol{e}}) = z'_x\ e_x + z'_y\ e_y.$$

Имеем:

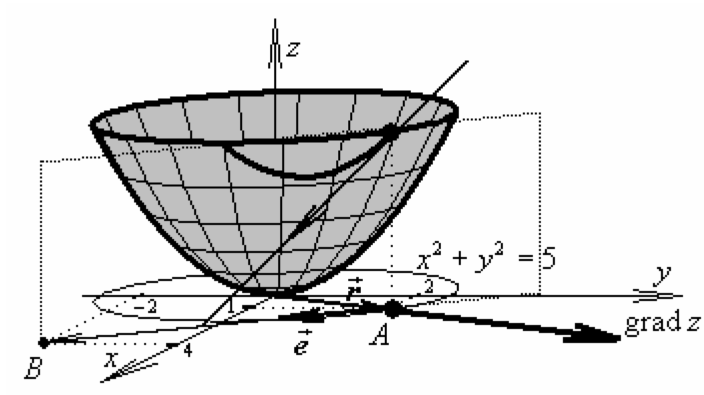
$$\begin{bmatrix} z'_x = 2x\big|_{(1,2)} = 2 \\ z'_y = 2y\big|_{(1,2)} = 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{grad} z = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Далее

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 4-1 \\ -2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5 \quad \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{e} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \begin{bmatrix} \dfrac{3}{5} \\ -\dfrac{4}{5} \end{bmatrix}$$



Наконец

$$z'_{\vec{e}}(1,2) = 2 \cdot \frac{3}{5} - 4 \cdot \frac{4}{5} = -2.$$

2) Величина и направление наибольшего роста (убывания) высоты в точке $A(1,2)$ – это величина и направление вектора градиента (антиградиента)

$$\operatorname{grad} z=\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad z'_{\vec{e}_{\max}}=|\operatorname{grad} z|=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}\quad,\quad \vec{\boldsymbol{e}}_{\max}=\frac{\operatorname{grad} z}{|\operatorname{grad} z|}=\begin{bmatrix}\dfrac{2}{\sqrt{20}}\\[2ex]\dfrac{4}{\sqrt{20}}\end{bmatrix}$$

3) Скорость изменения высоты вдоль линии уровня $z(x,y)=const=z(1,2)\ \Rightarrow\ x^2+y^2=5$, очевидно, равна нулю.

Замечание. Линия уровня $x^2+y^2=5$ – это окружность с центром в начале координат. Радиус-вектор $\vec{\boldsymbol{r}}$ точки $A(1,2)$ одновременно радиус этой окружности, а значит ,ей ортогонален. Остается обратить внимание, что $\operatorname{grad} z=2\vec{\boldsymbol{r}}$, т.е. $\operatorname{grad} f(\vec{\boldsymbol{r}})\perp$ линии уровня, проходящей через точку $\vec{\boldsymbol{r}}$.

№ 27.2.

1) Скорость изменения температуры $u=\sin\dfrac{x}{y}$ в точке $A(\pi,-1)$ по направлению точки $O(0,0)$ – это производная функции $u=\sin\dfrac{x}{y}$ в точке $A(\pi,-1)$ по направлению $\vec{\boldsymbol{e}}\uparrow\uparrow\overrightarrow{AO}$:

Имеем:

$$\left[\begin{aligned}&u'_x=\cos\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{y}\Big|_{(\pi,-1)}=-\cos(-\pi)=1\\&u'_y=\cos\frac{x}{y}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\Big|_{(\pi,-1)}=-\cos(-\pi)\pi=\pi\end{aligned}\right.\quad\Rightarrow\quad \operatorname{grad} u=\begin{bmatrix}1\\\pi\end{bmatrix}$$

Далее

$$\overrightarrow{AO}=\begin{bmatrix}0-\pi\\0-(-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\pi\\1\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad |\overrightarrow{AO}|=\sqrt{(-\pi)^2+1^2}=\sqrt{\pi^2+1}\quad\Rightarrow\quad \vec{\boldsymbol{e}}=\frac{\overrightarrow{AO}}{|\overrightarrow{AO}|}=\frac{1}{\sqrt{\pi^2+1}}\begin{bmatrix}-\pi\\1\end{bmatrix}$$

Наконец

$$u'_{\vec{e}}(\pi,-1)=\frac{1}{\sqrt{\pi^2+1}}\big(1\cdot(-\pi)+\pi\cdot 1\big)=0.$$

2) Величина и направление наибольшего роста (убывания) температуры в точке $A(\pi,-1)$ – это величина и направление вектора градиента (антиградиента)

$$\operatorname{grad} u=\begin{bmatrix}1\\\pi\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad u'_{\vec{e}_{\max}}=|\operatorname{grad} u|=\sqrt{1+\pi^2}\quad,\quad \vec{\boldsymbol{e}}_{\max}=\frac{\operatorname{grad} u}{|\operatorname{grad} u|}=\frac{1}{\sqrt{1+\pi^2}}\begin{bmatrix}1\\\pi\end{bmatrix}$$

Замечание. Направление антиградиента $\vec{\boldsymbol{e}}_{\min}=-\vec{\boldsymbol{e}}_{\max}$ поля температур – это направление потока тепла в данной точке, которое распространяется из мест с более высокой температурой в места с более низкой, т.е. в направлении наибольшего убывания температуры.

3) Скорость изменения температуры вдоль изотермы (линии уровня)

$$u=\sin\frac{x}{y}=const=u(\pi,1)\quad\Rightarrow\quad \sin\frac{x}{y}=0\quad\Rightarrow\quad \frac{x}{y}=\pi\,,$$

очевидно, равна нулю.

Замечание. Данное в примере направление $\vec{\boldsymbol{e}}$ – это направление вдоль изотермы.

№ 27.4.

$$\left[\begin{aligned} & u'_x=\left(-\gamma\frac{M}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)'_x=-\gamma M\left(\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)'_x=\gamma M\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x=\frac{\gamma Mx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} \\ & u'_y=...=\frac{\gamma My}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} \\ & u'_z=...=\frac{\gamma Mz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} \end{aligned}\right.$$

$\Rightarrow$

$$\operatorname{grad} u=\operatorname{grad}\left(-\gamma\frac{M}{|\vec{\boldsymbol{r}}|}\right)=\frac{\gamma M}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\gamma\frac{M\vec{\boldsymbol{r}}}{|\vec{\boldsymbol{r}}|^3}=\gamma\frac{M}{|\vec{\boldsymbol{r}}|^2}\frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{|\vec{\boldsymbol{r}}|}=\gamma\frac{M}{|\vec{\boldsymbol{r}}|^2}\vec{\boldsymbol{e}}_{\vec{r}},\quad \vec{\boldsymbol{e}}_{\vec{r}}=\frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{|\vec{\boldsymbol{r}}|}\uparrow\uparrow\vec{\boldsymbol{r}}$$

Итак, вектор градиента функции $u=-\gamma\frac{M}{|\vec{\boldsymbol{r}}|}=-\gamma\frac{M}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ направлен от начала координат к данной точке и убывает обратно пропорционально квадрату расстояния до начала координат.

Замечание. Гравитационное поле, создаваемое материальной точкой (массой M), находящейся в начале координат, характеризуется напряженностью

$$\vec{\boldsymbol{g}}(\vec{\boldsymbol{r}})=-\gamma\frac{M}{|\vec{\boldsymbol{r}}|^2}\vec{\boldsymbol{e}}_{\vec{r}},\quad \vec{\boldsymbol{e}}_{\vec{r}}=\frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{|\vec{\boldsymbol{r}}|},$$

равной силе, с которой это поле действует на материальную точку единичной массы, помещенной в точку пространства с радиус-вектором $\vec{\boldsymbol{r}}$.
С другой стороны, гравитационное поле характеризуется потенциалом

$$u(\vec{\boldsymbol{r}})=-\gamma\frac{M}{|\vec{\boldsymbol{r}}|},$$

равным работе силового поля. Работе, которую необходимо затратить для возвращения материальной точки единичной массы из данной точки пространства в “начальную” (в качестве “начальной”, для гравитационного поля удобно выбрать бесконечно удаленную точку).
Итак,

$$\vec{\boldsymbol{g}}(\vec{\boldsymbol{r}})=-\operatorname{grad} u(\vec{\boldsymbol{r}}).$$

Замечание. Потенциал бесконечно растяжимой пружины с коэффициентом упругости k, закрепленной в начале координат, в точке пространства с радиус-вектором $\vec{\boldsymbol{r}}$. равен

$$u(\vec{\boldsymbol{r}})=\frac{k}{2}|\vec{\boldsymbol{r}}|^2$$

(работа силового поля, которую необходимо затратить для возвращения материальной точки единичной массы из данной точки пространства в “начальную” (в качестве “начальной” удобно выбрать начало координат)).
Возникающая при растяжении пружины сила упругости в этой точке пространства равна

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{упр}=-k\vec{\boldsymbol{r}}=-\operatorname{grad} u(\vec{\boldsymbol{r}}).$$

28. Дифференцирование сложной функции

Условия.

Найти частные производные $f'_u, \ldots$ и дифференциал df сложной функции $f(x(u,\ldots),\ldots)$.	
№ 28.1. $y=y(x), \quad x=u\cdot v^2$	**№ 28.1.** $y=y(x), \quad x=u\cdot v^2$
№ 28.2. $z=z(x,y), \quad \left[\begin{array}{l} x=u^2 \\ y=\sqrt{u} \end{array}\right.$	**№ 28.2.** $z=z(x,y), \quad \left[\begin{array}{l} x=u^3 \\ y=\sqrt[3]{u} \end{array}\right.$
№ 28.3. $z=z(x,y), \quad \left[\begin{array}{l} x=uv \\ y=\dfrac{u}{v} \end{array}\right.$	**№ 28.3.** $z=z(x,y), \quad \left[\begin{array}{l} x=uv \\ y=\dfrac{1}{2}(u^2-v^2) \end{array}\right.$
№ 28.4. $z=z(x,y), \quad \left[\begin{array}{l} x=u+v^2+w^3 \\ y=u^3+v^2+w \end{array}\right.$	**№ 28.4.** $z=z(x,y), \quad \left[\begin{array}{l} x=u\cdot v^2\cdot w^3 \\ y=u^3\cdot v^2\cdot w \end{array}\right.$
№ 28.5. $f=f(x,y,z), \left[\begin{array}{l} x=u+v \\ y=u-v \\ z=u\cdot v \end{array}\right.$	**№ 28.5.** $f=f(x,y,z), \left[\begin{array}{l} x=u\cdot v \\ y=\dfrac{u}{v} \\ z=u+v \end{array}\right.$
Предполагая, что произвольная функция f достаточное число раз дифференцируема, проверить следующие равенства.	
№ 28.6. $x\cdot z'_x+y\cdot z'_y=0, \quad z=f\left(\dfrac{x}{y}\right)$	**№ 28.6**. $x\, z'_x-y\, z'_y=0, \quad z=f(xy)$
№ 28.7. $y\cdot z'_x+x\cdot z'_y=0, \quad z=f(x^2-y^2)$	**№ 28.7**. $y\, z'_x-x\, z'_y=0, \quad z=f(x^2+y^2)$
Решить уравнение, сделав замену переменных.	
№ 28.8. $x\, z'_x-y\, z'_y=0, \quad \left[\begin{array}{l} u=xy \\ v=\dfrac{x}{y} \end{array}\right.$	**№ 28.8**. $y\cdot z'_x+x\cdot z'_y=0, \quad \left[\begin{array}{l} u=\dfrac{1}{2}\left(x^2+y^2\right) \\ v=\dfrac{1}{2}\left(x^2-y^2\right) \end{array}\right.$
№ 28.9. $x\, z'_y-y\, z'_x=0, \quad \left[\begin{array}{l} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{array}\right.$	**№ 28.9.** $x\cdot z'_x+y\cdot z'_y=0, \quad \left[\begin{array}{l} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{array}\right.$

Теория.

Правило дифференцирования сложной функции нескольких переменных

$$f=f(x,y,z)=\!\!\rightarrow\left[\begin{array}{l} x=x(u,v,w) \\ y=y(u,v,w) \\ z=z(u,v,w) \end{array}\right]\!\rightarrow\!= f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))=f(u,v,w)$$

является дальнейшим обобщением соответствующего правила для функции одной переменной:

$$\boxed{f'_u=f'_x\, x'_u+f'_y\, y'_u+f'_z\, z'_u}, \quad f'_v=\ldots, \quad f'_w=\ldots$$

Решения.

№ 28.1.

$y=y(x)=y(x(u,v))=y(u,v)$

$$\left[\begin{array}{l} y'_u=y'_x\cdot x'_u= \\ \\ y'_v=y'_x\cdot x'_v= \end{array}\right. \to \left[x=uv^2\right] \to \left[\begin{array}{l} =y'_x\cdot\left(uv^2\right)'_u=y'_x\cdot v^2 \\ \\ =y'_x\cdot\left(uv^2\right)'_v=y'_x\cdot u\cdot 2v \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\ dy=y'_u du+y'_v dv=y'_x\cdot v^2 du+y'_x\cdot u\cdot 2vdv$$

Сравнить.

$$dy=y'_x dx=\ \to\ \left[x=uv^2\right]\ \to\ =y'_x d\left(uv^2\right)=y'_x(du\cdot v^2+u\cdot 2vdv)=y'_x\cdot v^2 du+y'_x\cdot u\cdot 2vdv$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l} y'_u=y'_x\cdot v^2 \\ \\ y'_v=y'_x\cdot u\cdot 2v \end{array}\right.$$

№ 28.2.

$z=z(x,y)=z(x(u),y(u))=z(u)$

$$\left[z'_u=z'_x\cdot x'_u+z'_y\cdot y'_u=\ \to \left[\begin{array}{l} x=u^2 \\ y=\sqrt{u} \end{array}\right] \to\ =z'_x\cdot\left(u^2\right)'_u+z'_y\cdot\left(\sqrt{u}\right)'_u=z'_x\cdot 2u+z'_y\cdot\frac{1}{2\sqrt{u}}\right.$$

$$\Rightarrow\quad dz=z'_u du=\left(z'_x\cdot 2u+z'_y\cdot\frac{1}{2\sqrt{u}}\right)du$$

Сравнить.

$$dz=z'_x dx+z'_y dy=\quad\to\quad \left[\begin{array}{l} x=u^2 \\ y=\sqrt{u} \end{array}\right]\quad\to\quad =z'_x d\left(u^2\right)+z'_y d\left(\sqrt{u}\right)=\left(z'_x 2u+z'_y\frac{1}{2\sqrt{u}}\right)du$$

$$\Rightarrow\quad\left[z'_u=z'_x\cdot 2u+z'_y\cdot\frac{1}{2\sqrt{u}}\right.$$

№ 28.3.

$z=z(x,y)=z(x(u,v),y(u,v))=z(u,v)$

$$\left[\begin{array}{l} z'_u=z'_x\ x'_u+z'_y\ y'_u= \\ \\ z'_v=z'_x\ x'_v+z'_y\ y'_v= \end{array}\right.\quad\to\quad\left[\begin{array}{l} x=uv \\ y=\dfrac{u}{v} \end{array}\right]\quad\to\quad\left[\begin{array}{l} =z'_x\ (uv)'_u+z'_y\ \left(\dfrac{u}{v}\right)'_u=z'_x\ v+z'_y\ \dfrac{1}{v} \\ \\ =z'_x\ (uv)'_v+z'_y\ \left(\dfrac{u}{v}\right)'_v=z'_x\ u-z'_y\ \dfrac{u}{v^2} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\quad dz=z'_u du+z'_v dv=\left(z'_x\ v+z'_y\ \frac{1}{v}\right)du+\left(z'_x\ v-z'_y\ \frac{u}{v^2}\right)dv$$

Сравнить.

$$dz=z'_x dx+z'_y dy=\quad\to\quad\left[\begin{array}{l} x=uv \\ y=\dfrac{u}{v} \end{array}\right]\ \to\ =z'_x d(uv)+z'_y d\left(\frac{u}{v}\right)=z'_x(du\ v+u\ dv)+z'_y\left(\frac{du\ v-u\ dv}{v^2}\right)=$$

$$=\left(z'_x\ v+z'_y\ \frac{1}{v}\right)du+\left(z'_x\ u-z'_y\ \frac{u}{v^2}\right)dv$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l} z'_u=z'_x\ v+z'_y\ \dfrac{1}{v} \\ \\ z'_v=z'_x\ u-z'_y\ \dfrac{u}{v^2} \end{array}\right.$$

№ 28.4.

$z=z(x,y)=z(x(u,v,w),y(u,v,w))=z(u,v,w)$

$$\left[\begin{array}{l} z'_u=z'_x\ x'_u\ +z'_y\ y'_u= \\ z'_v=z'_x\ x'_v\ +z'_y\ y'_v=\to \\ z'_w=z'_x\ x'_w+z'_y\ y'_w= \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x=u+v^2+w^3 \\ y=u^3+v^2+w \end{array}\right]\to \left[\begin{array}{l} =z'_x\ \left(u+v^2+w^3\right)'_u+z'_y\ \left(u^3+v^2+w\right)'_u=z'_x\cdot 1+z'_y\cdot 3u^2 \\ =z'_x\ \left(u+v^2+w^3\right)'_v+z'_y\ \left(u^3+v^2+w\right)'_v=z'_x\cdot 2v+z'_y\cdot 2v \\ =z'_x\ \left(u+v^2+w^3\right)'_w+z'_y\ \left(u^3+v^2+w\right)'_w=z'_x\cdot 3w^2+z'_y\cdot 1 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\quad dz=z'_u du+z'_v dv+z'_w dw=\left(z'_x\cdot 1+z'_y\cdot 3u^2\right)du+\left(z'_x\cdot 2v+z'_y\cdot 2v\right)dv+\left(z'_x\cdot 3w^2+z'_y\cdot 1\right)dw$$

Сравнить.

$$dz=z'_x dx+z'_y dy=\ \to\ \left[\begin{array}{l} x=u+v^2+w^3 \\ y=u^3+v^2+w \end{array}\right]\ \to\ =z'_x d\left(u+v^2+w^3\right)+z'_y d\left(u^3+v^2+w\right)=$$

$$=z'_x\left(du+2vdv+3w^2dw\right)+z'_y\left(3u^2du+2vdv+dw\right)=\left(z'_x\cdot 1+z'_y\cdot 3u^2\right)du+\left(z'_x\cdot 2v+z'_y\cdot 2v\right)dv+\left(z'_x\cdot 3w^2+z'_y\cdot 1\right)dw$$

$$\Rightarrow\ \left[\begin{array}{l} z'_u=z'_x\cdot 1+z'_y\cdot 3u^2 \\ z'_v=z'_x\cdot 2v+z'_y\cdot 2v \\ z'_w=z'_x\cdot 3w^2+z'_y\cdot 1 \end{array}\right.$$

№ 28.5.

$f=f(x,y,z)=f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))=f(u,v)$

$$\left[\begin{array}{l} f'_u=f'_x\ x'_u+f'_y\ y'_u+f'_z z'_u= \\ f'_v=f'_x\ x'_v+f'_y\ y'_v+f'_z z'_v= \end{array}\right.\to \left[\begin{array}{l} x=u+v \\ y=u-v \\ z=u\cdot v \end{array}\right]\to \left[\begin{array}{l} =f'_x\ (u+v)'_u+f'_y\ (u-v)'_u+f'_z(uv)'_u=f'_x+f'_y+vf'_z \\ =f'_x\ (u+v)'_v+f'_y\ (u-v)'_v+f'_z(uv)'_v=f'_x-f'_y+uf'_z \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\quad df=f'_u du+f'_v dv=\left(f'_x+f'_y+vf'_z\right)du+\left(f'_x-f'_y+uf'_z\right)dv$$

Сравнить.

$$df=f'_x dx+f'_y dy+f'_z dz=\ \to\ \left[\begin{array}{l} x=u+v \\ y=u-v \\ z=u\cdot v \end{array}\right]\ \to\ =f'_x d(u+v)+f'_y d(u-v)+f'_z d(u\cdot v)=$$

$$=f'_x(du+dv)+f'_y(du-dv)+f'_z(du\cdot v+u\cdot dv)=\left(f'_x+f'_y+vf'_z\right)du+\left(f'_x-f'_y+uf'_z\right)dv$$

$$\Rightarrow\ \left[\begin{array}{l} f'_u=f'_x+f'_y+vf'_z \\ f'_v=f'_x-f'_y+uf'_z \end{array}\right.$$

№ 28.6.

$$z=f\left(\frac{x}{y}\right)\to\left[u=u(x,y)=\frac{x}{y}\right]\to z=z(u)=z(u(x,y))=z(x,y)\quad\Rightarrow\quad\left[\begin{array}{l} z'_x=z'_u u'_x=z'_u\,\dfrac{1}{y}\\ \\ z'_y=z'_u u'_y=-z'_u\,\dfrac{x}{y^2}\end{array}\right.$$

$\Rightarrow$

$$x\cdot z'_x+y\cdot z'_y=x\cdot z'_u\,\frac{1}{y}-y\cdot z'_u\,\frac{x}{y^2}=z'_u\left(x\cdot\frac{1}{y}-y\cdot\frac{x}{y^2}\right)=z'_u\cdot 0=0$$

№ 28.7.

$$z=f\left(x^2-y^2\right)\to\left[u=u(x,y)=x^2-y^2\right]\to z=z(u)=z(u(x,y))=z(x,y)\Rightarrow\left[\begin{array}{l} z'_x=z'_u u'_x=z'_u\,2x\\ z'_y=z'_u u'_y=-z'_u\,2y\end{array}\right.$$

$\Rightarrow$

$$y\cdot z'_x+x\cdot z'_y=y\cdot z'_u\,2x-x\cdot z'_u\,2y=z'_u\left(y\cdot 2x-x\cdot 2y\right)=z'_u\cdot 0=0$$

№ 28.8.

Необходимо найти функцию $z=z(x,y)$, являющуюся решением дифференциального уравнения:

$$x\,z'_x-y\,z'_y=0.$$

Предлагается сделать замену переменных, перейдя от “старых” переменных (x,y) к новым (u,v). Для этого надо найти выражение “старых” производных z'_x, z'_y через “новые” z'_u, z'_v.

Поскольку по условию явно выражаются “новые” переменные через “старые”,

$$\left[\begin{array}{l} u=xy\\ v=\dfrac{x}{y}\end{array}\right.,$$

то рассмотрим сложную функцию от “старых” переменных

$$z(u(x,y),v(x,y))=z(x,y).$$

Имеем:

$$\left[\begin{array}{l} z'_x=z'_u\;u'_x+z'_v\;v'_x=z'_u\;y+z'_v\;\dfrac{1}{y}\\ \\ z'_y=z'_u\;u'_y+z'_v\;v'_y=z'_u\;x-z'_v\;\dfrac{x}{y^2}\end{array}\right.$$

Подставим полученные выражения “старых” производных через “новые” в дифференциальное уравнение:

$$x\left(z'_u\;y+z'_v\;\frac{1}{y}\right)-y\left(z'_u\;x-z'_v\;\frac{x}{y^2}\right)=0\quad\Rightarrow\quad 2\,z'_v\,\frac{x}{y}=0\quad\Rightarrow\quad 2\,v\,z'_v=0\quad\Rightarrow\quad z'_v=0$$

$\Rightarrow$

$$z=const(u)=f(u)=f(xy)$$

№ 28.8.

Необходимо найти функцию $z = z(x, y)$, являющуюся решением дифференциального уравнения:

$$x\, z'_y - y\, z'_x = 0.$$

Предлагается сделать замену переменных, перейдя от “старых” переменных (x, y) к новым (r, φ). Для этого надо найти выражение “старых” производных z'_x, z'_y через “новые” z'_r, z'_φ.

Поскольку по условию явно выражаются “старые” переменные через “новые”,

$$\left[\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}\right.,$$

то рассмотрим сложную функцию от “новых” переменных

$$z(x(r,\varphi), y(r,\varphi)) = z(r,\varphi).$$

Имеем:

$$\left[\begin{aligned} z'_r &= \quad z'_x\cos\varphi + z'_y\sin\varphi \\ z'_\varphi &= -z'_x r\sin\varphi + z'_y r\cos\varphi \end{aligned}\right.$$

Получены явные выражения “новых” производных через “старые”. Одновременно эти соотношения можно рассматривать как систему двух уравнений относительно двух неизвестных z'_x, z'_y, решив которую, найдем выражение “старых” производных через “новые”.

Однако в данном примере можно без этого обойтись, заметив, что производная

$$z'_\varphi = -z'_x r\sin\varphi + z'_y r\cos\varphi = -z'_x\, y + z'_y\, x = x\, z'_y - y\, z'_x$$

совпадает с левой частью уравнения:

$$x\, z'_y - y\, z'_x = 0 \quad \Rightarrow \quad z'_\varphi = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$z = const(r) = \left[r = \sqrt{x^2 + y^2} \right] = f(x^2 + y^2)$$

29. Производные и дифференциалы высшего порядка. Формула Тейлора

Условия.

Проверить равенство смешанных производных.	
№ 29.1 $z=x^3\sqrt{y}$ **№ 29.2** $f=\dfrac{\sin(x^3y^2)}{\cos z}$	**№ 29.1** $z=\sqrt[3]{x}\,y^2$ **№ 29.2** $f=\dfrac{\arcsin(y^3z^2)}{\operatorname{arctg} x}$
Воспользовавшись формулой Тейлора до второго порядка малости, найти приближенно следующие значения.	
№ 26.9. $1{,}1^{1{,}8}$	**№ 26.9.** $\sqrt[3]{1{,}1}\cdot\sqrt[4]{0{,}98}$
Найти производные $f''_{xx},\ldots$ и дифференциал d^2f функции $f(x,\ldots)$.	
№ 29.3 $z=x^2\sin y$	**№ 29.3** $z=\dfrac{\sqrt{x}}{\cos y}$
Найти производные $f''_{uu},\ldots$ и дифференциал d^2f сложной функции $f(x(u,\ldots),\ldots)$	
№ 29.4. $z=z(x,y),\quad \left[\begin{array}{l}x=u^2v\\ y=uv^2\end{array}\right.$	**№ 29.4**. $z=z(x,y),\quad \left[\begin{array}{l}x=uv\\ y=\dfrac{u}{v}\end{array}\right.$
Решить уравнение, сделав замену переменных.	
№ 29.5. $z''_{xx}-2z''_{xy}+z''_{yy}=0,\quad \left[\begin{array}{l}u=x+y\\ v=\dfrac{1}{2}(x^2-y^2)\end{array}\right.$ **№ 29.6.** $x^2z''_{xx}+2xyz''_{xy}+y^2z''_{yy}=0,\quad \left[\begin{array}{l}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\end{array}\right.$	**№ 29.5**. $z''_{xx}=z''_{yy},\quad \left[\begin{array}{l}u=x+y\\ v=x-y\end{array}\right.$ **№ 29.6.** $-xy\,z''_{xx}+(x^2-y^2)z''_{xy}+xy\,z''_{yy}+{}$ $+yz'_x+xz'_y=0,\quad \left[\begin{array}{l}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\end{array}\right.$

Теория.

Частные производные высшего порядка:

$$
u \nearrow\searrow \left[\begin{array}{l}
u'_x \nearrow\searrow \left[\begin{array}{l}
(u'_x)'_x=u''_{xx} \nearrow\searrow \left[\begin{array}{l}(u''_{xx})'_x=u'''_{xxx} \nearrow\searrow \ldots\\ (u''_{xx})'_y=\underline{u'''_{xxy}} \nearrow\searrow \ldots\end{array}\right.\\[2ex]
(u'_x)'_y=\overset{\frown}{u''_{xy}} \nearrow\searrow \left[\begin{array}{l}(u''_{xy})'_x=\underline{u'''_{xyx}} \nearrow\searrow \ldots\\ (u''_{xy})'_y=\underline{\underline{u'''_{xyy}}} \nearrow\searrow \ldots\end{array}\right.
\end{array}\right.\\[6ex]
u'_y \nearrow\searrow \left[\begin{array}{l}
(u'_y)'_x=\overset{\frown}{u''_{yx}} \nearrow\searrow \left[\begin{array}{l}(u''_{yx})'_x=\underline{u'''_{yxx}} \nearrow\searrow \ldots\\ (u''_{yx})'_y=\underline{\underline{u'''_{yxy}}} \nearrow\searrow \ldots\end{array}\right.\\[2ex]
(u'_y)'_y=u''_{yy} \nearrow\searrow \left[\begin{array}{l}(u''_{yy})'_x=\underline{\underline{u'''_{yyx}}} \nearrow\searrow \ldots\\ (u''_{yy})'_y=u'''_{yyy} \nearrow\searrow \ldots\end{array}\right.
\end{array}\right.
\end{array}\right.
$$

Теорема.

*Если смешанные производные непрерывны, то частное дифференцирование функции нескольких переменных **не зависит** от порядка дифференцирования:*

$$\overset{\frown}{u''_{xy}}=\overset{\frown}{u''_{yx}}\ ;\quad \underline{u'''_{xxy}}=\underline{u'''_{xyx}}=\underline{u'''_{yxx}}\ ,\quad \underline{\underline{u'''_{xyy}}}=\underline{\underline{u'''_{yxy}}}=\underline{\underline{u'''_{yyx}}}\ ;\ \ldots$$

При выполнении этого условия дифференциалы высшего порядка равны:

$u\to du=u'_x dx+u'_y dy\to$

$$\to d^2u=d(du)=u''_{xx}dx^2+2u''_{xy}dxdy+u''_{yy}dy^2\to$$

$$\to d^3u=d(d^2u)=u'''_{xxx}dx^3+3u'''_{xxy}dx^2dy+3u'''_{xyy}dxdy^2+u'''_{yyy}dy^3\to\ldots$$

*Формула **Тейлора** для функций нескольких переменных наиболее простой вид имеет в “дифференциальной” форме, инвариантной относительно числа переменных*

$$\boxed{\Delta u=\frac{du}{1!}+\frac{d^2u}{2!}+\ldots+\frac{d^nu}{n!}+o(\|d\vec{\mathbf{x}}\|^n)}$$

Решения.

№ 29.1

$$z=x^3\sqrt{y}=x^3y^{\frac{1}{2}}\Rightarrow\left[\begin{aligned}&z'_x=\left(x^3y^{\frac{1}{2}}\right)'_x=3x^2y^{\frac{1}{2}}\\&z'_y=\left(x^3y^{\frac{1}{2}}\right)'_y=\frac{1}{2}x^3y^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}\right.\Rightarrow\left[\begin{aligned}&z''_{xy}=\left(3x^2y^{\frac{1}{2}}\right)'_y=\frac{3}{2}x^2y^{-\frac{1}{2}}\\&z''_{yx}=\left(\frac{1}{2}x^3y^{-\frac{1}{2}}\right)'_x=\frac{3}{2}x^2y^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}\right.\Rightarrow\ z''_{xy}=z''_{yx}$$

№ 29.2

$$f=\frac{\sin(x^3\ y^2)}{\cos z}=\sin(x^3\ y^2)\cos^{-1}z\quad\Rightarrow$$

$$\left[\begin{aligned}&f'_x=\left(\sin(x^3\ y^2)\cos^{-1}z\right)'_x=3x^2\cos(x^3\ y^2)\cos^{-1}z\\&f'_y=\left(\sin(x^3\ y^2)\cos^{-1}z\right)'_y=2y\cos(x^3\ y^2)\cos^{-1}z\ \Rightarrow\\&f'_z=\left(\sin(x^3\ y^2)\cos^{-1}z\right)'_z=\sin(x^3\ y^2)\cos^{-2}z\sin z\end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned}&\left[\begin{aligned}&f''_{xy}=\left(3x^2\cos(x^3\ y^2)\cos^{-1}z\right)'_y=-6x^2y\sin(x^3\ y^2)\cos^{-1}z\\&f''_{yx}=\left(2y\cos(x^3\ y^2)\cos^{-1}z\right)'_x=-6x^2y\sin(x^3\ y^2)\cos^{-1}z\end{aligned}\right.\Rightarrow f''_{xy}=f''_{yx}\\&\left[\begin{aligned}&f''_{yz}=\left(2y\cos(x^3\ y^2)\cos^{-1}z\right)'_z=2y\cos(x^3\ y^2)\cos^{-2}z\sin z\\&f''_{zy}=\left(\sin(x^3\ y^2)\cos^{-2}z\sin z\right)'_y=2y\cos(x^3\ y^2)\cos^{-2}z\sin z\end{aligned}\right.\Rightarrow f''_{yz}=f''_{zy}\\&\left[\begin{aligned}&f''_{zx}=\left(\sin(x^3\ y^2)\cos^{-2}z\sin z\right)'_x=3x^2\cos(x^3\ y^2)\cos^{-2}z\sin z\\&f''_{xz}=\left(3x^2\cos(x^3\ y^2)\cos^{-1}z\right)'_z=3x^2\cos(x^3\ y^2)\cos^{-2}z\sin z\end{aligned}\right.\Rightarrow f''_{zx}=f''_{xz}\end{aligned}\right.$$

№ 29.3

$$z=x^2\sin y \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z'_x=\left(x^2\sin y\right)'_x=2x\sin y \\ z'_y=\left(x^2\sin y\right)'_y=x^2\cos y \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z''_{xx}=\left(2x\sin y\right)'_x=2\sin y \\ z''_{xy}=\left(2x\sin y\right)'_y=2x\cos y \\ z''_{yy}=\left(x^2\cos y\right)'_y=-x^2\sin y \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$d^2z=z''_{xx}dx^2+2z''_{xy}dxdy+z''_{yy}dy^2=2\sin y dx^2+4x\cos y dxdy-x^2\sin y dy^2$$

Сравнить.

$$z=x^2\sin y \Rightarrow dz=d\left(x^2\sin y\right)=d\left(x^2\right)\sin y+x^2d\left(\sin y\right)=2xdx\sin y+x^2\cos y dy \Rightarrow$$

$$d^2z=d(dz)=d\left(2x\sin ydx+x^2\cos ydy\right)=d\left(2x\sin ydx\right)+d\left(x^2\cos ydy\right)=$$

$$=d\left(2x\sin y\right)dx+d\left(x^2\cos y\right)dy=\left(2\sin ydx+2x\cos ydy\right)dx+\left(2x\cos ydx-x^2\sin ydy\right)dy=$$

$$=2\sin ydx^2+4x\cos ydxdy-x^2\sin ydy^2$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} z''_{xx}=2\sin y \\ z''_{xy}=2x\cos y \\ z''_{yy}=-x^2\sin y \end{array}\right.$$

№ 26.9.

$1,1^{1,8}=?$

Рассмотрим функцию двух переменных $z=f(x,y)=x^y$. Требуется ее вычислить приближенно, при:

$$\left[\begin{array}{l} x=1,1=1,0+0,1=x_0+\Delta x, \quad x_0=1, \quad \Delta x=0,1 \\ y=1,8=1-0,2=y_0+\Delta y, \quad y_0=2, \quad \Delta y=-0,2 \end{array}\right.$$

с точностью до $\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right)^2$.

Воспользуемся формулой Тейлора:

$$\boxed{\Delta f(x_0,y_0)=df(x_0,y_0)+\frac{1}{2}d^2f(x_0,y_0)+o\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right)^2},$$

так что

$$f(x,y)\approx f(x_0,y_0)+$$
$$+f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$
$$+f''_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2+2f''_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)+f''_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2$$

Имеем (см. **№ 26.5.**)

$$z=x^y \Rightarrow \left[\begin{array}{l} dz=dx^y=de^{y\ln x}=e^{y\ln x}d(y\cdot\ln x)=x^y\left(dy\cdot\ln x+y\frac{1}{x}dx\right)=x^{y-1}ydx+x^y\ln xdy \\ d^2z=d\left(dz\right)=d\left(yx^{y-1}dx+x^y\ln xdy\right)=\ldots=x^{y-2}y(y-1)dx^2+2x^{y-1}(1+y\ln x)dxdy+x^y\ln^2xdy \end{array}\right.$$

$$1,1^{1,98}\approx 1,0^{2,0}+$$

$$+1,0^{2,0-1}\cdot 2,0\cdot 0,1+1,0^{2,0}\cdot\ln 1,0\cdot(-0,2)+$$

$$+1,0^{2,0-2}\cdot 2,0\cdot(2,0-1)\cdot 0,1^2+2\cdot 1,0^{2,0-1}(1+2,0\cdot\ln 1,0)\cdot 0,1\cdot(-0,2)+1,0^{2,0}\cdot\ln^2 1,0\cdot(-0,2)=1,18$$

Сравнить с “точным” значением

$$1,18715337982877984245433538968 76\ldots$$

Замечание. Вычисление функции с точностью до второго знака после запятой, разумеется, не означает в общем случае, что в формуле Тейлора надо брать слагаемые до второго порядка малости относительно $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ (т.е. до второго дифференциала включительно). Однако в данном примере, для наглядности, приращения аргументов имеют порядок $\Delta x,\ \Delta y \sim 0{,}1$, так что $df \sim 0{,}1$, $d^2 f \sim 0{,}1^2$ и т.д.

№ 29.5.

$$z=z(x,y)=\left[\begin{array}{l} x=x(u,v)=u^2v \\ y=y(u,v)=uv^2 \end{array}\right]=z(x(u,v),y(u,v))=z(u,v)$$

$\Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} z'_u=z'_x\ x'_u+z'_y\ y'_u=z'_x\ \left(u^2v\right)'_u+z'_y\ \left(uv^2\right)'_u=z'_x\ 2uv+\ z'_y\ v^2 \\ \\ z'_v=z'_x\ x'_v+z'_y\ y'_v=z'_x\ \left(u^2v\right)'_v+z'_y\ \left(uv^2\right)'_v=z'_x\ u^2+\ z'_y\ 2uv \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} z''_{uu}=\left(z'_u\right)'_u=\left(z'_x\ 2uv+z'_y\ v^2\right)'_u=\left(z'_x\right)'_u 2uv+z'_x\ 2v+\left(z'_y\right)'_u v^2 \\ \\ z''_{uv}=\left(z'_u\right)'_v=\left(z'_x\ 2uv+z'_y\ v^2\right)'_v=\left(z'_x\right)'_v 2uv+z'_x\ 2u+\left(z'_y\right)'_v v^2+z'_y\ 2v \\ \\ z''_{vv}=\left(z'_v\right)'_v=\left(z'_x\ u^2+z'_y\ 2uv\right)'_v=\left(z'_x\right)'_v u^2+\left(z'_y\right)'_v 2uv+z'_y\ 2u \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} z''_{uu}=\left(z''_{xx}\ 2uv+z''_{xy}\ v^2\right)2uv+z'_x\ 2v+\left(z''_{yx}\ 2uv+z''_{yy}\ v^2\right)v^2 \\ z''_{uv}=\left(z''_{xx}\ u^2+z''_{xy}\ 2uv\right)2uv+z'_x\ 2u+\left(z''_{yx}\ u^2+z''_{yy}\ 2uv\right)v^2+z'_y\ 2v \\ z''_{vv}=\left(z''_{xx}\ u^2+z''_{xy}\ 2uv\right)u^2+\left(z''_{yx}\ u^2+z''_{yy}\ 2uv\right)2uv+z'_y\ 2u \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$

$$d^2z=z''_{uu}du^2+2z''_{uv}dudv+z''_{vv}dv^2=$$

$$=\left(\left(z''_{xx}\ 2uv+z''_{xy}\ v^2\right)2uv+z'_x\ 2v+\left(z''_{yx}\ 2uv+z''_{yy}\ v^2\right)v^2\right)du^2+$$

$$+2\left(\left(z''_{xx}\ u^2+z''_{xy}\ 2uv\right)2uv+z'_x\ 2u+\left(z''_{yx}\ u^2+z''_{yy}\ 2uv\right)v^2+z'_y\ 2v\right)dudv+$$

$$+\left(\left(z''_{xx}\ u^2+z''_{xy}\ 2uv\right)u^2+\left(z''_{yx}\ u^2+z''_{yy}\ 2uv\right)2uv+z'_y\ 2u\right)dv^2$$

№ 29.7.

Необходимо найти функцию $z = z(x, y)$, являющуюся решением дифференциального уравнения:

$$z''_{xx} - 2z''_{xy} + z''_{yy} = 0.$$

Предлагается сделать замену переменных, перейдя от “старых” переменных (x, y) к новым (u, v). Для этого надо найти выражение “старых” производных z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy} через “новые” z''_{uu}, z''_{uv}, z''_{vv}.

Поскольку по условию явно выражаются “новые” переменные через “старые”,

$$\left[\begin{array}{l} u = x + y \\ v = \dfrac{1}{2}(x^2 - y^2) \end{array}\right.$$

то рассмотрим сложную функцию от “старых” переменных

$$z(u(x, y), v(x, y)) = z(x, y).$$

Имеем:

$$\left[\begin{array}{l} z'_x = z'_u\ u'_x + z'_v\ v'_x = z'_u \cdot 1 + z'_v\ x = z'_u + xz'_v \\ z'_y = z'_u\ u'_y + z'_v\ v'_y = z'_u \cdot 1 - z'_v\ y = z'_u - yz'_v \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} z''_{xx} = \left(z'_x\right)'_x = \left(z'_u + xz'_v\right)'_x = \left(z'_u\right)'_x + x\left(z'_v\right)'_x + z'_v = \Big(\left(z'_u\right)'_u + x\left(z'_u\right)'_v\Big) + x\Big(\left(z'_v\right)'_u + x\left(z'_v\right)'_v\Big) + z'_v \\ z''_{xy} = \left(z'_x\right)'_y = \left(z'_u + xz'_v\right)'_y = \left(z'_u\right)'_y + x\left(z'_v\right)'_y = \Big(\left(z'_u\right)'_u - y\left(z'_u\right)'_v\Big) + x\Big(\left(z'_v\right)'_u - y\left(z'_v\right)'_v\Big) \\ z''_{yy} = \left(z'_y\right)'_y = \left(z'_u - yz'_v\right)'_y = \left(z'_u\right)'_y - y\left(z'_v\right)'_y - z'_v = \Big(\left(z'_u\right)'_u - y\left(z'_u\right)'_v\Big) - y\Big(\left(z'_v\right)'_u - y\left(z'_v\right)'_v\Big) - z'_v \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} z''_{xx} = z_{uu} + 2xz''_{uv} + x^2 z''_{vv} + z'_v \\ z''_{xy} = z''_{uu} + (x - y)z''_{uv} - xyz''_{vv} \\ z''_{yy} = z''_{uu} - 2yz''_{uv} + y^2 z''_{vv} - z'_v \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} \times 1 \\ - \\ \times 2 \\ + \\ \times 1 \end{array}\right.$$

Подставим полученные выражения “старых” производных через “новые” в дифференциальное уравнение:

$$z''_{xx} - 2z''_{xy} + z''_{yy} = (x^2 + 2xy + y^2)z''_{vv} = 0 \quad \Rightarrow \quad u^2 z''_{vv} = 0$$

$\Rightarrow$

$$z''_{vv} = 0 \ \Rightarrow \ \left(z'_v\right)'_v = 0 \ \Rightarrow \ z'_v = const_1(u) \ \Rightarrow \ z = v\ const_1(u) + const_2(u)$$

$\Rightarrow$

$$z = (x^2 - y^2) f(x + y) + g(x + y)$$

№ 29.8.

Необходимо найти функцию $z = z(x, y)$, являющуюся решением дифференциального уравнения:

$$x^2\ z''_{xx} + 2xy\ z''_{xy} + y^2 z''_{yy} = 0$$

Предлагается сделать замену переменных, перейдя от “старых” переменных (x, y) к новым (r, φ). Для этого надо найти выражение “старых” производных z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy} через “новые” z''_{rr}, $z''_{r\varphi}$, $z''_{\varphi\varphi}$.

Поскольку по условию явно выражаются “старые” переменные через “новые”,

$$\left[\begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array}\right.$$

то рассмотрим сложную функцию от “новых” переменных

$$z(x(r,\varphi), y(r,\varphi)) = z(r,\varphi).$$

Имеем:

$$\left[\begin{array}{l} z'_r = \quad z'_x \cos\varphi + z'_y \sin\varphi \\ \\ z'_\varphi = -z'_x r\sin\varphi + z'_y r\cos\varphi \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} z''_{rr} = \quad \left(z'_x\right)'_r \cos\varphi + \left(z'_y\right)'_r \sin\varphi \\ \\ z''_{r\varphi} = \quad \left(z'_x\right)'_\varphi \cos\varphi - z'_x \sin\varphi + \left(z'_y\right)'_\varphi \sin\varphi + z'_y \cos\varphi \\ \\ z''_{\varphi\varphi} = -\left(z'_x\right)'_\varphi r\sin\varphi - z'_x r\cos\varphi + \left(z'_y\right)'_\varphi r\cos\varphi - z'_y r\sin\varphi \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} z''_{rr} = \left(z''_{xx}\cos\varphi + z''_{xy}\sin\varphi\right)\cos\varphi + \left(z''_{yx}\cos\varphi + z''_{yy}\sin\varphi\right)\sin\varphi \\ \\ z''_{r\varphi} = \left(-z''_{xx} r\sin\varphi + z''_{xy} r\cos\varphi\right)\cos\varphi - z'_x \sin\varphi + \left(-z''_{yx} r\sin\varphi + z''_{yy} r\cos\varphi\right)\sin\varphi + z'_y \cos\varphi \\ \\ z''_{\varphi\varphi} = -\left(-z''_{xx} r\sin\varphi + z''_{xy} r\cos\varphi\right) r\sin\varphi - z'_x r\cos\varphi + \left(-z''_{yx} r\sin\varphi + z''_{yy} r\cos\varphi\right) r\cos\varphi - z'_y r\sin\varphi \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} z''_{rr} = \cos^2\varphi\ z''_{xx} + 2\sin\varphi\cos\varphi z''_{xy} + \sin^2\varphi\ z''_{yy} \\ \\ z''_{r\varphi} = -r\sin\varphi\cos\varphi\ z''_{xx} + r\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) z''_{xy} + r\cos\varphi\sin\varphi\ z''_{yy} - \sin\varphi\ z'_x + \cos\varphi\ z'_y \\ \\ z''_{\varphi\varphi} = r^2\sin^2\varphi z''_{xx} - 2r^2\cos\varphi\sin\varphi\ z''_{xy} + r^2\cos^2\varphi\ z''_{yy} - r\cos\varphi\ z'_x - r\sin\varphi\ z'_y \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$

Получены явные выражения “новых” производных через “старые”. Одновременно эти соотношения можно рассматривать как систему трех уравнений относительно трех неизвестных z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}, решив которую, найдем выражение “старых” производных через “новые”. Однако в данном примере можно обойтись без этого, заметив, что производная

$$r^2 z''_{rr} = r^2\cos^2\varphi\ z''_{xx} + 2r\cos\varphi\ r\sin\varphi\ z''_{xy} + r^2\sin^2\varphi\ z''_{yy} = x^2\ z''_{xx} + 2xy\ z''_{xy} + y^2 z''_{yy}$$

совпадает с левой частью уравнения:

$$x^2\ z''_{xx} + 2xy\ z''_{xy} + y^2 z''_{yy} = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 z''_{rr} = 0 \quad \Rightarrow \quad z''_{rr} = 0$$

$$\left(z'_r\right)'_r = 0 \quad \Rightarrow \quad z'_r = const_1(\varphi) \quad \Rightarrow \quad z = r\ const_1(\varphi) + const_2(\varphi)$$

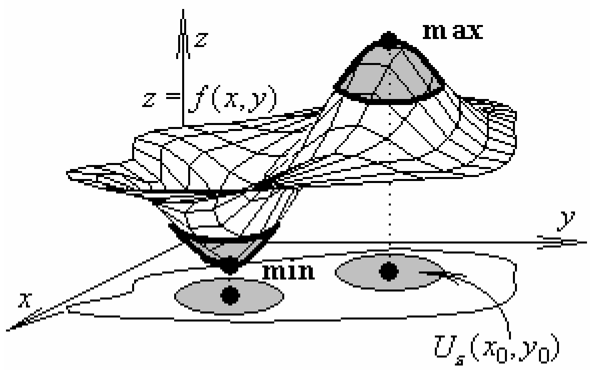
$\Rightarrow$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}\, f\left(\frac{x}{y}\right) + g\left(\frac{x}{y}\right)$$

30. Экстремум функции

Условия.

Исследовать на экстремум функции нескольких переменных.	
№ 30.1. $z=-5x^2-y^2+2xy+6x+2y$	**№ 30.1.** $z=2x^2+5y^2+2xy-10x-12y$
№ 30.2. $z=8x^2-3y^2-2xy-12x+14y$	**№ 30.2.** $z=3x^2+8y^2+10xy+2x+4y$
№ 30.3. $z=x^3+xy^2-2xy+y^2-11x-2y$	**№ 30.3.** $z=y^3+x^2y+4xy-x^2-4x-8y$
№ 30.4. $u=x^2+y^2+z^2+xy-yz-xz-x-2y-3z$	**№ 30.4.** $u=x^2+xy+yz-xz-x-4y-z$
№ 30.5. При каких размерах $a)$ “закрытая”, $b)$ “открытая” прямоугольная коробка	
заданного объема V имеет **наименьшую** площадь поверхности S.	заданной площади поверхности S имеет **наибольший** объем V.
№ 30.6. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=f(x,y)$ в области $\varphi(x,y)\le 0$.	
$z=x^2+y^2,\quad x^2+(y-1)^2\le 4$	$z=x^2-y^2,\quad x^2+y^2\le 1$



Теория.

В точке $(x_0,...)$ *достигается локальный* **max** (**min**) *функции* $u=f(x,...)$, *если для “соседних” точек из некоторой окрестности* $(x,...)\in U_\varepsilon(x_0,...)$ *выполнено*

$$f(x,...)\le f(x_0,...)\quad\Rightarrow\quad \Delta u\le 0\ ,$$

$$\big(f(x,...)\ge f(x_0,...)\quad\Rightarrow\quad \Delta u\ge 0\big).$$

Если функция $u=f(x,...)$ *достаточное число раз дифференцируема, то в точке экстремума с необходимостью первый дифференциал равен нулю*

$$du=0.$$

При этом характер экстремума, как это вытекает из формулы Тейлора,

$$\Delta u=\frac{du}{1!}+\frac{d^2u}{2!}+o(\|d\vec{\mathbf{x}}\|^2)\approx\frac{1}{2}d^2u\,,$$

можно определить, исследуя знак второго дифференциала (достаточное условие)

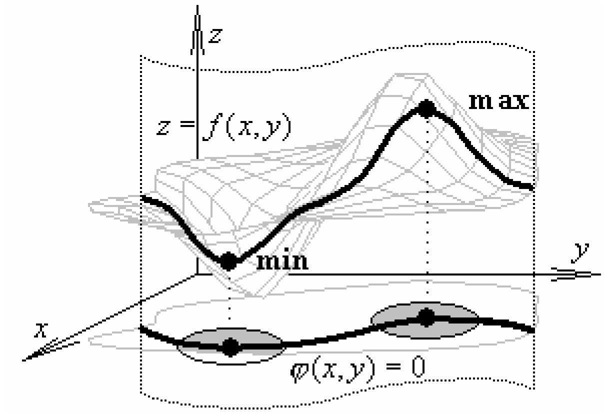
$$d^2u=\left[\begin{array}{l}>0\Rightarrow\min\\ \gtrless 0\Rightarrow\cancel{\min\max}\\ <0\Rightarrow\max\end{array}\right..$$

В случае функции двух переменных $z=f(x,y)$ *подозрительные на экстремум точки* (x_0,y_0) *(стационарные) находятся как решения системы уравнений*

$$\left[\begin{array}{l}f'_x(x,y)=0\\ f'_y(x,y)=0\end{array}\right.\quad\Rightarrow\quad\left[\begin{array}{l}x=x_0\\ y=y_0\end{array}\right..$$

Полагая, $\begin{bmatrix}A & B\\ B & C\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f''_{xx} & f''_{xy}\\ f''_{yx} & f''_{yy}\end{bmatrix}_{(x_0,y_0)}$, *получим* $\boldsymbol{AC-B^2}=\left[\begin{array}{l}>0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}A>0\Rightarrow\min\\ A<0\Rightarrow\max\end{array}\right.\\ <0\Rightarrow\cancel{\min\max}\end{array}\right.$.

В точке (x_0, y_0) *достигается* ***условный*** *локальный* **max** *(***min***) функции* $z = f(x,y)$ *при условии, что* $\varphi(x,y)=0$*, если для “соседних” точек из некоторой окрестности* $(x,y)\in U_\varepsilon(x_0,y_0)$*, лежащих на кривой связи, выполнено*



$$\begin{cases} f(x,y)\le f(x_0,y_0) \\ \varphi(x,y)=0 \end{cases}, \quad \left(\begin{cases} f(x,y)\ge f(x_0,y_0) \\ \varphi(x,y)=0 \end{cases} \right).$$

Если функции $f(x,y)$*,* $\varphi(x,y)$ *достаточное число раз дифференцируемы, то в точке экстремума с необходимостью равен нулю первый дифференциал функции Лагранжа*

$$F(x,y;\lambda) = f(x,y) - \lambda\varphi(x,y) \quad\Rightarrow\quad dF = 0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} F'_x = f'_x - \lambda\varphi'_x = 0 \\ F'_y = f'_y - \lambda\varphi'_y = 0\,. \\ F'_\lambda = -\varphi = 0 \end{cases}$$

Решения.

№ 30.1.

$z = -5x^2 - y^2 + 2xy + 6x + 2y$.

Найдем “подозрительные” на экстремум точки (необходимое условие экстремума):

$$\begin{cases} z'_x = -10x + 2y + 6 = 0 \\ z'_y = -2y + 2x + 2 \ = 0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} -5x + y = -3 \\ x - y = -1 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 2 \end{cases}$$

Выясним характер экстремума (достаточное условие экстремума):

$$\begin{cases} z''_{xx} = \left(-10x + 2y + 6\right)'_x = -10 = A \\ z''_{xy} = \left(-10x + 2y + 6\right)'_y = \ 2 \ = B \ \Rightarrow \boldsymbol{AC\text{-}B^2} = (-10)(-2) - 2^2 = 16 > \mathbf{0},\ \ \boldsymbol{A} = -10 < \mathbf{0} \ \Rightarrow \mathbf{max} \\ z''_{yy} = \left(-2y + 2x + 2\right)'_y \ = -2 \ = C \end{cases}$$

№ 30.2.

$z = 8x^2 - 3y^2 - 2xy - 12x + 14y$

Найдем “подозрительные” на экстремум точки (необходимое условие экстремума):

$$\begin{cases} z'_x = \ 16x - 2y - 12 = 0 \\ z'_y = -6y - 2x + 14 \ = 0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} 8x - y = 6 \\ x + 3y = 7 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 2 \end{cases}$$

Выясним характер экстремума (достаточное условие экстремума):

$$\begin{cases} z''_{xx} = \left(16x - 2y - 12\right)'_x \ = 16 \ = A \\ z''_{xy} = \left(16x - 2y - 12\right)'_y \ = -2 = B \ \Rightarrow \boldsymbol{AC\text{-}B^2} = 16(-6) - (-2)^2 = -100 < \mathbf{0} \ \Rightarrow \cancel{\mathbf{minmax}} \\ z''_{yy} = \left(-6y - 2x + 14\right)'_y = -6 \ = C \end{cases}$$

№ 30.3.

$$z=x^3+xy^2-2xy+y^2-11x-2y$$

Найдем “подозрительные” на экстремум точки (необходимое условие экстремума):

$$\left[\begin{array}{l} z'_x=3x^2+y^2-2y-11=0 \\ z'_y=2xy-2x+2y-2\ =0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y^2-2y+3x^2-11=0 \\ (x+1)(y-1)=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y^2-2y+3x^2-11=0 \\ \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$1,\ 2)\quad \left[\begin{array}{l} y^2-2y+3x^2-11=0 \\ x_{1,2}=-1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_{1,2}=-1 \\ y^2-2y-8=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-1 \\ y_1=-2 \end{array}\right., \quad \left[\begin{array}{l} x_2=-1 \\ y_2=+4 \end{array}\right.$$

$$3,\ 4)\quad \left[\begin{array}{l} y^2-2y+3x^2-11=0 \\ y_{3,4}=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2-12=0 \\ y_{3,4}=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_3=-2 \\ y_3=+1 \end{array}\right., \quad \left[\begin{array}{l} x_4=+2 \\ y_4=+1 \end{array}\right.$$

Выясним характер экстремума (достаточное условие экстремума):

$$\left[\begin{array}{l} z''_{xx}=\left(3x^2+y^2-2y-11\right)'_x \ =6x \\ z''_{xy}=\left(3x^2+y^2-2y-11\right)'_y \ =2y-2 \\ z''_{yy}=\left(2xy-2x+2y-2\right)'_y \ =2x+2 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$

$$1)\quad \left[\begin{array}{l} A=6x\big|_{(-1,-2)} \quad =-6 \\ B=(2y-2)\big|_{(-1,-2)}=-6 \\ C=(2x+2)\big|_{(-1,-2)}=\ \ 0 \end{array}\right. \Rightarrow \boldsymbol{AC-B^2}=(-6)0-(-6)^2=-36<\mathbf{0} \ \Rightarrow \cancel{\textbf{minmax}}$$

$$2)\quad \left[\begin{array}{l} A=6x\big|_{(-1,+4)} \quad =-6 \\ B=(2y-2)\big|_{(-1,+4)}=+6 \\ C=(2x+2)\big|_{(-1,+4)}=\ \ 0 \end{array}\right. \Rightarrow \boldsymbol{AC-B^2}=(-6)0-(+6)^2=-36<\mathbf{0} \ \Rightarrow \cancel{\textbf{minmax}}$$

$$3)\quad \left[\begin{array}{l} A=6x\big|_{(-2,+1)} \quad =-12 \\ B=(2y-2)\big|_{(-2,+1)}=0 \\ C=(2x+2)\big|_{(-2,+1)}=-2 \end{array}\right. \Rightarrow \boldsymbol{AC-B^2}=(-12)(-2)-0^2=24>\mathbf{0},\quad \boldsymbol{A}\ =-12<0 \ \Rightarrow\ \textbf{max}$$

$$4)\quad \left[\begin{array}{l} A=6x\big|_{(+2,+1)} \quad =+12 \\ B=(2y-2)\big|_{(+2,+1)}=0 \\ C=(2x+2)\big|_{(+2,+1)}=+6 \end{array}\right. \Rightarrow \boldsymbol{AC-B^2}=(+12)(+6)-0^2=72>\mathbf{0},\quad \boldsymbol{A}\ =+12>0 \ \Rightarrow\ \textbf{min}$$

№ 30.4.

$u = x^2 + y^2 + z^2 + xy - yz - xz - x - 2y - 3z$

Найдем “подозрительные” на экстремум точки (необходимое условие экстремума):

$$\boldsymbol{U}' = \begin{bmatrix} u'_x \\ u'_y \\ u'_z \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} u'_x = 2x + y - z - 1 = 0 \\ u'_y = 2y + x - z - 2 = 0 \\ u'_z = 2z - y - x - 3 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{rrrl} 2x & +y & -z & =1 \\ x & +2y & -z & =2 \\ -x & -y & +2z & =3 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} \underline{1} & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & \underline{1} & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -3 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -3 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 1 \\ y_0 = 2 \\ z_0 = 3 \end{array}\right.$$

Выясним характер экстремума (достаточное условие экстремума):

$$\boldsymbol{U}'' = \begin{bmatrix} u''_{xx} & u''_{xy} & u''_{xz} \\ u''_{yx} & u''_{yy} & u''_{yz} \\ u''_{zx} & u''_{zy} & u''_{zz} \end{bmatrix} \overset{?}{\gtrless} 0 \Rightarrow \boldsymbol{U}''\Big|_{(1,2,3)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$\Delta_1 = |2| = 2 > \mathbf{0}$,

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > \mathbf{0},$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 > \mathbf{0}$$

$\Rightarrow$

min

№ 30.5.

a) Учитывая симметрию “закрытой” коробки относительно размеров x, y, z, из геометрических соображений, очевидно, что наименьшую площадь поверхности имеет кубическая коробка:

$$x = y = z \Rightarrow V = x \cdot y \cdot z \Rightarrow x = y = z = \sqrt[3]{V} \Rightarrow S_{\min} = 2(x \cdot y + y \cdot z + z \cdot x) = 6\sqrt[3]{V}^2,$$

а наибольшую $S = \infty$ – “плоская” коробка. Например:

$$x = y \to \infty,\ z = \frac{V}{x \cdot y} \to 0 \Rightarrow S = 2(x \cdot y + y \cdot z + z \cdot x) = 2\left(x \cdot y + y \cdot \frac{V}{x \cdot y} + \frac{V}{x \cdot y} \cdot x\right) \to \infty.$$

Проверим адекватность математического аппарата интуитивным представлениям. Имеем:

$$\left[\begin{array}{l} S=f(x,y,z)=2\left(x\cdot y+y\cdot z+z\cdot x\right)\to\min \\ \varphi(x,y,z)=x\cdot y\cdot z-V=0 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$

$$F(x,y,z;\lambda)=f(x,y,z)-\lambda\varphi(x,y,z)=2\left(xy+yz+zx\right)-\lambda\left(xyz-V\right)$$

Найдем “подозрительные” на условный экстремум точки (необходимое условие условного экстремума):

$$\left[\begin{array}{l} F'_x=f'_x-\lambda\varphi'_x=2(y+z)-\lambda yz=0 \\ F'_y=f'_y-\lambda\varphi'_y=2(z+x)-\lambda zx=0 \\ F'_z=f'_z-\lambda\varphi'_z=2(x+y)-\lambda xy=0 \\ F'_\lambda= \quad -\varphi=-\left(xyz-V\right) \quad =0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2(y+z)-\lambda yz=0 \\ 2(z+x)-\lambda zx=0 \\ 2(x+y)-\lambda xy=0 \\ xyz=V \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2(y-x)-\lambda z(y-x)=0 \\ 2(z-y)-\lambda x(z-y)=0 \\ 2(x-z)-\lambda y(x-z)=0 \\ xyz=V \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (y-x)(2-\lambda z)=0 \\ (z-y)(2-\lambda x)=0 \\ (x-z)(2-\lambda y)=0 \\ xyz=V \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=z \\ xyz=V \end{array}\right. \Rightarrow \quad x_0=y_0=z_0=\sqrt[3]{V}$$

b) Пусть для определенности коробка “открыта сверху”. Из геометрических соображений, очевидно, что $x=y>0,\quad z>0,$ так что

$$V=x\cdot y\cdot z=x^2z\ , \qquad S=x\cdot y+2\left(y\cdot z+z\cdot x\right)=x^2+4xz.$$

Имеем:

$$\left[\begin{array}{l} S=f(x,z)=x^2+4xz\to\min \\ \varphi(x,z)=x^2z-V=0 \end{array}\right.$$

$$F(x,z;\lambda)=f(x,z)-\lambda\varphi(x,z)=(x^2+4xz)-\lambda\left(x^2z-V\right)$$

Найдем “подозрительные” на условный экстремум точки (необходимое условие условного экстремума):

$$\left[\begin{array}{l} F'_x=f'_x-\lambda\varphi'_x=2x+4z-2\lambda xz=0 \\ F'_z=f'_z-\lambda\varphi'_z=4x-\lambda x^2=0 \\ F'_\lambda= \quad -\varphi=-\left(x^2z-V\right)=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x+2z-\lambda xz=0 \\ x(4-\lambda x)=0 \\ x^2z=V \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x+(2-\lambda x)z=0 \\ x=\dfrac{4}{\lambda} \\ x^2z=V \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{4}{\lambda}+(2-\lambda\dfrac{4}{\lambda})z=0 \\ x=\dfrac{4}{\lambda} \\ x^2z=V \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z=\dfrac{2}{\lambda} \\ x=\dfrac{4}{\lambda} \\ x^2z=V \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z=\dfrac{2}{\lambda} \\ x=\dfrac{4}{\lambda} \\ \left(\dfrac{4}{\lambda}\right)^2\dfrac{2}{\lambda}=V \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z=\dfrac{2}{\lambda} \\ x=\dfrac{4}{\lambda} \\ \lambda^3=\dfrac{32}{V} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z=\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{2V} \\ x=\sqrt[3]{2V} \\ \lambda=\sqrt[3]{\dfrac{32}{V}} \end{array}\right.$$

Итак, $x_0=y_0=\sqrt[3]{2V},\quad z_0=\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{2V} \quad\Rightarrow\quad S_{\min}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}6\sqrt[3]{V}^2$.

Тот факт, что в найденной точке достигается именно $\mathbf{min}$, вытекает из геометрических соображений.

Сравнить с a)

№ 30.6.

Найдем “подозрительные” на экстремум функции $z = x^2 + y^2$ точки, находящиеся внутри области $x^2 + (y-1)^2 < 4$ (необходимое условие безусловного экстремума):

$$\left[\begin{array}{l} z'_x = 2x = 0 \\ z'_y = 2y = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{array}\right.$$

Очевидно, найденная точка лежит внутри области:

$x_0^2 + (y_0 - 1)^2 = 0^2 + (0-1)^2 = 1 < 4.$

Найдем далее “подозрительные” на экстремум функции $z = x^2 + y^2$ точки, находящиеся на границе $x^2 + (y-1)^2 = 4$ области (необходимое условие условного экстремума):

$$\left[\begin{array}{l} f(x,y) = x^2 + y^2 \to extr \\ \varphi(x,y) = x^2 + (y-1)^2 - 4 = 0 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$

$$F(x,y;\lambda) = f(x,y) - \lambda\varphi(x,y) = x^2 + y^2 - \lambda\left(x^2 + (y-1)^2 - 4\right)$$

$\Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} F'_x = 2x - 2\lambda x = 0 \\ F'_y = 2y - 2\lambda(y-1) = 0 \\ F'_\lambda = -\left(x^2 + (y-1)^2 - 4\right) = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x(1-\lambda) = 0 \\ y(1-\lambda) = -\lambda \\ x^2 + (y-1)^2 = 4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 0^2 + (y-1)^2 = 4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ y_1 = -1 \end{array}\right., \left[\begin{array}{l} x_2 = 0 \\ y_2 = 3 \end{array}\right.$$

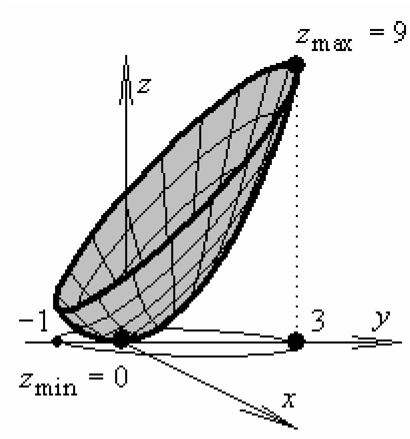
Вычислим функцию во всех подозрительных точках:

$$z_0 = x^2 + y^2\Big|_{(0,0)} = 0,$$

$$z_1 = x^2 + y^2\Big|_{(0,-1)} = 1,$$

$$z_2 = x^2 + y^2\Big|_{(0,3)} = 9.$$

$\Rightarrow$



$z_{\min} = 0$ достигается внутри области в точке $(0,0)$:

$z_{\max} = 9$ достигается на границе области в точке $(0,3)$.

31. Элементы дифференциальной геометрии

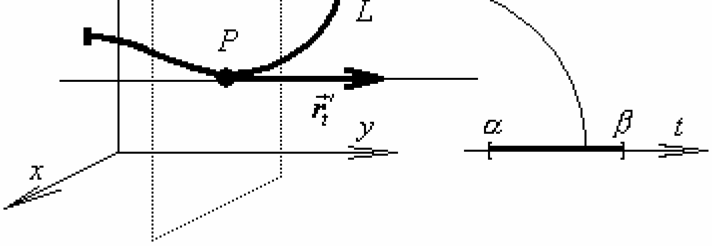
Условия.

№ 31.1. Траектория движения точки описывается заданными параметрическими уравнениями. Найти величину и направление скорости движения. Написать уравнение касательной прямой и нормальной плоскости к кривой в заданный момент времени.	
$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t\,, \\ z=t \end{cases} \quad (0\le t\le 2\pi),\quad t_0=\frac{1}{3}\pi$	$\begin{cases} x=a\ t\cos t \\ y=a\ t\sin t\,, \\ z=t \end{cases} \quad (0\le t\le 2\pi),\quad t_0=\frac{1}{6}\pi$
№ 31.2. Написать уравнение касательной прямой и нормальной плоскости к кривой, как линии пересечения двух поверхностей, заданных явно.	
$\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ z=4-2x-4y \end{cases},\quad (x_0,y_0,z_0)=(2,-2,+8)$	$\begin{cases} z=xy \\ z=1+x+y \end{cases} \quad (x_0,y_0,z_0)=(2,3,6)$
№ 31.3. Написать уравнение касательной прямой и нормальной плоскости к кривой, как линии пересечения двух поверхностей, заданных неявно.	
$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=50 \\ x^2+y^2-z^2=0 \end{cases},\quad (x_0,y_0,z_0)=(3,4,5)$	$\begin{cases} x^2+y^2-z^2=4 \\ x^2+y^2-5z\ \ =0 \end{cases},\quad (x_0,y_0,z_0)=(1,2,1)$
№ 31.4. Построить поверхность, заданную параметрически, и координатные линии. Написать уравнения касательных прямых к координатным линиям, касательной плоскости и нормальной прямой к поверхности.	
$\begin{cases} x=u\cos v \\ y=u\sin v\,, \\ z=v \end{cases} \begin{pmatrix} 0\le u\le a \\ 0\le v\le 2\pi \end{pmatrix},\quad (u_0,v_0)=\left(\frac{1}{2}a,\frac{1}{6}\pi\right)$	$\begin{cases} x=u\cos v \\ y=u\sin v\,, \\ z=u \end{cases} \begin{pmatrix} 0\le u\le a \\ 0\le v\le 2\pi \end{pmatrix},\quad (u_0,v_0)=\left(\frac{1}{3}a,\frac{1}{3}\pi\right)$
№ 31.5. Написать уравнения касательной плоскости и нормальной прямой к поверхности, заданной явно.	
$z=xy,\quad (x_0,y_0,z_0)=(-1,-2,2)$	$z=x^2+y^2,\quad (x_0,y_0,z_0)=(-1,+2,5)$
№ 31.6. Написать уравнения касательной плоскости к поверхности, заданной неявно.	
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\quad (x_0,y_0,z_0)$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad (x_0,y_0,z_0)$

Теория.

Простой кривой называется образ L *непрерывного взаимно однозначного отображения* $\vec{r}=\vec{r}(t)$ *отрезка* $[\alpha,\beta]\in R_1$ *в пространство* R_3

$$L=\{\vec{r}=\vec{r}(t),\ t\in[\alpha,\beta]\}=\left\{ \begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t),\ t\in[\alpha,\beta] \\ z=z(t) \end{cases} \right\}.$$



Кривая называется гладкой, если $\exists$ *непрерывная* $\vec{r}_t'(t)$*, причем* $\vec{r}_t'(t)\neq 0$.

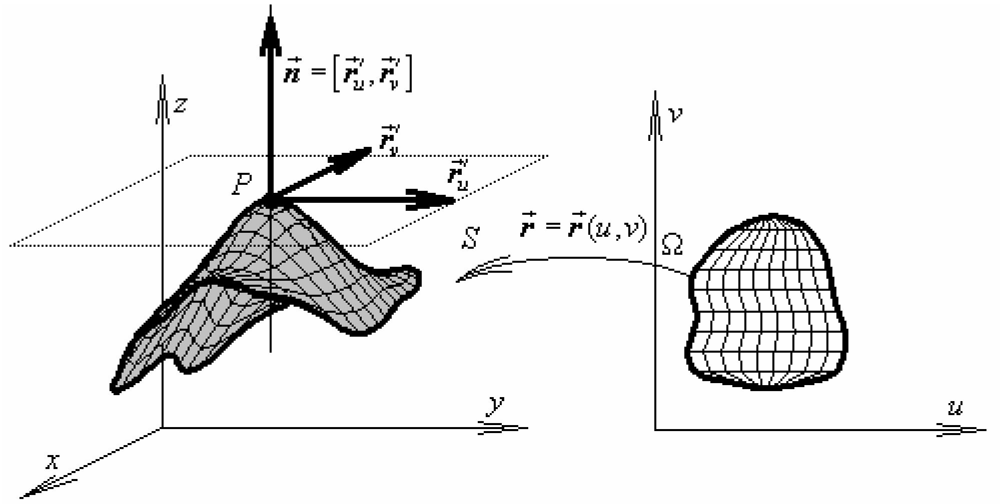
Такое название объясняется тем, что в каждой точке P $\exists$ *касательная прямая к кривой, а значит, кривая не имеет изломов.*

Касательная прямая к кривой проходит через точку P*, параллельно вектору* $\vec{r}_t'$.

Плоскость, проходящая через точку P *ортогонально к касательной прямой, называется нормальной плоскостью к кривой.*

Простой поверхностью называется образ S – непрерывного взаимно однозначного отображения $\vec{\boldsymbol r}=\vec{\boldsymbol r}(u,v)$ замкнутой области $\Omega\in R_2$ в пространство R_3

$$S=\{\vec{\boldsymbol r}=\vec{\boldsymbol r}(u,v),\quad (u,v)\in\Omega\}=\left\{\left[\begin{array}{l}x=x(u,v)\\ y=y(u,v),\ (u,v)\in\Omega\\ z=z(u,v)\end{array}\right.\right\}.$$



Поверхность называется гладкой, если $\exists$ непрерывные $\vec{\boldsymbol r}_u'$, $\vec{\boldsymbol r}_v'$, причем $[\vec{\boldsymbol r}_u',\vec{\boldsymbol r}_v']\neq 0$.

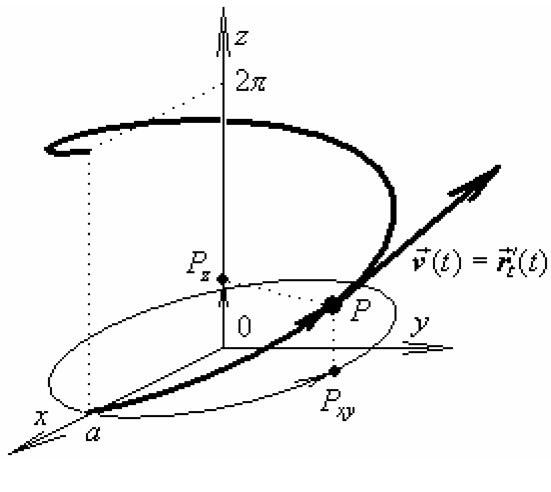
Такое название объясняется тем, что в каждой точке P – $\exists$ касательная плоскость к поверхности, а значит, поверхность не имеет изломов.

Касательная плоскость к поверхности проходит через точку P, параллельно векторам $\vec{\boldsymbol r}_u'$, $\vec{\boldsymbol r}_v'$, т.е. ортогонально вектору $\vec{\boldsymbol n}=[\vec{\boldsymbol r}_u',\vec{\boldsymbol r}_v']$. Прямая, проходящая через точку P ортогонально касательной плоскости, т.е. параллельно вектору $\vec{\boldsymbol n}=[\vec{\boldsymbol r}_u',\vec{\boldsymbol r}_v']$, называется нормальной прямой к поверхности.

Решения.

№ 31.1.

Проекция P_{xy} точки P на плоскость xOy движется по окружности $\left[\begin{array}{l}x=a\cos t\\ y=a\sin t\end{array}\right.$, $(0\le t\le 2\pi)$ радиуса a с центром в начале координат, а проекция P_z равномерно $z=t$ движется по оси Oz, “распрямляя” окружность в виток винтовой линии.



Найдем вектор скорости.

$$\vec{r}(t)=\begin{bmatrix} a\cos t \\ a\sin t \\ t \end{bmatrix}_{t=\frac{1}{3}\pi}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}a \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a \\ \frac{1}{3}\pi \end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad \vec{v}(t)=\vec{r}_t{}'(t)=\begin{bmatrix} -a\sin t \\ a\cos t \\ 1 \end{bmatrix}_{t=\frac{1}{3}\pi}=\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2}a \\ \frac{1}{2}a \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left|\vec{v}(t)\right|=\left|\vec{r}_t{}'(t)\right|=\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+1^2}=\sqrt{1+a^2}, \qquad \vec{\tau}=\frac{\vec{v}(t)}{\left|\vec{v}(t)\right|}=\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{1+a^2}}a \\ \frac{1}{2\sqrt{1+a^2}}a \\ \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \end{bmatrix}$$

Вектор скорости $\vec{v}(t)=\vec{r}_t{}'(t)$ направлен по касательной к траектории движения и может служить в качестве направляющего вектора касательной прямой.

Уравнения касательной прямой:

$a)$ параметрические

$$\vec{r}=\vec{r}(t_0)+\vec{r}_t{}'(t_0)(t-t_0)\Rightarrow\left[\begin{array}{l} x=\ \frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}}{2}a\left(t-\frac{1}{3}\pi\right) \\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}a\left(t-\frac{1}{3}\pi\right), \qquad -\infty<t<+\infty; \\ z=\ \frac{1}{3}\pi+1\ \left(t-\frac{1}{3}\pi\right) \end{array}\right.$$

$b)$ канонические

$$\vec{r}-\vec{r}(t_0)\uparrow\uparrow\vec{r}_t{}'(t_0) \quad\Rightarrow\quad \frac{x-\frac{1}{2}a}{-\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\frac{y-\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{1}{2}a}=\frac{z-\frac{1}{3}\pi}{1}.$$

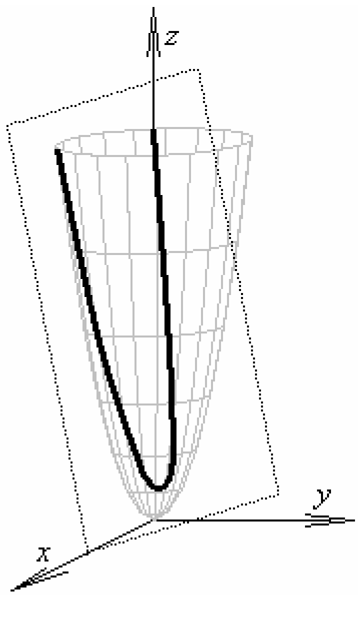
Уравнение нормальной плоскости:

$$\left(\vec{r}-\vec{r}(t_0),\vec{r}_t{}'(t_0)\right)=0 \quad\Rightarrow\quad -\frac{\sqrt{3}}{2}a\left(x-\frac{1}{2}a\right)+\frac{1}{2}a\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)+1\ \left(z-\frac{1}{3}\pi\right)=0$$

№ 31.2.

На уравнения двух поверхностей, задающих кривую, как линию их пересечения, можно смотреть как на систему двух уравнений с тремя неизвестными (x,y,z):

$$\left[\begin{array}{l} x^2+y^2=z \\ 4-2x-4y=z \end{array}\right.$$



Выражая “мысленно” какие либо две переменные (например, (x,y)) через третью z, выступающую в роли свободного параметра $t=z$, приходим к параметрическим уравнениям кривой:

$$\left[\begin{array}{l} x=x(z) \\ y=y(z) \\ z=z \end{array}\right.$$

Найдем направляющий вектор касательной прямой в заданной точке $(x_0,y_0,z_0)=(2,-2,+8)$.

$$\begin{bmatrix} x_z' \\ y_z' \\ z_z' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_z' \\ y_z' \\ 1 \end{bmatrix}$$

Для этого необходимо найти x_z', y_z' в этой точке.

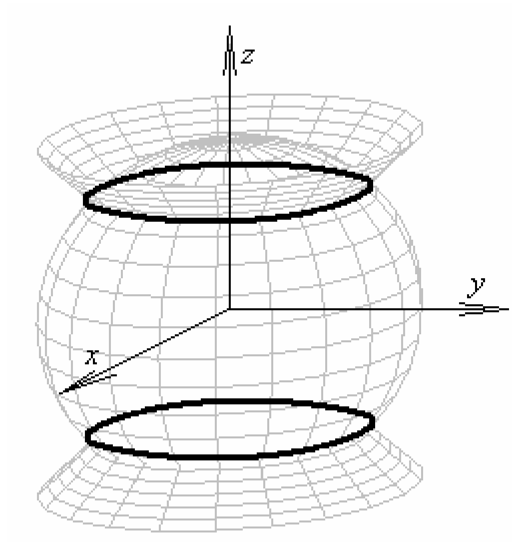
Имеем:

$$\left[\begin{array}{l} x^2(z)+y^2(z)\equiv z \\ 4-2x(z)-4y(z)\equiv z \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x\,x'_z+2y\,y'_z\equiv 1 \\ 0-2x'_z-4y'_z\equiv 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2\cdot 2\,x'_z+2\cdot(-2)y'_z=1 \\ -2x'_z-4y'_z=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x'_z=0 \\ y'_z=-\dfrac{1}{4} \end{array}\right.$$

Уравнения касательной прямой и нормальной плоскости:

$$\frac{x-2}{0}=\frac{y+2}{-\frac{1}{4}}=\frac{z-8}{1}, \qquad 0(x-2)-\tfrac{1}{4}(y+2)+1(z-8)=0$$

№ 31.3.



На уравнения двух поверхностей, задающих кривую, как линию их пересечения, можно смотреть как на систему двух уравнений с тремя неизвестными (x,y,z):

$$\left[\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=50 \\ x^2+y^2-z^2=0 \end{array}\right.$$

Выражая “мысленно” какие либо две переменные (например, (y,z)) через третью x, выступающую в роли свободного параметра t, приходим к параметрическим уравнениям кривой:

$$\left[\begin{array}{l} x=x \\ y=y(x) \\ z=z(x) \end{array}\right.$$

Найдем направляющий вектор касательной прямой в заданной точке $(x_0,y_0,z_0)=(3,4,5)$.

$$\begin{bmatrix} x'_x \\ y'_x \\ z'_x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ y'_x \\ z'_x \end{bmatrix}$$

Для этого необходимо найти y'_x, z'_x в этой точке.

Имеем:

$$\left[\begin{array}{l} x^2+y^2(x)+z^2(x)\equiv 50 \\ x^2+y^2(x)-z^2(x)\equiv 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+2y\,y'_x+2z\,z'_x\equiv 0 \\ 2x+2y\,y'_x-2z\,z'_x\equiv 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 4\,y'_x+5\,z'_x=-3 \\ 4y'_x-5\,z'_x=-3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y'_x=-\frac{3}{4} \\ z'_x=0 \end{array}\right.$$

Уравнения касательной прямой и нормальной плоскости:

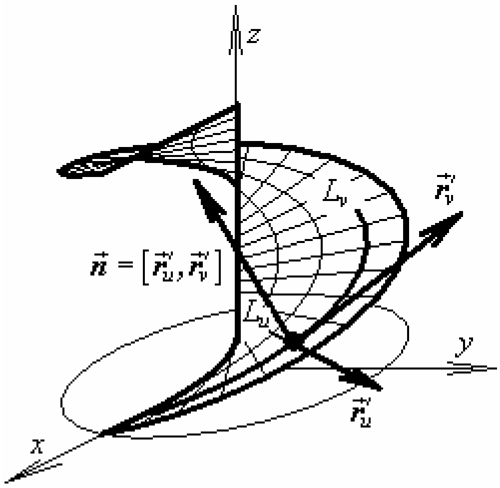
$$\frac{x-3}{1}=\frac{y-4}{-\frac{3}{4}}=\frac{z-5}{0}, \qquad 1(x-3)-\tfrac{3}{4}(y-4)+0(z-5)=0$$

Замечание. Не любая переменная может выступать в роли свободного параметра, т.е. не любые две переменные можно “мысленно” выразить через третью в окрестности заданной точки (в данном примере переменные (x,y) нельзя выразить через z, что очевидно из геометрических соображений: кривая лежит в горизонтальной плоскости $z=5$).

№ 31.4.

Координатные линии

$$L_u=\left[\begin{array}{l}x=u\cos v_0\\ y=u\sin v_0\\ z=v_0\end{array}\right.,\quad \left(\begin{array}{l}0\le u\le a\\ 0\le v_0\le 2\pi\end{array}\right)$$



представляют собой горизонтальные отрезки лучей $\left[\begin{array}{l}x=r\cos\varphi_0\\ y=r\sin\varphi_0\end{array}\right.$, $(0\le r\le a,\ \varphi_0=v_0)$ длины a, проведенных на высоте $z=v_0$ под углом $\varphi_0=v_0$ к оси Ox. При изменении параметра $v_0:0\to 2\pi$ координатная линия L_u, непрерывно перемещаясь, описывает винтовую поверхность (геликоид).

Координатные линии $L_v=\left[\begin{array}{l}x=u_0\cos v\\ y=u_0\sin v\\ z=v\end{array}\right.,\quad \left(\begin{array}{l}0\le v\le 2\pi\\ 0\le u_0\le 1\end{array}\right)$

представляют собой витки винтовых линий радиуса $r_0=u_0$. При изменении параметра $u_0:0\to a$ “расширяющееся” семейство координатных линий L_v описывает, разумеется, ту же винтовую поверхность (геликоид).

Найдем направляющие векторы к координатным линиям:

$$\vec{r}=\begin{bmatrix}u\cos v\\ u\sin v\\ v\end{bmatrix}_{\left(\frac{1}{2}a,\frac{1}{6}\pi\right)}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{4}a\\ \frac{1}{4}a\\ \frac{1}{6}\pi\end{bmatrix},\quad \vec{r}_u'=\begin{bmatrix}\cos v\\ \sin v\\ 0\end{bmatrix}_{\left(\frac{1}{2}a,\frac{1}{6}\pi\right)}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 0\end{bmatrix},\quad \vec{r}_v'=\begin{bmatrix}-u\sin v\\ u\cos v\\ 1\end{bmatrix}_{\left(\frac{1}{2}a,\frac{1}{6}\pi\right)}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{4}a\\ \frac{\sqrt{3}}{4}a\\ 1\end{bmatrix}$$

Уравнения касательных прямых к координатным линиям:

$$L_u:\qquad \vec{r}=\vec{r}(u_0,v_0)+\vec{r}_u'(u_0,v_0)(u-u_0)\qquad\Rightarrow\qquad \left[\begin{array}{l}x=\frac{\sqrt{3}}{4}a+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(u-\frac{1}{2}a\right)\\ y=\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}\left(u-\frac{1}{2}a\right)\\ z=\frac{1}{6}\pi+0\left(u-\frac{1}{2}a\right)\end{array}\right.$$

$$L_v:\qquad \vec{r}=\vec{r}(u_0,v_0)+\vec{r}_v'(u_0,v_0)(v-v_0)\qquad\Rightarrow\qquad \left[\begin{array}{l}x=\frac{\sqrt{3}}{4}a-\frac{1}{4}a\left(v-\frac{1}{6}\pi\right)\\ y=\frac{1}{4}a+\frac{\sqrt{3}}{4}a\left(v-\frac{1}{6}\pi\right)\\ z=\frac{1}{6}\pi+1\left(v-\frac{1}{6}\pi\right)\end{array}\right.$$

Уравнения касательной плоскости:

$$\vec{r}=\vec{r}(u_0,v_0)+\vec{r}_u'(u_0,v_0)(u-u_0)+\vec{r}_v'(u_0,v_0)(v-v_0)\Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\sqrt{3}}{4}a+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(u-\frac{1}{2}a\right)-\frac{1}{4}a\left(v-\frac{1}{6}\pi\right)\\ y=\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}\left(u-\frac{1}{2}a\right)+\frac{\sqrt{3}}{4}a\left(v-\frac{1}{6}\pi\right)\\ z=\frac{1}{6}\pi+0\left(u-\frac{1}{2}a\right)+1\left(v-\frac{1}{6}\pi\right)\end{array}\right.$$

Найдем нормальный вектор к поверхности (к касательной плоскости):

$$\vec{\boldsymbol{n}}=\left[\vec{\boldsymbol{r}}_u',\vec{\boldsymbol{r}}_v'\right]=\begin{vmatrix}\vec{\boldsymbol{i}} & \vec{\boldsymbol{j}} & \vec{\boldsymbol{k}}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{4}a & \frac{\sqrt{3}}{4}a & 1\end{vmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2}a\end{bmatrix}$$

Уравнения нормальной прямой:

$$\vec{\boldsymbol{r}}=\vec{\boldsymbol{r}}(u_0,v_0)+\vec{\boldsymbol{n}}\,t \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{l} x=\frac{\sqrt{3}}{4}a+\frac{1}{2}\,t\\ y=\frac{1}{4}a-\frac{\sqrt{3}}{2}\,t\,,\\ z=\frac{1}{6}\pi+\frac{1}{2}a\,t\end{array}\right. \qquad -\infty<t<+\infty$$

№ 31.5.
Явное задание поверхности можно рассматривать как частный случай параметрического, когда в роли параметров выступают независимые переменные. Имеем:

$$\vec{\boldsymbol{r}}=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z(x,y)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ y\\ xy\end{bmatrix}_{(-1,-2)}=\begin{bmatrix}-1\\ -2\\ 2\end{bmatrix},\quad \vec{\boldsymbol{n}}=\left[\vec{\boldsymbol{r}}_x',\vec{\boldsymbol{r}}_y'\right]=\begin{vmatrix}\vec{\boldsymbol{i}} & \vec{\boldsymbol{j}} & \vec{\boldsymbol{k}}\\ 1 & 0 & z_x'\\ 0 & 1 & z_y'\end{vmatrix}=\begin{bmatrix}-z_x'\\ -z_y'\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-y\\ -x\\ 1\end{bmatrix}_{(-1,-2)}=\begin{bmatrix}2\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$$

Уравнения касательной плоскости и нормальной прямой:

$$2(x+1)+1(y+2)+1(z-2)=0, \qquad \frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{1}$$

№ 31.6.
Неявно заданную поверхность можно рассматривать, как поверхность уровня $u=const=1$ соответствующей функции $u=u(x,y,z)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}$. В таком случае роль нормального вектора к поверхности может играть вектор **градиента** этой функции:

$$\vec{\boldsymbol{r}}=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}_{(x_0,y_0,z_0)}=\begin{bmatrix}x_0\\ y_0\\ z_0\end{bmatrix},\quad \vec{\boldsymbol{n}}=\operatorname{grad}u=\begin{bmatrix}u_x'\\ u_y'\\ u_z'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2x}{a^2}\\ \frac{2y}{b^2}\\ -\frac{2z}{c^2}\end{bmatrix}_{(x_0,y_0,z_0)}=\begin{bmatrix}\frac{2x_0}{a^2}\\ \frac{2y_0}{b^2}\\ -\frac{2z_0}{c^2}\end{bmatrix}$$

Уравнение касательной плоскости:

$$\frac{2x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{2y_0}{b^2}(y-y_0)-\frac{2z_0}{c^2}(z-z_0)=0 \;\Rightarrow\; \frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}-\frac{zz_0}{c^2}=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2} \;\Rightarrow$$

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}-\frac{zz_0}{c^2}=1.$$

32. Двойные интегралы. Физические и геометрические приложения

Условия.

№ 32.1. Найти массу пластины, ограниченной заданными кривыми, с поверхностной плотностью $\rho = \rho(x, y)$.	
$y = x, \quad y = 0, \quad x = 1; \quad \rho = xy^3.$	$y = x, \quad y = 1, \quad x = 0; \quad \rho = x^3 y.$
№ 32.2. Найти заряд пластины, ограниченной заданными кривыми, с поверхностной плотностью $\rho = \rho(x, y)$.	
$y=1, \quad y=x^2, \quad x\ge 0; \quad \rho=\cos\dfrac{x}{\sqrt{y}}.$	$y=1, \quad y=\sqrt{x}, \quad x=0; \quad \rho=\sin\dfrac{x}{y^2}.$
№ 32.3. Найти центр масс пластины, ограниченной заданными кривыми, с поверхностной плотностью $\rho = \rho(x, y)$.	
$y=x, \quad y=x^2; \quad \rho = xy.$	$y=\sqrt{x}, \quad y=x^3; \quad \rho=x^2 y.$
Найти объем тела, ограниченного поверхностями.	
№ 32.4. $z=2-x-2y$, $z=0$, $x=0$, $y=0$, $x+y=1$. **№ 32.5**. $z = xy, \quad z = 0, \quad x + y = 1.$	**№ 32.4**. $z=2x+y$, $z=0$, $x=0$, $y=0$, $2x+y=2$. **№ 32.5**. $z = xy, \quad z = 0, \quad y = x, \quad x = 1.$
Найти площадь пластины, ограниченной кривыми.	
№ 32.6. $y=e^x, \quad y=0, \quad x=0, \quad x=1.$ **№ 32.7**. $y=\sqrt{x}, \quad y=\dfrac{1}{2}x, \quad y=1.$	**№ 32.6**. $y=\dfrac{1}{1+x^2}, \quad y=0, \quad x=0, \quad x=1.$ **№ 32.7**. $y = \ln x, \quad y = 0, \quad y = 1, \quad x = 0.$
Изменить порядок интегрирования.	
№ 32.8. $\displaystyle\int_0^2 \left(\int_{\frac{1}{2}x}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy \right) dx.$ **№ 32.9**. $\displaystyle\int_0^2 \left(\int_0^{2x-x^2} f(x,y)dy \right) dx.$	**№ 32.8**. $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_x^{e^x} f(x,y)dy \right) dx.$ **№ 32.9**. $\displaystyle\int_0^{\pi} \left(\int_0^{\sin x} f(x,y)dy \right) dx.$

Теория.

Пусть в области D задана функция $f(x, y)$.

Разобьем область D кривыми на малые попарно не налегающие части D_k

$$D = D_1 \cup \ldots \cup D_k \cup \ldots \cup D_n,$$

с площадью $\Delta_k S$ и обозначим через $d = \max\limits_{1\le k\le n} d_k$ диаметр разбиения.

Выберем на каждой части промежуточную точку $(\xi_k, \eta_k) \in D_k$.

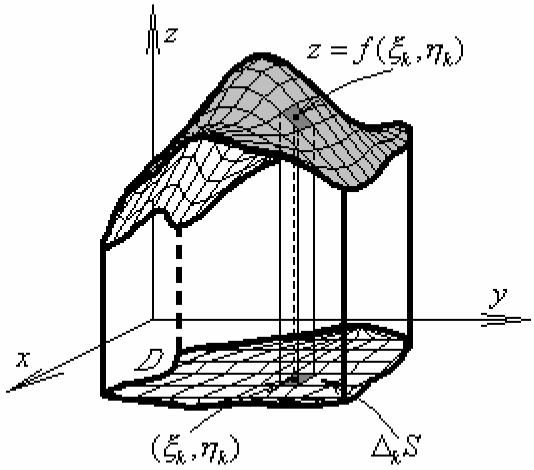
Составим интегральную сумму

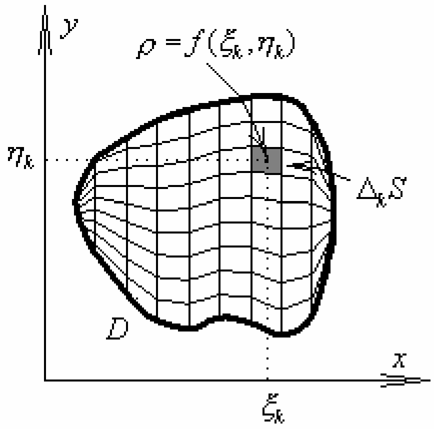
$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta_k S.$$

Двойным интегралом называется предел интегральных сумм, когда диаметр разбиения стремится к нулю

$$\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta_k S = \iint\limits_D f(x, y)dxdy,$$

если он существует, конечен и не зависит ни от способа разбиения, ни от выбора промежуточных точек.

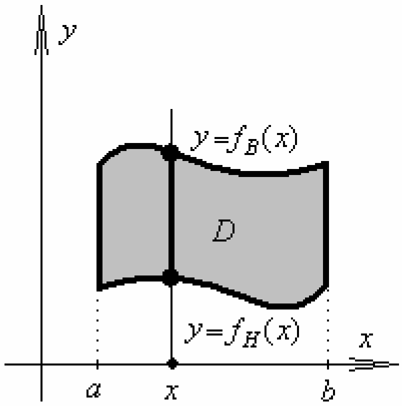


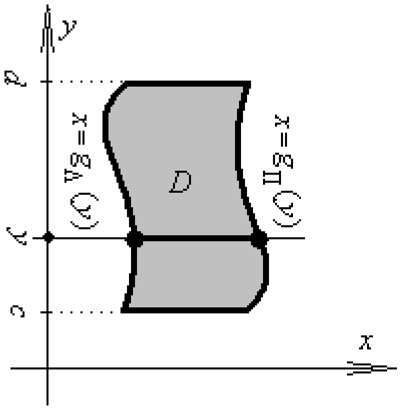


$$V = \sum_{k=1}^{n} \Delta_k V \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) \Delta_k S \qquad\qquad m = \sum_{k=1}^{n} \Delta_k m \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) \Delta_k S$$

Геометрический смысл: объем под поверхностью $z = f(x, y), \quad (x, y) \in D$.
Физический смысл: масса (заряд) пластины D *с поверхностной плотностью* $\rho = f(x, y)$.

Если область D *имеет вид "криволинейной трапеции",*





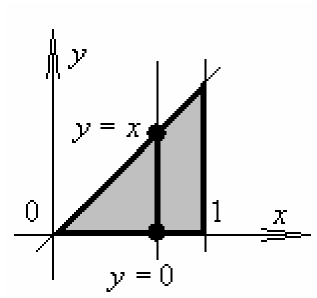
$$D = \{a \le x \le b,\ f_H(x) \le y \le f_B(x)\} \qquad\qquad D = \{c \le y \le d,\ g_\Lambda(y) \le x \le g_\Pi(y)\}$$

то двойной интеграл может быть сведен к повторному:

$$\boxed{\iint\limits_D f(x, y) dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{f_H(x)}^{f_B(x)} f(x, y)\, dy \right) dx} \qquad \boxed{\iint\limits_D f(x, y) dxdy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{g_\Lambda(y)}^{g_\Pi(y)} f(x, y)\, dx \right) dy}$$

Решения.

№ 32.1.



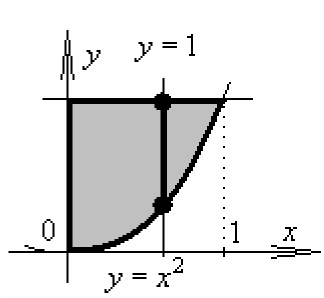
$$m=\iint\limits_D \rho(x,y)dxdy=\iint\limits_D x\,y^3dxdy=\!\!\rightarrow$$

$$D=\{0\le x\le 1,\quad 0\le y\le x\}$$

$$\rightarrow=\int\limits_0^1\left(\ \int\limits_0^x x\,y^3dy\ \right)dx=\int\limits_0^1\left(\ x\int\limits_0^x y^3dy\ \right)dx=$$

$$=\int\limits_0^1 x\cdot\frac{1}{4}y^4\Big|_0^x\ dx=\frac{1}{4}\int\limits_0^1 x^5\ dx=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}x^6\Big|_0^1=\frac{1}{24}.$$

№ 32.2.



$$q=\iint\limits_D \rho(x,y)dxdy=\iint\limits_D \cos\frac{x}{\sqrt{y}}\,dxdy=\!\!\rightarrow$$

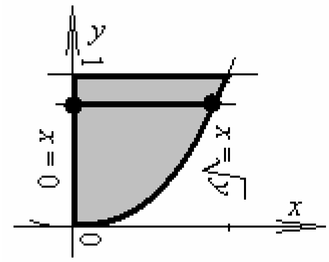
$$D=\{0\le x\le 1,\quad x^2\le y\le 1\}$$

$$\rightarrow=\int\limits_0^1\left(\ \int\limits_{x^2}^1 \cos\frac{x}{\sqrt{y}}dy\ \right)dx=\int\limits_0^1\left(?\ \Big|_{x^2}^1\right)dx=?$$

Трудности с нахождением первообразной можно обойти, изменив порядок интегрирования:

$$q=\iint\limits_D \cos\frac{x}{\sqrt{y}}\,dxdy=\!\!\rightarrow$$

$$D=\{0\le y\le 1,\quad 0\le x\le\sqrt{y}\}$$



$$\rightarrow=\int\limits_0^1\left(\ \int\limits_0^{\sqrt{y}} \cos\frac{x}{\sqrt{y}}dx\ \right)dy=\int\limits_0^1 \sqrt{y}\sin\frac{x}{\sqrt{y}}\Big|_0^{\sqrt{y}}dy=$$

$$=\int\limits_0^1 \sqrt{y}\sin\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}}\ dy=\sin 1\int\limits_0^1 y^{\frac{1}{2}}\ dy=\sin 1\cdot\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{2}{3}\sin 1.$$

№ 32.3.

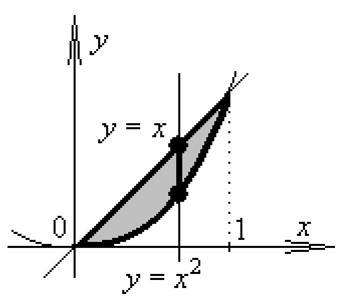
При нахождении центра масс неоднородной пластины D, с поверхностной плотностью $\rho=\rho(\vec{r})=\rho(x,y)$ и массой

$$m=\iint\limits_D \rho(\vec{r})dS=\iint\limits_D \rho(x,y)dxdy,$$

воспользуемся определением центра масс системы материальных точек. Разобьем область D кривыми на малые, попарно не налегающие части D_k с массами $\Delta_k m\approx\rho(\vec{\xi}_k)\Delta_k S=\rho(\xi_k,\eta_k)\Delta_k S$, настолько малые, что каждую можно рассматривать как материальную точку $\vec{\xi}_k=(\xi_k,\eta_k)$. Тогда

$$\vec{r}_0\approx\frac{1}{m}\sum_{k=1}^n\vec{\xi}_k\Delta_k m\approx\frac{1}{m}\sum_{k=1}^n\vec{\xi}_k\rho(\vec{\xi}_k)\Delta_k S\underset{d\to 0}{\rightarrow}\frac{1}{m}\iint\limits_D \vec{r}\rho(\vec{r})dS\quad\Rightarrow\quad\left[\begin{aligned}x_0&=\frac{1}{m}\iint\limits_D x\rho(x,y)dxdy\\ y_0&=\frac{1}{m}\iint\limits_D y\rho(x,y)dxdy\end{aligned}\right.$$

Найдем массу пластины:



$$m=\iint\limits_D \rho(x,y)dxdy=\iint\limits_D xydxdy=\rightarrow$$

$$D=\{0\le x\le 1,\quad x^2\le y\le x\}$$

$$\rightarrow=\int\limits_0^1\left(\int\limits_{x^2}^{x} xydy\right)dx=\int\limits_0^1\left(x\int\limits_{x^2}^{x} ydy\right)dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 x\,y^2\Big|_{x^2}^{x}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\left(x^3-x^5\right)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{6}x^6\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{24}.$$

Найдем координаты центра масс:

$$x_0=\frac{1}{m}\iint\limits_D x\rho(x,y)dxdy=\frac{1}{m}\iint\limits_D x\cdot xydxdy=\frac{1}{m}\int\limits_0^1\left(\int\limits_{x^2}^{x} x^2ydy\right)dx=\frac{1}{m}\int\limits_0^1\left(x^2\int\limits_{x^2}^{x} ydy\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2m}\int\limits_0^1\left(x^2y^2\Big|_{x^2}^{x}\right)dx=\frac{1}{2m}\int\limits_0^1\left(x^4-x^6\right)dx=\frac{1}{2m}\left(\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{35m}=\frac{24}{35}.$$

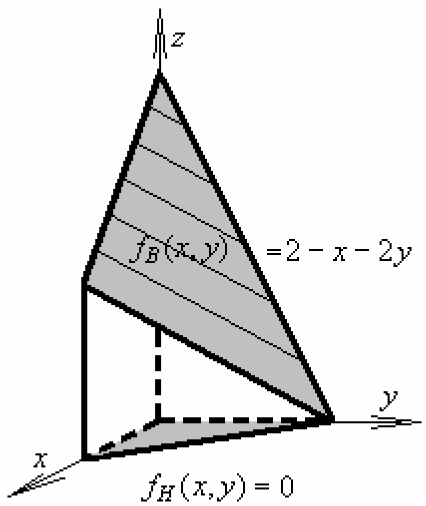
$$y_0=\frac{1}{m}\iint\limits_D y\rho(x,y)dxdy=\frac{1}{m}\iint\limits_D y\cdot xydxdy=\frac{1}{m}\int\limits_0^1\left(\int\limits_{x^2}^{x} xy^2dy\right)dx=\frac{1}{m}\int\limits_0^1\left(x\int\limits_{x^2}^{x} y^2dy\right)dx=$$

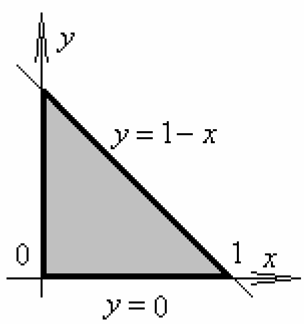
$$=\frac{1}{3m}\int\limits_0^1\left(xy^3\Big|_{x^2}^{x}\right)dx=\frac{1}{3m}\int\limits_0^1\left(x^4-x^7\right)dx=\frac{1}{3m}\left(\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{8}x^8\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{40m}=\frac{24}{40}.$$

№ 32.4.

$$V=\iint\limits_D\left(f_B(x,y)-f_H(x,y)\right)dxdy=\rightarrow$$

Выделим среди поверхностей $\{z=2-x-2y,\ z=0,\ \overbrace{x=0,\ y=0,\ x+y=1}\}$, ограничивающих объем V, те, уравнения которых не содержат переменной z. На плоскости xOy эти уравнения задают некоторые кривые, а в пространстве – цилиндрические поверхности, параллельные оси Oz, в основании которых лежат эти кривые. В данном примере прямые $\{x=0,\ y=0,\ x+y=1\}$ ограничивают некоторую область D, так что плоскости $\{z=0\quad\le\quad z=2-x-2y,\quad (x,y)\in D\}$, играющие роль “нижней” и “верхней”, достаточно построить схематично.





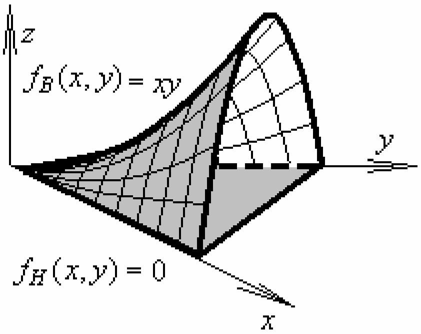
$$\to = \iint_D \left((2-x-2y)-0\right)dxdy = \left[D=\{0\le x\le 1,\ \ 0\le y\le 1-x\}\right] = \int_0^1\left(\ \int_0^{1-x}(2-x-2y)\,dy\ \right)dx =$$

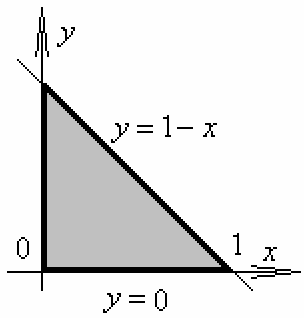
$$= \int_0^1 \left((2-x)y-y^2\right)\Big|_0^{1-x}\ dx = \int_0^1\left((2-x)(1-x)-(1-x)^2\right)dx = \int_0^1 (1-x)dx = \left(x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

№ 32.5.

$$V = \iint_D \left(f_B(x,y)-f_H(x,y)\right)dxdy = \to$$

Выделим среди поверхностей $\{\, z=xy,\ \ z=0,\ \ \overbrace{x+y=1}\}$, ограничивающих объем V, те, уравнения которых не содержат переменной z. В данном примере прямая $\{y=1-x\}$ не ограничивает никакую область D, так что поверхности $\{\ z=xy,\ \ z=0\}$ необходимо построить достаточно точно: $z=xy$ – седловая поверхность, $z=0$ – горизонтальная плоскость, пересекающиеся по осям координат Ox, Oy.





Из рисунка видно, что играет роль области D, “нижней” и “верхней” поверхностей $\{z=0\ \ \le\ \ z=xy,\ \ (x,y)\in D\}$.

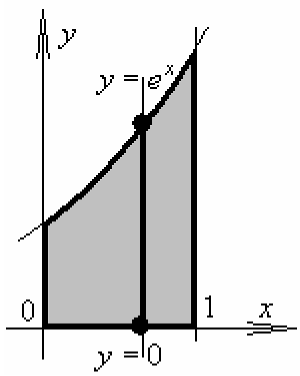
$$\to = \iint_D (xy-0)\,dxdy = \to$$

$$D=\{0\le x\le 1,\ \ 0\le y\le 1-x\}$$

$$\to = \int_0^1\left(\ \int_0^{1-x} xydy\ \right)dx = \int_0^1\left(\ x\int_0^{1-x} ydy\ \right)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 xy^2\ \Big|_0^{1-x}\ dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)^2dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1\left(x-2x^2+x^3\right)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{24}.$$

№ 32.6.



$$S = \iint_D 1\ dxdy = \to$$

$$D=\{0\le x\le 1,\ \ 0\le y\le e^x\}$$

$$\to \int_0^1\left(\ \int_0^{e^x} 1\ dy\ \right)dx = \int_0^1\left(e^x-0\right)dx = e^x\Big|_0^1 = e-1.$$

Сравнить: нахождение площади “криволинейной трапеции” с помощью двойного интеграла с нахождением площади с помощью однократного интеграла:

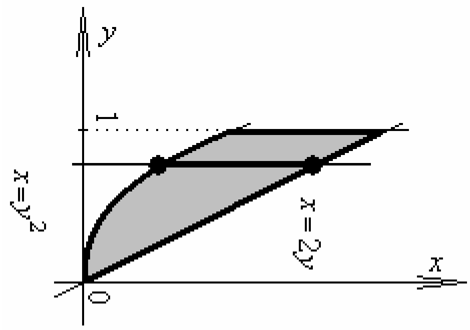
$$S=\iint\limits_D 1\,dxdy=\left[D=\{a\le x\le b,\ f_H(x)\le y\le f_B(x)\}\right]=\int\limits_a^b\left(\ \int\limits_{f_H(x)}^{f_B(x)} 1\,dy\ \right)dx=\int\limits_a^b\left(f_B(x)-f_H(x)\right)dx$$

№ 32.7.

$$S=\iint\limits_D 1\,dxdy=\to$$

$$D=\{0\le y\le 1,\quad y^2\le x\le 2y\}$$

$$\to=\int\limits_0^1\left(\ \int\limits_{y^2}^{2y}1\,dx\ \right)dy=\int\limits_0^1\left(2y-y^2\right)dy=\left(y^2-\frac{1}{3}y^3\right)\Big|_0^1=\frac{2}{3}.$$

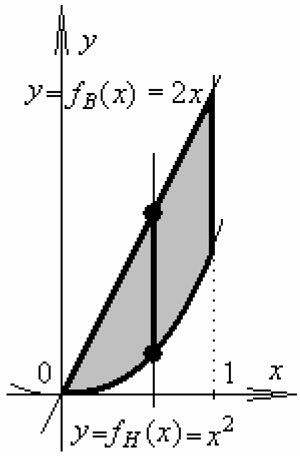


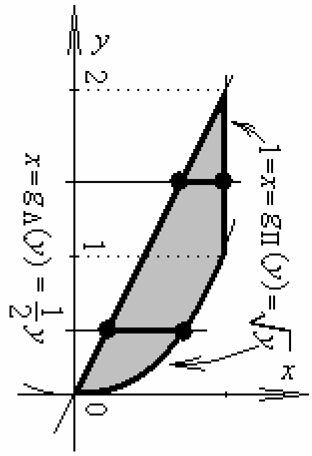
Сравнить: нахождение площади “криволинейной трапеции” с помощью двойного интеграла с нахождением площади с помощью однократного интеграла:

$$S=\iint\limits_D 1\,dxdy=\left[D=\{c\le y\le d,\ g_\Lambda(y)\le x\le g_\Pi(y)\}\right]=\int\limits_c^d\left(\ \int\limits_{g_\Lambda(y)}^{g_\Pi(y)}1\,dx\ \right)dy=\int\limits_c^d\left(g_\Pi(y)-g_\Lambda(y)\right)dy$$

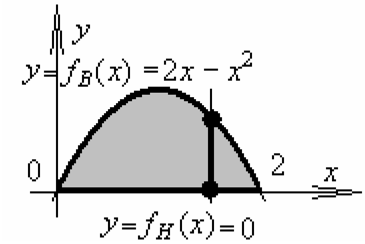
№ 32.8.

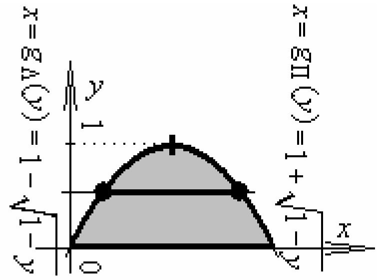
$$\int\limits_0^1\left(\ \int\limits_{x^2}^{2x}f(x,y)dy\ \right)dx=\int\limits_0^1\left(\ \int\limits_{\frac{1}{2}y}^{\sqrt{y}}f(x,y)dx\ \right)dy+\int\limits_1^2\left(\ \int\limits_{\frac{1}{2}y}^{1}f(x,y)dx\ \right)dy.$$





№ 32.9. $$\int\limits_0^2\left(\ \int\limits_0^{2x-x^2}f(x,y)dy\ \right)dx=\int\limits_0^1\left(\ \int\limits_{1-\sqrt{1-y}}^{1+\sqrt{1-y}}f(x,y)dx\ \right)dy.$$



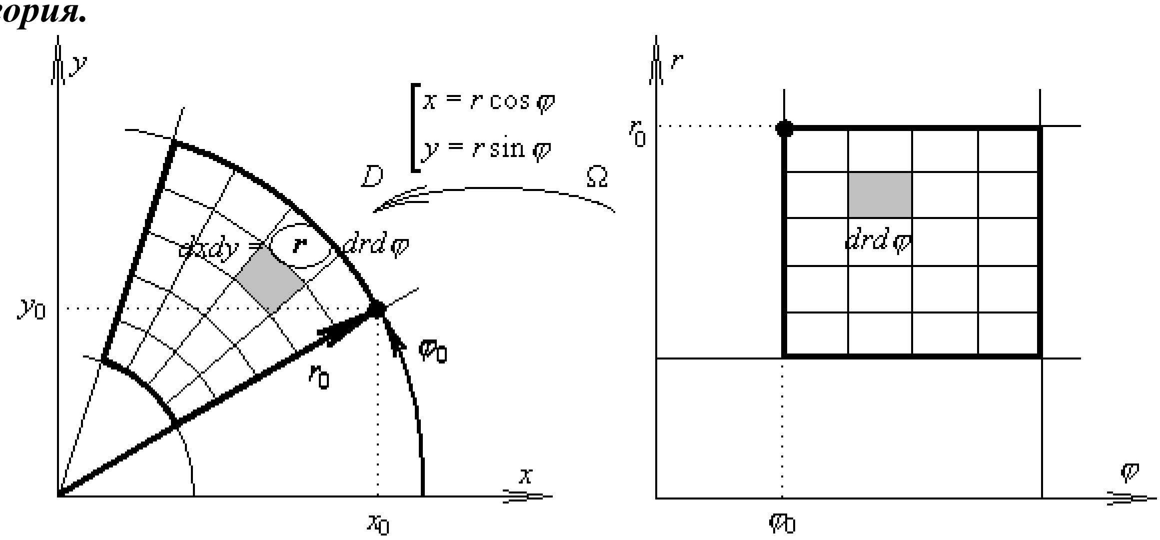


33. Двойные интегралы. Переход к полярным координатам

Условия.

№ 33.1. Найти массу пластины, ограниченной заданными кривыми, с поверхностной плотностью $\rho = \rho(x, y)$.	
$x^2+y^2=a^2, \quad \rho=\sqrt{x^2+y^2}$.	$x^2+y^2=a^2, \quad \rho=x^2+y^2$.
№ 33.2. Найти заряд пластины, ограниченной заданными кривыми, с поверхностной плотностью $\rho = \rho(x, y)$.	
$x^2+y^2=2ax, \quad \rho=x^2+y^2$.	$x^2+y^2=ax, \quad \rho=\sqrt{x^2+y^2}$.
№ 33.3. Найти центр тяжести однородной пластины, ограниченной заданными кривыми.	
$x^2+y^2=2ay$.	$x^2+y^2=ax$.
Найти объем тела, ограниченного поверхностями.	
№ 33.4. $z=e^{-(x^2+y^2)}$, $z=0$, $x^2+y^2=a^2$. **№ 33.5**. $z=\sqrt{x^2+y^2}, \quad z=0, \quad x^2+y^2=ax$.	**№ 33.4**. $z=\dfrac{1}{x^2+y^2}$, $z=0$, $x^2+y^2=a^2$. **№ 33.5**. $z=x^2+y^2, \quad z=0, \quad x^2+y^2=ay$.
Найти площадь пластины, ограниченной кривыми.	
№ 33.6. $\left(x^2+y^2\right)^2=x^2-y^2$. **№ 33.7**. $r=a(1+\cos\varphi)$.	**№ 33.6**. $\left(x^2+y^2\right)^2=2xy$. **№ 33.7**. $r=a\sin 3\varphi$
№ 33.8. Найти массу пластины, ограниченной заданными кривыми, с поверхностной плотностью $\rho = \rho(x, y)$.	
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \quad \rho=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$.	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \quad \rho=\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}}$.
№ 33.9. Найти площадь пластины, ограниченной кривыми.	
$xy=a, \quad xy=b, \quad (0<a<b)$ $y=cx^2, \quad y=dx^2, \quad (0<c<d)$.	$xy=a, \quad xy=b, \quad (0<a<b)$ $y=cx, \quad y=dx, \quad (0<c<d)$.

Теория.

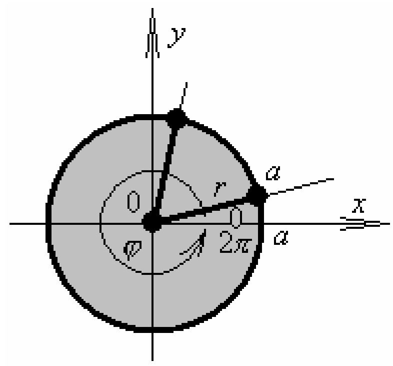


$$\iint\limits_D f(x^2+y^2)\,dxdy = \iint\limits_\Omega f(r^2)\ \boldsymbol{r}\ dr d\varphi$$

Решения.

№ 33.1.

$$m=\iint\limits_D \rho(x,y)dxdy=\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=\rightarrow$$



Кривая $x^2+y^2=a^2$ – это окружность радиуса a с центром в начале координат $(0,0)$. Учитывая вид подынтегральной функции $f(x^2+y^2)$ и "круговую" форму области D, перейдем к полярным координатам.

Поскольку

$$x^2+y^2=a^2 \rightarrow r=a\ ,$$

то

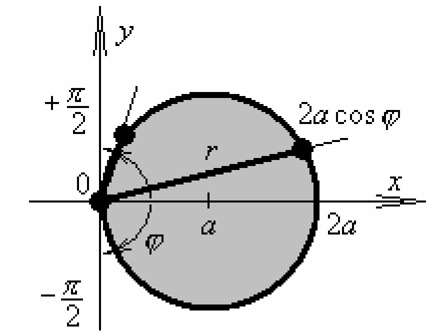
$$D=\{x^2+y^2\le a^2\}\ \rightarrow\ \Omega=\{r\le a\}=\{0\le\varphi\le 2\pi,\ \ 0\le r\le a\}.$$

Тогда

$$\rightarrow=\iint\limits_\Omega \sqrt{r^2}\ r\ drd\varphi=\int\limits_0^{2\pi}\left(\ \int\limits_0^a r^2dr\ \right)d\varphi=2\pi\int\limits_0^a r^2dr=2\pi\cdot\frac{1}{3}r^3\Big|_0^a=\frac{2}{3}\pi a^3.$$

№ 33.2.

$$q=\iint\limits_D \rho(x,y)dxdy=\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy=\rightarrow$$



Кривая

$$x^2+y^2=2ax\Rightarrow\left(x^2-2ax+a^2\right)+y^2=a^2\Rightarrow(x-a)^2+y^2=a^2$$

это "смещенная" окружность радиуса a с центром в точке $(a,0)$. Учитывая вид подынтегральной функции $f(x^2+y^2)$ и "круговую" форму области D, перейдем к полярным координатам.

Поскольку

$$x^2+y^2=2ax\ \rightarrow\ r^2=2ar\cos\varphi\ \Rightarrow\ r=2a\cos\varphi,$$

то

$$D=\{x^2+y^2\le 2ax\}\ \ \rightarrow\ \ \Omega=\{r\le 2a\cos\varphi\}=\{-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le+\frac{\pi}{2},\ \ 0\le r\le 2a\cos\varphi\}.$$

Тогда

$$\rightarrow=\iint\limits_\Omega r^2\ r\ drd\varphi=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\left(\ \int\limits_0^{2a\cos\varphi} r^3dr\ \right)d\varphi=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{r^4}{4}\Big|_0^{2a\cos\varphi}d\varphi=\frac{16a^4}{4}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi d\varphi=$$

$$=4a^4\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\left(\cos^2\varphi\right)^2d\varphi=4a^4\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2d\varphi=a^4\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\left(1+2\cos 2\varphi+\cos^2 2\varphi\right)d\varphi=$$

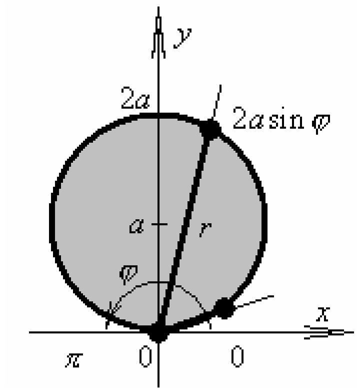
$$=a^4\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\left(1+2\cos 2\varphi+\frac{1+\cos 4\varphi}{2}\right)d\varphi=a^4\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3}{2}+2\cos 2\varphi+\frac{1}{2}\cos 4\varphi\right)d\varphi=\frac{3}{2}a^4\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}1d\varphi+0+0=\frac{3a^4}{2}\pi.$$

№ 33.3.

Из физических понятий очевидно, что центр масс однородного круга находится в его центре: $(x_0, y_0) = (0, a)$. Цель приведенных ниже расчетов, в частности, показать адекватность математических формул интуитивным представлениям.

Найдем массу пластины:

$$m = \iint\limits_D \rho(x,y)dxdy = \rho \iint\limits_D 1\, dxdy = \rightarrow$$



Кривая

$$x^2 + y^2 = 2ay \Rightarrow x^2 + \left(y^2 - 2ay + a^2\right) = a^2 \Rightarrow x^2 + (y-a)^2 = a^2$$

это "смещенная" окружность радиуса a с центром в точке $(0, a)$. Учитывая вид подынтегральной функции $f(x^2+y^2)$ и "круговую" форму области D, перейдем к полярным координатам.

Поскольку

$$x^2 + y^2 = 2ay \;\rightarrow\; r^2 = 2ar\sin\varphi \;\Rightarrow\; r = 2a\sin\varphi,$$

то

$$D = \{x^2 + y^2 \le 2ay\} \;\rightarrow\; \Omega = \{r \le 2a\sin\varphi\} = \{0 \le \varphi \le \pi, \quad 0 \le r \le 2a\sin\varphi\}.$$

Тогда

$$\rightarrow = \rho \iint\limits_\Omega r\, drd\varphi = \rho \int_0^\pi \left(\int_0^{2a\sin\varphi} r\, dr \right) d\varphi = \rho \frac{1}{2} \int_0^\pi r^2 \Big|_0^{2a\sin\varphi} d\varphi =$$

$$= \frac{\rho}{2} \int_0^\pi (2a\sin\varphi)^2 d\varphi = \frac{\rho}{2} 4a^2 \int_0^\pi \frac{1-\cos 2\varphi}{2} d\varphi = \rho a^2 \int_0^\pi (1 - \cos 2\varphi) d\varphi = \rho\pi a^2.$$

Найдем координаты центра масс:

$$x_0 = \frac{1}{m} \iint\limits_D x\rho dxdy = \frac{\rho}{m} \iint\limits_\Omega r\cos\varphi\; r\, drd\varphi = \frac{\rho}{m} \int_0^\pi \left(\int_0^{2a\sin\varphi} r^2 \cos\varphi dr \right) d\varphi = \frac{\rho}{m} \frac{1}{3} \int_0^\pi \cos\varphi\, r^3 \Big|_0^{2a\sin\varphi} d\varphi =$$

$$= \frac{\rho}{3m} \int_0^\pi (2a\sin\varphi)^3 \cos\varphi d\varphi = \frac{\rho}{3m} 8a^3 \int_0^\pi \sin^3\varphi d\sin\varphi = \frac{8a^3\rho}{3m} \frac{\sin^4\varphi}{4} \Big|_0^\pi = 0.$$

$$y_0 = \frac{1}{m} \iint\limits_D y\rho dxdy = \frac{\rho}{m} \iint\limits_\Omega r\sin\varphi\; r\, drd\varphi = \frac{\rho}{m} \int_0^\pi \left(\int_0^{2a\sin\varphi} r^2 \sin\varphi dr \right) d\varphi = \frac{\rho}{m} \frac{1}{3} \int_0^\pi \sin\varphi\, r^3 \Big|_0^{2a\sin\varphi} d\varphi =$$

$$= \frac{\rho}{3m} \int_0^\pi (2a\sin\varphi)^3 \sin\varphi d\varphi = \frac{\rho}{3m} 8a^3 \int_0^\pi \left(\sin^2\varphi\right)^2 d\varphi = \frac{8\rho a^3}{3m} \int_0^\pi \left(\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi =$$

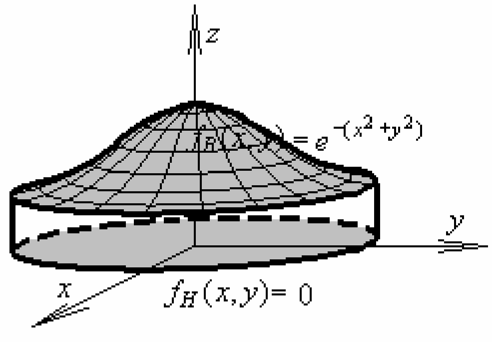
$$= \frac{2\rho a^3}{3m} \int_0^\pi \left(1 - 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi\right) d\varphi = \frac{2\rho a^3}{3m} \int_0^\pi \left(1 - 2\cos 2\varphi + \frac{1+\cos 4\varphi}{2}\right) d\varphi =$$

$$= \frac{2\rho a^3}{3m} \int_0^\pi \left(\frac{3}{2} - 2\cos 2\varphi + \frac{1}{2}\cos 4\varphi\right) d\varphi = \frac{2\rho a^3}{3m} \left(\frac{3}{2}\pi - 0 + 0\right) = \frac{1}{m} \rho\pi a^3 = a.$$

№ 33.4.

$$V=\iint\limits_D \big(f_B(x,y)-f_H(x,y)\big)\,dxdy=\!\!\to$$

Выделим среди поверхностей $\{\,z=e^{-(x^2+y^2)},\ z=0,\ \overbrace{x^2+y^2=a^2}\}$, ограничивающих объем V, те, уравнения которые не содержат переменной z.



На плоскости xOy эти уравнения задают некоторые кривые, а в пространстве – цилиндрические поверхности, параллельные оси Oz, в основании которых лежат эти кривые. В данном примере окружность $\{\,x^2+y^2=a^2\}$ ограничивает круг $D=\{\,x^2+y^2\le a^2\}$ радиуса a с центром в начале координат, так что поверхности $\{z=0\ \le\ z=e^{-(x^2+y^2)},\ \ (x,y)\in D\}$, играющие роль "нижней" и "верхней", достаточно построить схематично.

$$\to=\iint\limits_D \big(e^{-(x^2+y^2)}-0\big)\,dxdy=\!\!\to$$

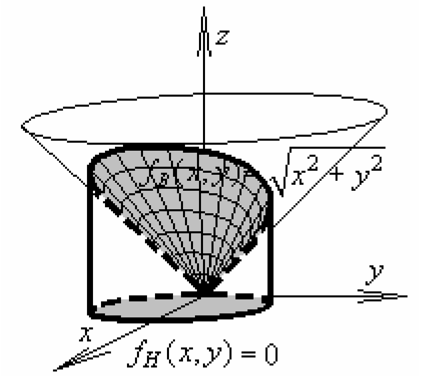
Учитывая вид подынтегральной функции $f(x^2+y^2)$ и "круговую" форму области D, перейдем к полярным координатам.

$$D=\{x^2+y^2\le a^2\}\ \to\ \Omega=\{r\le a\}=\{0\le\varphi\le 2\pi,\ \ 0\le r\le a\}.$$

Имеем

$$\to=\iint\limits_\Omega e^{-r^2}\ r\,drd\varphi=\int\limits_0^{2\pi}\left(\ \int\limits_0^a e^{-r^2}r\,dr\ \right)d\varphi=2\pi\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^a e^{-r^2}dr^2=-\pi e^{-r^2}\ \Big|_0^a=\pi\big(1-e^{-a^2}\big).$$

№ 33.5.



$$V=\iint\limits_D \big(f_B(x,y)-f_H(x,y)\big)\,dxdy=\!\!\to$$

Выделим среди поверхностей

$\{\,z=\sqrt{x^2+y^2},\ \ z=0,\ \ \overbrace{x^2+y^2=ax}\}$,

ограничивающих объем V, те, уравнения которых не содержат переменной z. В данном примере "смещенная" окружность $\{\,x^2+y^2=ax\}$ ограничивает круг $D=\{\ \left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2\le\left(\frac{a}{2}\right)^2\}$ радиуса $\frac{a}{2}$ с центром в точке $\left(\frac{a}{2},0\right)$, так что поверхности $\{z=0\ \le\ z=\sqrt{x^2+y^2},\ \ (x,y)\in D\}$, играющие роль "нижней" и "верхней", достаточно построить схематично.

$$\to=\iint\limits_D \big(\sqrt{x^2+y^2}-0\big)\,dxdy=\!\!\to$$

Учитывая вид подынтегральной функции $f(x^2+y^2)$ и "круговую" форму области D, перейдем к полярным координатам.

$$D=\{x^2+y^2\le ax\}\to\Omega=\{r\le a\cos\varphi\}=\{-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le+\frac{\pi}{2},0\le r\le a\cos\varphi\}.$$

Имеем:

$$\to=\iint\limits_{\Omega}\sqrt{r^2}\ r\ drd\varphi=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\left(\ \int\limits_{0}^{a\cos\varphi} r^2dr\ \right)d\varphi=\frac{1}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} r^3\Big|_0^{a\cos\varphi}d\varphi=\frac{a^3}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi d\varphi=\frac{a^3}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\cos\varphi d\varphi=$$

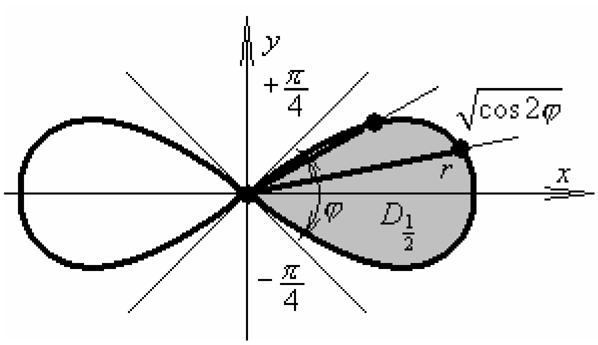
$$=\frac{a^3}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2\varphi\right)d\sin\varphi=\frac{a^3}{3}\int\limits_{-1}^{+1}\left(1-t^2\right)dt=\frac{2a^3}{3}\int\limits_{0}^{+1}\left(1-t^2\right)dt=\frac{2}{3}a^3\left(t-\frac{1}{3}t^3\right)\Big|_0^1=\frac{2}{3}a^3\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{9}a^3$$

№ 33.6.

Кривая $L=\{\ \left(x^2+y^2\right)^2=x^2-y^2\ \}$, ограничивающая область D, в полярной системе координат имеет более простое описание:

$$\left(r^2\right)^2=r^2\cos^2\varphi-r^2\sin^2\varphi\quad\Rightarrow\quad r^2=\cos 2\varphi\quad\Rightarrow\quad r=\sqrt{\cos 2\varphi},\quad -\frac{\pi}{4}+\pi k\le\varphi\le+\frac{\pi}{4}+\pi k$$

$$S=\iint\limits_{D}1\ dxdy=2\iint\limits_{D_{\frac{1}{2}}}1\ dxdy=\to$$



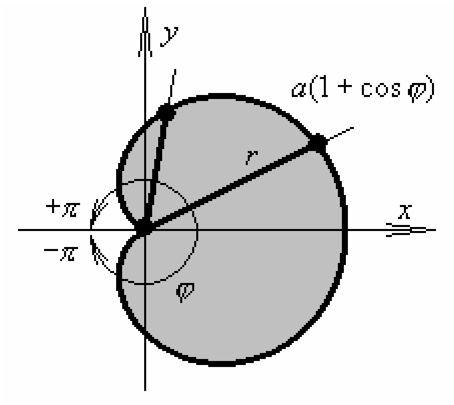
$$D_{\frac{1}{2}}\to\Omega=\{-\frac{\pi}{4}\le\varphi\le+\frac{\pi}{4},\ \ 0\le r\le\sqrt{\cos 2\varphi}\}$$

$$\to=2\iint\limits_{\Omega}rdrd\varphi=2\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}}\int\limits_{0}^{\sqrt{\cos 2\varphi}}rdr\ d\varphi=2\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}}r^2\Big|_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}}d\varphi=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}}\cos 2\varphi d\varphi=2\int\limits_{0}^{+\frac{\pi}{4}}\cos 2\varphi d\varphi=\sin 2\varphi\ \Big|_0^{+\frac{\pi}{4}}=1.$$

№ 33.7.

$$S=\iint\limits_{D}1\ dxdy=\to$$

Перейдем к полярным координатам:



$$D\to\Omega=\{-\pi\le\varphi\le+\pi,\ \ 0\le r\le a(1+\cos\varphi)\}$$

$$\to=\iint\limits_{\Omega}r\ drd\varphi=\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\left(\ \int\limits_{0}^{a(1+\cos\varphi)}r\ dr\ \right)d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}r^2\ \Big|_0^{a(1+\cos\varphi)}d\varphi=\frac{a^2}{2}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}(1+\cos\varphi)^2d\varphi=$$

$$=\frac{a^2}{2}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)d\varphi=\frac{a^2}{2}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\left(1+2\cos\varphi+\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi=$$

$$=\frac{a^2}{2}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\frac{3}{2}d\varphi+0+0=\frac{3a^2}{4}2\pi=\frac{3a^2}{2}\pi.$$

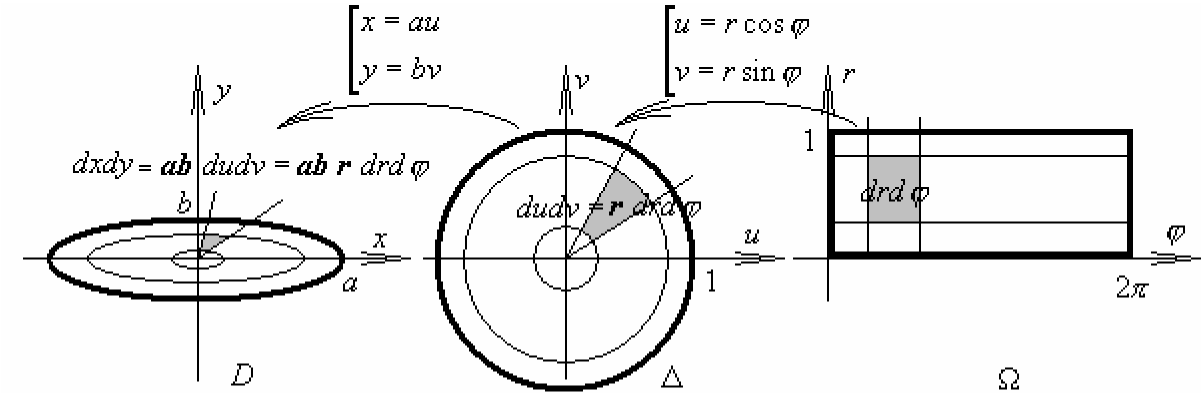
Сравнить: нахождение площади “криволинейного сектора” с помощью двойного интеграла с нахождением с помощью однократного интеграла:

$$S=\iint\limits_D 1\,dxdy=\left[D\to\Omega=\{\alpha\le\varphi\le\beta,\ \ r_H(\varphi)\le r\le r_B(\varphi)\right]=\iint\limits_\Omega r\ drd\varphi=\int\limits_\alpha^\beta\left(\ \int\limits_{r_H(\varphi)}^{r_B(\varphi)} r\ dr\ \right)d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta r^2\ \Big|_{r_H(\varphi)}^{r_B(\varphi)}\ d\varphi=\frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta\left(r_B^2(\varphi)-r_H^2(\varphi)\right)d\varphi\ .$$

№ 33.8.

$$m=\iint\limits_D\rho(x,y)dxdy=\iint\limits_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy=\to$$



Перейдем от старых координат (x,y) к промежуточным (u,v), полагая что:

$$\begin{cases}x=au\\ y=bv\end{cases}\quad\Rightarrow\quad dxdy=\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|dudv=\begin{vmatrix}x'_u & x'_v\\ y'_u & y'_v\end{vmatrix}dudv=\begin{vmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{vmatrix}dudv=\boldsymbol{ab}\ dudv$$

$$\Rightarrow\qquad D=\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le1\}\to\Delta=\{u^2+v^2\le1\}.$$

$$\to=\iint\limits_\Delta(u^2+v^2)\ ab\ dudv=\to$$

Переходя далее от промежуточных координат (u,v) к полярным (r,φ)

$$\begin{cases}u=r\cos\varphi\\ v=r\sin\varphi\end{cases}\quad\Rightarrow\quad dudv=\left|\frac{D(u,v)}{D(r,\varphi)}\right|drd\varphi=\begin{vmatrix}u'_r & u'_\varphi\\ v'_r & v'_\varphi\end{vmatrix}drd\varphi=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{vmatrix}=\boldsymbol{r}\ drd\varphi\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\qquad\Delta=\{u^2+v^2\le1\}\to\Omega=\{r\le1\}=\{0\le\varphi\le2\pi,\ \ 0\le r\le1\},$$

находим:

$$\to=ab\iint\limits_\Omega r^2\ \ r\ drd\varphi=ab\int\limits_0^{2\pi}\left(\ \int\limits_0^1 r^3dr\ \right)d\varphi=2\pi ab\int\limits_0^1 r^3dr=2\pi ab\cdot\frac{1}{4}r^4\Big|_0^1=\frac{1}{2}\pi ab.$$

Замечание. Координаты (r,φ) для исходных декартовых координат (x,y) получили название обобщенных полярных координат

$$\begin{cases}x=ar\cos\varphi\\ y=br\sin\varphi\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\left|\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)}\right|=\boldsymbol{ab\ r}$$

№ 33.9.

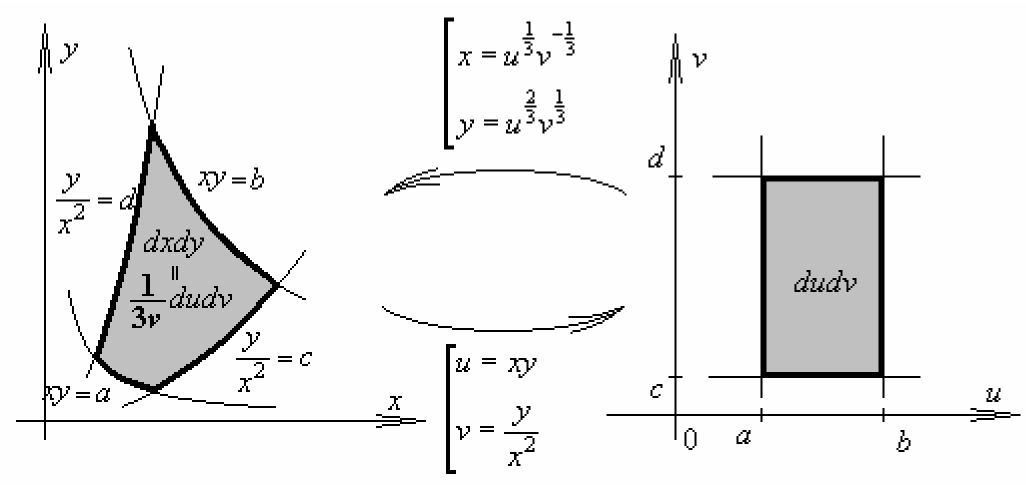
Область D, очевидно, можно описать в виде:

$$D=\{a\le xy\le b,\quad c\le\frac{y}{x^2}\le d\}.$$

Перейдем от старых координат (x,y) к новым (u,v), полагая что:

$$\left[\begin{array}{l}u=xy\\ v=\dfrac{y}{x^2}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=u^{\frac13}v^{-\frac13}\\ y=u^{\frac23}v^{\frac13}\end{array}\right.\quad\Rightarrow\quad dxdy=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}dudv=\begin{vmatrix}\frac13 u^{-\frac23}v^{-\frac13} & -\frac13 u^{\frac13}v^{-\frac43}\\ \frac23 u^{-\frac13}v^{\frac13} & \frac13 u^{\frac23}v^{-\frac23}\end{vmatrix}dudv=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3v}}dudv\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D\to\Omega=\{a\le u\le b,\quad c\le v\le d\}.$$



Тогда:

$$S=\iint\limits_D 1\,dxdy=\iint\limits_\Omega\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|dudv=\iint\limits_\Omega\frac{1}{3v}dudv=\int\limits_a^b\left(\ \int\limits_c^d\frac{1}{3v}\ dv\ \right)du=$$

$$=\frac13\int\limits_a^b du\int\limits_c^d\frac1v\ dv=\frac13(b-a)\ln v\ \Big|_c^d=\frac13(b-a)\ln\frac{d}{c}.$$

34. Тройные интегралы. Физические и геометрические приложения

Условия.

№ 34.1. Найти массу тела, ограниченного заданными поверхностями, с объемной плотностью $\rho = \rho(x, y, z)$.	
$z = x^2 y,\ z = 0,\ y = (x-1)^2,\ y = x+1;$ $\rho = \dfrac{z}{x^3 y^2}.$	$z = xy^2,\ z = 0,\ y = 4x - x^2,\ y = 4 - x;$ $\rho = \dfrac{z}{x^2 y^3}.$
№ 34.2. Найти заряд тела, ограниченного заданными поверхностями, с объемной плотностью $\rho = \rho(x, y, z)$.	
$z = \pi,\ \ z = x^4 y^2,\ \ y = \dfrac{1}{2}(x+1),\ \ y = 1,\ \ x = -1;$ $\rho = \dfrac{\cos z}{\sin x^4 y^2}.$	$z = \dfrac{\pi}{2},\ z = x^3 y,\ \ y = 1 - x,\ \ y = 1,\ \ x = 1;$ $\rho = \dfrac{\sin z}{\cos x^3 y}.$
№ 34.3. Найти центр масс однородной пирамиды, ограниченной плоскостями.	
$6x + 3y + 2z = 6,\ \ z = 0,\ \ y = 0,\ \ \ x = 0.$	$2x + y + 2z = 2,\ \ z = 1,\ \ y = 0,\ \ \ x = 0.$
№ 34.4. Найти объем тела, ограниченного поверхностями.	
$z = xy,\ \ \ z = 0,\ \ \ x + y = 1.$	$z = xy,\ \ \ z = 0,\ \ \ y = x,\ \ \ x = 1.$

Теория.

Пусть в области V задана функция $f(x, y, z)$.

Разобьем область V поверхностями на малые, попарно не налегающие части V_k

$$V = V_1 \cup \ldots \cup V_k \cup \ldots \cup V_n,$$

с объемами $\Delta_k V$, и обозначим через $d = \max\limits_{1 \le k \le n} d_k$ диаметр разбиения.

Выберем в каждой части промежуточную точку $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \in V_k$.

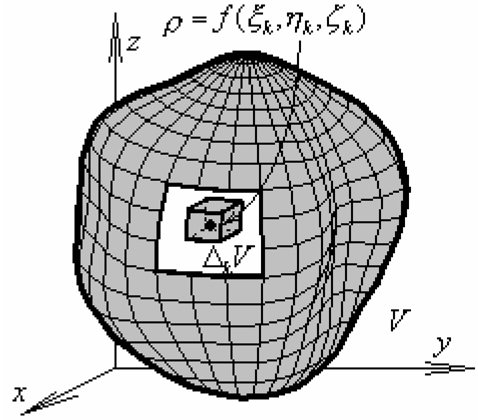
Составим интегральную сумму

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta_k V.$$

Тройным интегралом называется предел интегральных сумм, когда диаметр разбиения стремится к нулю

$$\lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta_k V = \iiint\limits_V f(x, y, z)\, dxdydz,$$

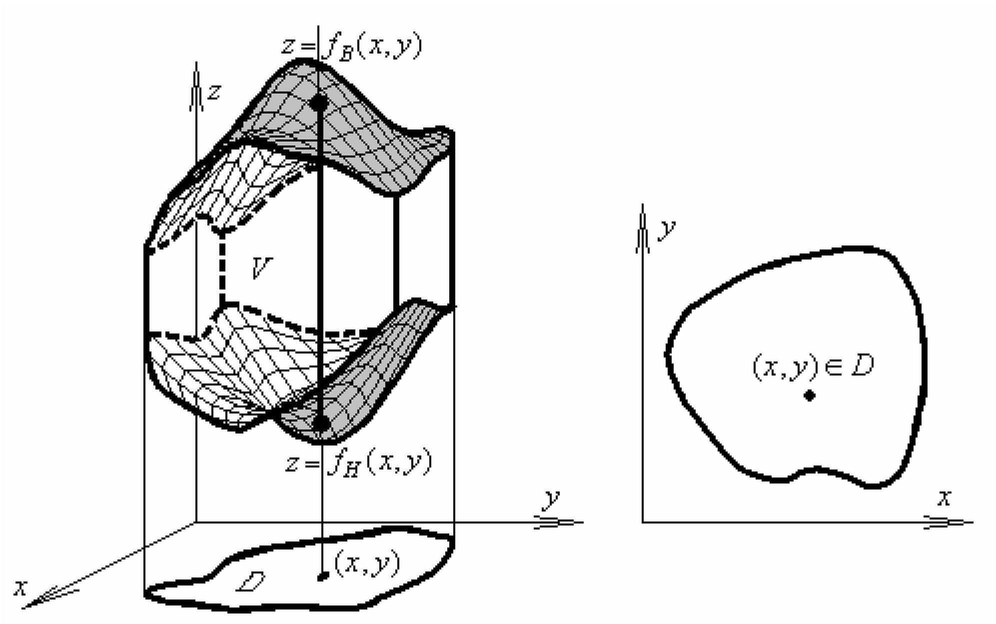
если он существует, конечен и не зависит ни от способа разбиения, ни от выбора промежуточных точек.



Физический смысл: масса (заряд) тела V с объемной плотностью $\rho = f(x, y, z)$.

$$m = \sum_{k=1}^{n} \Delta_k m \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta_k V$$

Если область V имеет вид “криволинейного цилиндра”,



$$V = \{(x, y) \in D, \quad f_H(x, y) \le z \le f_B(x, y)\},$$

то тройной интеграл может быть сведен к повторному:

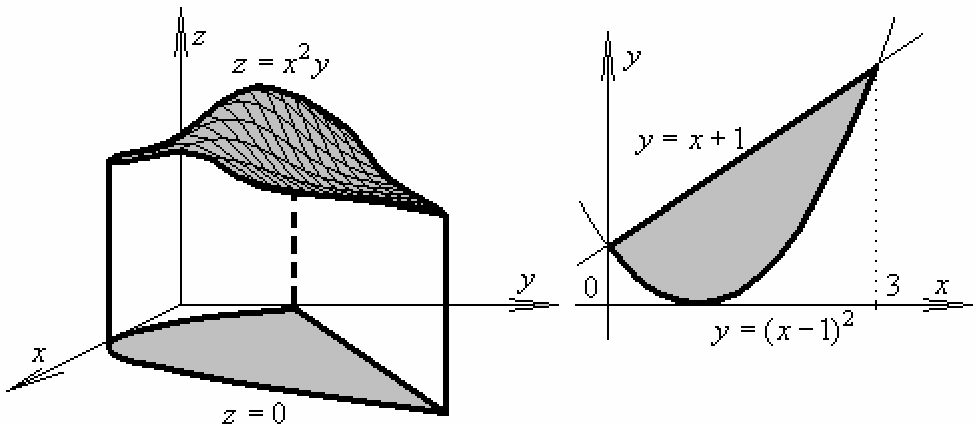
$$\boxed{\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dxdydz = \iint\limits_D \left(\int\limits_{f_H(x,y)}^{f_B(x,y)} f(x, y, z)\,dz \right) dxdy.}$$

Решения.

№ 34.1.

$$m=\iiint\limits_V \rho(x,y,z)\,dxdydz=\iiint\limits_V \frac{z}{x^3y^2}\,dxdydz=\to$$

Выделим среди поверхностей $\{z=x^2y,\quad z=0,\ \overbrace{y=(x-1)^2,\ y=x+1}\}$, ограничивающих объем V, те, уравнения которых не содержат переменной z. На плоскости xOy эти уравнения задают некоторые кривые, а в пространстве – цилиндрические поверхности, параллельные оси Oz, в основании которых лежат эти кривые. В данном примере кривые $\{y=(x-1)^2,\ y=x+1\}$ ограничивают некоторую область D, так что поверхности $\{z=0\quad\le\quad z=x^2y,\quad (x,y)\in D\}$, играющие роль “нижней” и “верхней”, достаточно построить схематично.



$$V=\{(x,y)\in D,\quad 0\le z\le x^2y\},\qquad D=\{0\le x\le 3,\ \ (x-1)^2\le y\le x+1\},$$

$$\to=\iint\limits_D\left(\int\limits_0^{x^2y}\frac{z}{x^3y^2}\,dz\right)dxdy=\iint\limits_D\frac{1}{x^3y^2}\frac{1}{2}z^2\Big|_0^{x^2y}dxdy=\frac{1}{2}\iint\limits_D\frac{1}{x^3y^2}\left(x^2y\right)^2dxdy=$$

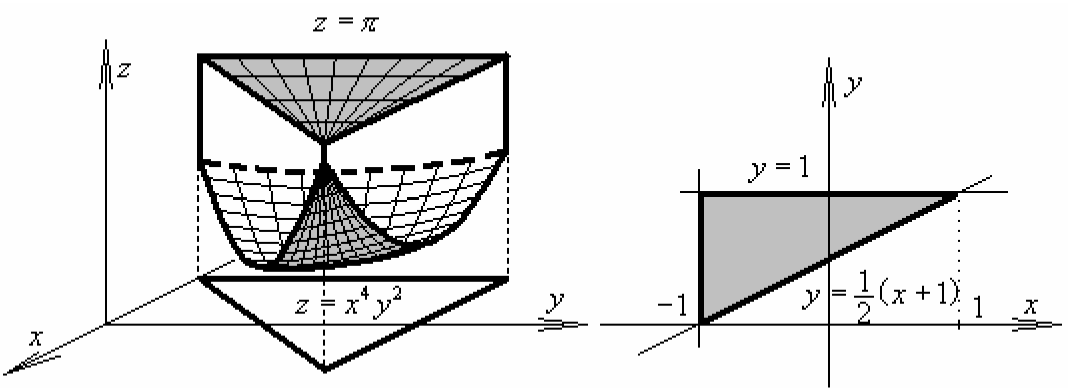
$$=\frac{1}{2}\iint\limits_D x\,dxdy=\frac{1}{2}\int\limits_0^3\left(\int\limits_{(x-1)^2}^{x+1}x\,dy\right)dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^3\left(x\int\limits_{(x-1)^2}^{x+1}1\,dy\right)dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^3x\left((x+1)-(x-1)^2\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^3\left(3x^2-x^3\right)dx=\frac{1}{2}\left(3\cdot\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^3=\frac{1}{2}\left(3^3-\frac{1}{4}3^4\right)=\frac{27}{8}.$$

№ 34.2.

$$q=\iiint\limits_V \rho(x,y,z)\,dxdydz=\iiint\limits_V \frac{\cos z}{\sin x^4y^2}\,dxdydz=\to$$

Выделим среди поверхностей $\{z=\pi,\ z=x^4y^2,\ \ \overbrace{y=\frac{1}{2}(x+1),\ y=1,\ x=-1}\}$ ограничивающих объем V, те, уравнения которых не содержат переменной z. В данном примере прямые $\{y=\frac{1}{2}(x+1),\ y=1,\ x=-1\}$ ограничивают некоторую область D, так что поверхности $\{\,z=x^4y^2\quad\le\quad z=\pi,\quad (x,y)\in D\}$, играющие роль “нижней” и “верхней”, достаточно построить схематично.



$$V=\{(x,y)\in D,\quad x^4y^2\le z\le\pi\},\quad D=\{-1\le x\le+1,\ \ \frac{1}{2}(x+1)\le y\le 1\},$$

$$\to=\iint_D\Bigg(\int_{x^4y^2}^{\pi}\frac{\cos z}{\sin x^4y^2}dz\Bigg)dxdy=\iint_D\frac{1}{\sin x^4y^2}\sin z\ \Bigg|_{x^4y^2}^{\pi}dxdy=-\iint_D 1\,dxdy=-1.$$

Здесь воспользовались геометрическим смыслом двойного интеграла от функции, равной ***1***. В данном случае это площадь прямоугольного треугольника с катетами длиной 1 и 2.

№ 34.3.

При нахождении центра масс неоднородного тела V *с объемной плотностью* $\rho=\rho(\vec{\boldsymbol r})=\rho(x,y,z)$ *и массой*

$$m=\iiint_V\rho(\vec{\boldsymbol r})dV=\iiint_V\rho(x,y,z)dxdydz$$

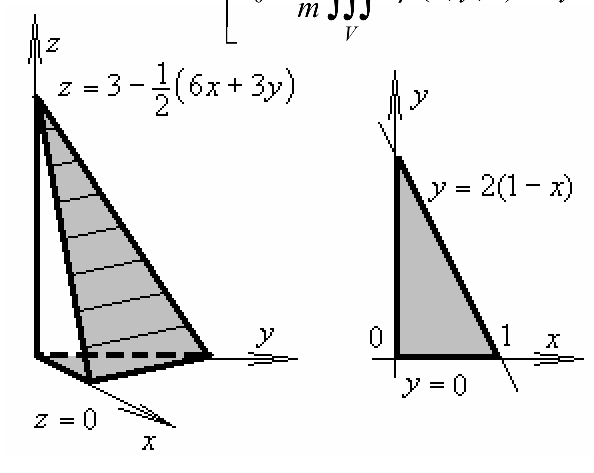
воспользуемся определением центра масс системы материальных точек. Разобьем объем V *поверхностями на малые, попарно не налегающие части* V_k *с массами* $\Delta_k m\approx\rho(\vec{\xi}_k)\Delta_k V=\rho(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta_k V$, *настолько малые, что каждую можно рассматривать как материальную точку* $\vec{\xi}_k=(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)$. *Тогда*

$$\vec{\boldsymbol r}_0\approx\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n}\vec{\xi}_k\Delta_k m\approx\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n}\vec{\xi}_k\rho(\vec{\xi}_k)\Delta_k V\underset{d\to0}{\to}\frac{1}{m}\iiint_V\vec{\boldsymbol r}\,\rho(\vec{\boldsymbol r})dV\quad\Rightarrow\quad\left[\begin{aligned}x_0&=\frac{1}{m}\iiint_V x\rho(x,y,z)dxdydz\\ y_0&=\frac{1}{m}\iiint_V y\rho(x,y,z)dxdydz\\ z_0&=\frac{1}{m}\iiint_V z\rho(x,y,z)dxdydz\end{aligned}\right.$$

Плоскости, ограничивающие объем V, необходимо построить достаточно точно.

$$V=\{(x,y)\in D,\quad 0\le z\le 3-\frac{1}{2}\big(6x+3y\big)\},$$

$$D=\{0\le x\le1,\quad 0\le y\le 2(1-x)\}$$



Найдем массу тела:

$$m=\iiint\limits_V \rho(x,y,z)dxdydz=\rho\iiint\limits_V 1\,dxdydz=\rho\iint\limits_D\left(\int\limits_0^{3-\frac{1}{2}(6x+3y)} 1\,dz\right)dxdy=\rho\iint\limits_D\left(3-\frac{1}{2}(6x+3y)\right)dxdy=$$

$$=\rho\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^{2(1-x)}\left(3-\frac{1}{2}(6x+3y)\right)dy\right)dx=\rho\int\limits_0^1\left(3(1-x)y-\frac{3}{4}y^2\right)\Bigg|_0^{2(1-x)}dx=$$

$$=\rho\int\limits_0^1\left(3(1-x)2(1-x)-\frac{3}{4}\cdot4(1-x)^2\right)dx=3\rho\int\limits_0^1(1-x)^2\,dx=\rho.$$

Найдем координаты центра масс:

$$x_0=\frac{1}{m}\iiint\limits_V x\rho(x,y,z)dxdydz=\frac{\rho}{m}\iiint\limits_V x\,dxdydz=\frac{\rho}{m}\iint\limits_D\left(\int\limits_0^{3-\frac{1}{2}(6x+3y)} x\,dz\right)dxdy=$$

$$=\frac{\rho}{m}\iint\limits_D x\left(3-\frac{1}{2}(6x+3y)\right)dxdy=\frac{\rho}{m}\int\limits_0^1\left(x\int\limits_0^{2(1-x)}\left(3(1-x)-\frac{3}{2}y\right)dy\right)dx=$$

$$=\frac{\rho}{m}\int\limits_0^1 x\left(3(1-x)y-\frac{3}{4}y^2\right)\Bigg|_0^{2(1-x)}dx=\frac{\rho}{m}\int\limits_0^1 x\left(3(1-x)2(1-x)-\frac{3}{4}4(1-x)^2\right)dx=3\frac{\rho}{m}\int\limits_0^1 x(1-x)^2\,dx=\frac{3}{4}\frac{\rho}{m}=\frac{3}{4}.$$

$$y_0=\frac{1}{m}\iiint\limits_V y\rho(x,y,z)dxdydz=\frac{\rho}{m}\iiint\limits_V y\,dxdydz=\frac{\rho}{m}\iint\limits_D\left(\int\limits_0^{3-\frac{1}{2}(6x+3y)} y\,dz\right)dxdy=$$

$$=\frac{\rho}{m}\iint\limits_D y\left(3-\frac{1}{2}(6x+3y)\right)dxdy=\frac{\rho}{m}\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^{2(1-x)}\left(3(1-x)y-\frac{3}{2}y^2\right)dy\right)dx=$$

$$=\frac{\rho}{m}\int\limits_0^1\left(3(1-x)\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}y^3\right)\Bigg|_0^{2(1-x)}dx=\frac{\rho}{m}\int\limits_0^1\left(3(1-x)\frac{1}{2}4(1-x)^2-\frac{1}{2}8(1-x)^3\right)dx=\frac{2\rho}{m}\int\limits_0^1(1-x)^3\,dx=\frac{2\rho}{4m}=\frac{1}{2}.$$

$$z_0=\frac{1}{m}\iiint\limits_V z\rho(x,y,z)dxdydz=\frac{\rho}{m}\iiint\limits_V z\,dxdydz=\frac{\rho}{m}\iint\limits_D\left(\int\limits_0^{3-\frac{1}{2}(6x+3y)} z\,dz\right)dxdy=$$

$$=\frac{\rho}{2m}\iint\limits_D\left(3-\frac{1}{2}(6x+3y)\right)^2dxdy=\frac{9\rho}{2m}\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^{2(1-x)}\left((1-x)-\frac{1}{2}y\right)^2dy\right)dx=$$

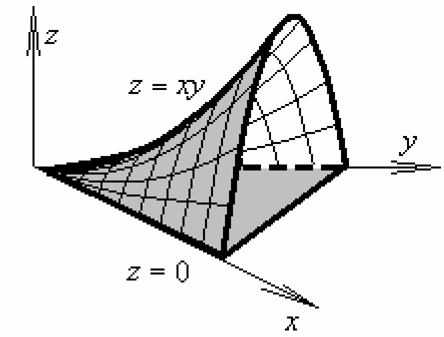
$$=\frac{9\rho}{2m}\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^{2(1-x)}\left((1-x)^2-(1-x)y+\frac{1}{4}y^2\right)dy\right)dx=\frac{9\rho}{2m}\int\limits_0^1\left((1-x)^2y-(1-x)\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{12}y^3\right)\Bigg|_0^{2(1-x)}dx=$$

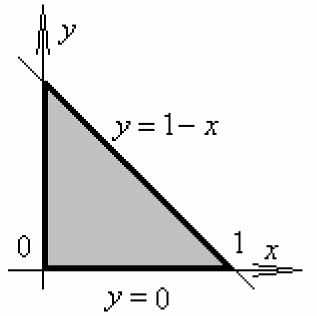
$$=\frac{9\rho}{2m}\int\limits_0^1\left((1-x)^2y-(1-x)\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{12}y^3\right)\Bigg|_0^{2(1-x)}dx=\frac{3\rho}{2m}\int\limits_0^1(1-x)^3\,dx=\frac{3\rho}{8m}=\frac{3}{8}.$$

№ 34.4.

$$V=\iiint\limits_{V} 1\,dxdydz = \rightarrow$$

Выделим среди поверхностей $\{z=xy,\quad z=0,\quad \widehat{x+y=1}\}$, ограничивающих объем V, те, уравнения которых не содержат переменной z. В данном примере прямая $\{y=1-x\}$ не ограничивает никакую область D, так что поверхности $\{\ z=xy,\quad z=0\}$ необходимо построить достаточно точно: $z=xy$ – седловая поверхность, $z=0$ – горизонтальная плоскость.





Из рисунка видно, что играет роль области D, "нижней" и "верхней" поверхностей $\{z=0\quad\le\quad z=xy,\qquad (x,y)\in D\}$.

Итак,

$$V=\{(x,y)\in D,\quad 0\le z\le xy\},\qquad D=\{0\le x\le 1,\ \ 0\le y\le 1-x\}$$

$$\rightarrow=\iint\limits_{D}\left(\int\limits_{0}^{xy} 1\,dz\right)dxdy=\iint\limits_{D} xy\ dxdy=\int\limits_{0}^{1}\left(\int\limits_{0}^{1-x} xy\ dy\right)dx=\int\limits_{0}^{1}\left(x\int\limits_{0}^{1-x} y\ dy\right)dx=$$

$$=\int\limits_{0}^{1} x\frac{1}{2}y^2\Big|_0^{1-x}dx=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} x(1-x)^2dx=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}\left(x-2x^2+x^3\right)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^1=\frac{1}{24}.$$

Сравнить нахождение объема "криволинейного цилиндра" с помощью тройного с нахождением с помощью двойного интеграла:

$$V=\iiint\limits_{V} 1\,dxdydz=\left[V=\{(x,y)\in D,\ f_H(x,y)\le z\le f_B(x,y)\}\right]=\iint\limits_{D}\left(\int\limits_{f_H(x,y)}^{f_B(x,y)} 1\,dz\right)dxdy=$$

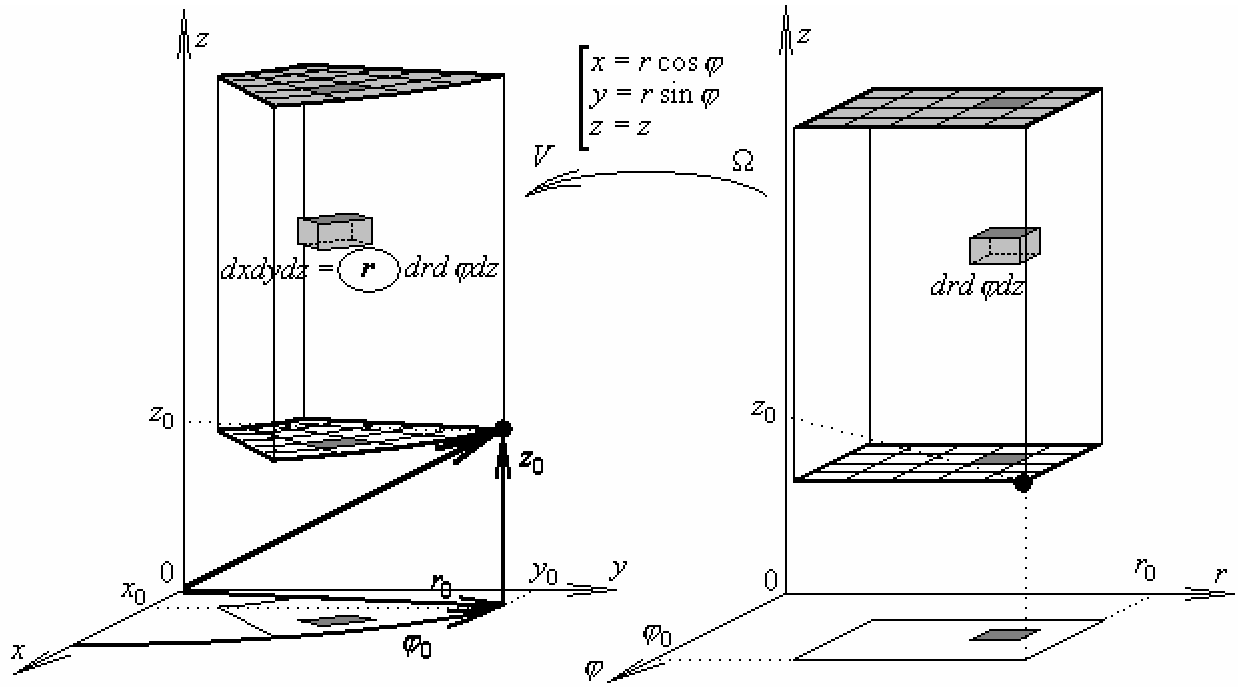
$$=\iint\limits_{D}\left(f_B(x,y)-f_H(x,y)\right)dxdy$$

35. Тройные интегралы. Переход к цилиндрическим координатам

Условия.

№ 35.1. Найти массу тела, ограниченного заданными поверхностями, с объемной плотностью $\rho=\rho(x,y,z)$.	
$z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=0$, $x^2+y^2=a^2$; $\rho=\left(x^2+y^2\right)\cdot z^2$;	$z=x^2+y^2$, $z=0$, $x^2+y^2=a^2$; $\rho=\left(x^2+y^2\right)\cdot z$;
№ 35.2. Найти заряд тела, ограниченного заданными поверхностями, с объемной плотностью $\rho=\rho(x,y,z)$.	
$z=x^2+y^2$, $z=0$, $x^2+y^2=ay$; $\rho=\left(x^2+y^2\right)\sqrt{z}$;	$z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=0$, $x^2+y^2=ax$; $\rho=\sqrt{x^2+y^2}\cdot z$;
№ 35.3. Найти центр масс тела, ограниченного заданными поверхностями, с объемной плотностью $\rho=\rho(x,y,z)$.	
$z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=a$; $\rho=\left(x^2+y^2\right)^2\cdot z$	$z=x^2+y^2$, $z=a$; $\rho=\left(x^2+y^2\right)\cdot z^3$;
Найти объем тела, ограниченного поверхностями.	
№ 35.4 $z=x^2+y^2$, $z=0$, $x^2+y^2=ax$.	**№ 35.4** $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=0$, $x^2+y^2=ay$.
№ 35.5 $x^2+y^2+z^2=2az$, $z\ge\sqrt{x^2+y^2}$;	**№ 35.5** $z=2-x^2-y^2$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$
№ 35.6 $z=\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}}$, $z=1$.	**№ 35.6** $z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$, $z=1$.

Теория.



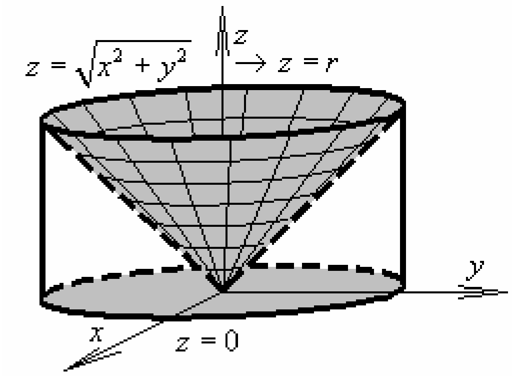
$$\boxed{\iiint\limits_V f(x^2+y^2,z)dxdydz=\iiint\limits_\Omega f(r^2,z)\,\boldsymbol{r}\;dzdrd\varphi}$$

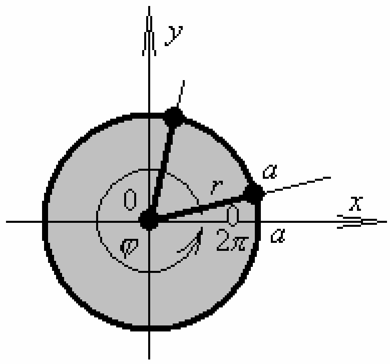
Решения.

№ 35.1.

$$m=\iiint\limits_V \rho\left(x,y,z\right)dxdydz=\iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right)\,z^2dxdydz=\to$$

Выделим среди поверхностей $\{z=\sqrt{x^2+y^2},\quad z=0,\quad \overline{x^2+y^2=a^2}\}$, ограничивающих объем V, те, уравнения которых не содержат переменной z. На плоскости xOy эти уравнения задают некоторые кривые, а в пространстве – цилиндрические поверхности, параллельные оси Oz, в основании которых лежат эти кривые. В данном примере окружность $\{x^2+y^2=a^2\}$ ограничивает круг D радиуса a с центром в начале координат $(0,0)$, так что поверхности $\{z=0\ \le\ z=\sqrt{x^2+y^2},\ (x,y)\in D\}$, играющие роль “нижней” и “верхней”, достаточно построить схематично.





Учитывая вид подынтегральной функции $f(x^2+y^2,z)$ и “цилиндрическую” форму объема V, перейдем к цилиндрическим координатам.
Поскольку

$$z=\sqrt{x^2+y^2}\ \to\ z=\sqrt{r^2}=r,\qquad x^2+y^2=a^2\ \to\ r^2=a^2\Rightarrow r=a,$$

то

$$V=\{(x,y)\in D=\{x^2+y^2\le a^2\},\ \ 0\le z\le\sqrt{x^2+y^2}\}\to$$
$$\to\Omega=\{(r,\varphi)\in\Delta=\{r\le a\},\ \ 0\le z\le r\}=\{0\le\varphi\le 2\pi,\ \ 0\le r\le a,\ \ 0\le z\le r\}.$$

Имеем:

$$\to=\iiint\limits_\Omega r^2z^2\ r\ drd\varphi dz=\int\limits_0^{2\pi}\Bigg(\ \int\limits_0^a\Bigg(\ \int\limits_0^r r^3\ z^2\ dz\ \Bigg)dr\ \Bigg)d\varphi=2\pi\int\limits_0^a\Bigg(\ r^3\int\limits_0^r z^2dz\ \Bigg)dr=$$

$$=2\pi\int\limits_0^a\Bigg(\ r^3\left.\frac{z^3}{3}\right|_0^r\ \Bigg)dr=\frac{2\pi}{3}\int\limits_0^a r^6dr=\frac{2\pi}{3}\left.\frac{r^7}{7}\right|_0^a=\frac{2}{21}\pi a^7.$$

Сравнить.

$$m=\iiint\limits_V \rho(x,y,z)\,dxdydz=\iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right) z^2 dxdydz \Rightarrow$$

$$V=\{(x,y)\in D,\quad 0\le z\le \sqrt{x^2+y^2}\},\quad D=\{x^2+y^2\le a^2\},$$

$$\Rightarrow\iint\limits_D\left(\int\limits_0^{\sqrt{x^2+y^2}}\left(x^2+y^2\right) z^2dz\right)dxdy=\iint\limits_D\left(x^2+y^2\right)\left.\frac{1}{3}z^3\right|_0^{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=$$

$$=\frac{1}{3}\iint\limits_D\left(x^2+y^2\right)\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3dxdy=\frac{1}{3}\iint\limits_D\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^5dxdy\Rightarrow$$

Учитывая вид подынтегральной функции $f(x^2+y^2)$ и “круговую” форму области D, перейдем к полярным координатам.

Поскольку

$$x^2+y^2=a^2\rightarrow r=a\ ,$$

то

$$D=\{x^2+y^2\le a^2\}\ \rightarrow\ \Delta=\{r\le a\}=\{0\le\varphi\le 2\pi,\ \ 0\le r\le a\}.$$

Тогда

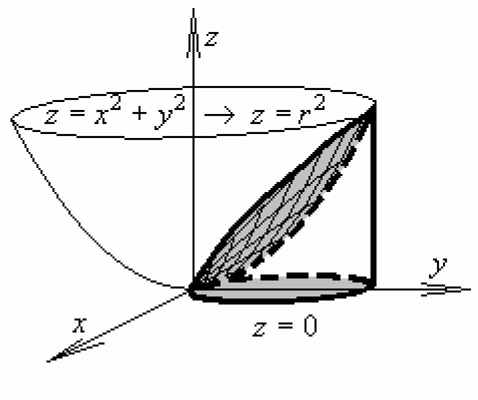
$$\Rightarrow\frac{1}{3}\iint\limits_\Delta\left(\sqrt{r^2}\right)^5 rdrd\varphi=\frac{1}{3}\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^a r^5\ rdr\right)d\varphi=\frac{2\pi}{3}\int\limits_0^a r^6dr=\frac{2\pi}{3}\left.\frac{r^7}{7}\right|_0^a=\frac{2}{21}\pi a^7.$$

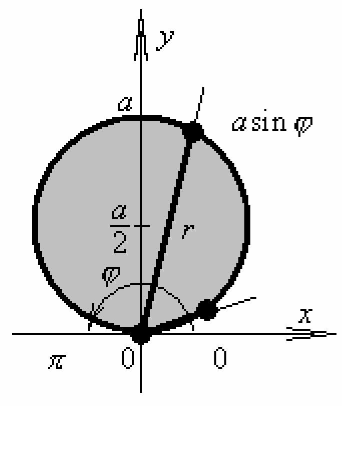
Замечание. Цилиндрические координаты можно назвать еще “декартово-полярными”.

№ 35.2.

$$q=\iiint\limits_V \rho(x,y,z)\,dxdydz=\iiint\limits_V\left(x^2+y^2\right)\sqrt{z}\,dxdydz\Rightarrow$$

Выделим среди поверхностей $\{z=x^2+y^2,\ \ z=0,\ \ \overbrace{x^2+y^2=ay}\}$, ограничивающих объем V, те, уравнения которых не содержат переменной z. В данном примере окружность $\{x^2+y^2=ay\}$ ограничивает круг $D=\{\,x^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2\le\left(\frac{a}{2}\right)^2\}$ радиуса $\frac{a}{2}$ с центром в точке $\left(0,\frac{a}{2}\right)$, так что поверхности $\{z=0\ \ \le\ \ z=x^2+y^2,\ \ (x,y)\in D\}$, играющие роль “нижней” и “верхней”, достаточно построить схематично.





Учитывая вид подынтегральной функции $f(x^2+y^2,z)$ и “цилиндрическую” форму объема V, перейдем к цилиндрическим координатам.
Поскольку

$$z=x^2+y^2 \to z=r^2, \qquad x^2+y^2=ay \to r^2=ar\sin\varphi \Rightarrow r=a\sin\varphi,$$

то

$$V=\{(x,y)\in D=\{x^2+y^2\le ay\},\quad 0\le z\le x^2+y^2\}\to$$

$$\to\Omega=\{(r,\varphi)\in\Delta=\{r\le a\sin\varphi\},\quad 0\le z\le r^2\}=\{0\le\varphi\le\pi,\quad 0\le r\le a\sin\varphi,\quad 0\le z\le r^2\}.$$

Имеем:

$$\to=\iiint\limits_{\Omega} r^2\ \sqrt{z}\ r\ drd\varphi dz=\int\limits_0^{\pi}\Bigg(\int\limits_0^{a\sin\varphi}\Bigg(\int\limits_0^{r^2} r^3\ \sqrt{z}\ dz\Bigg)dr\Bigg)d\varphi=\int\limits_0^{\pi}\Bigg(\int\limits_0^{a\sin\varphi} r^3\,\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{r^2}dr\Bigg)d\varphi=$$

$$=\frac{2}{3}\int\limits_0^{\pi}\Bigg(\int\limits_0^{a\sin\varphi} r^6 dr\Bigg)d\varphi=\frac{2}{3}\int\limits_0^{\pi}\Bigg(\frac{r^7}{7}\Bigg|_0^{a\sin\varphi}\Bigg)d\varphi=\frac{2}{21}a^7\int\limits_0^{\pi}\sin^7\varphi d\varphi=-\frac{2}{21}a^7\int\limits_0^{\pi}\sin^6\varphi d\cos\varphi=$$

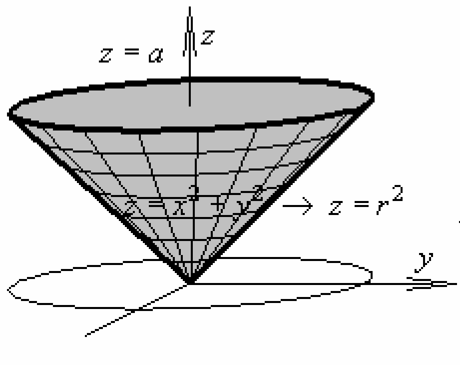
$$=-\frac{2}{21}a^7\int\limits_0^{\pi}\left(1-\cos^2\varphi\right)^3 d\cos\varphi=-\frac{2}{21}a^7\int\limits_{+1}^{-1}\left(1-t^2\right)^3 dt=\frac{4}{21}a^7\int\limits_0^{+1}\left(1-t^2\right)^3 dt=$$

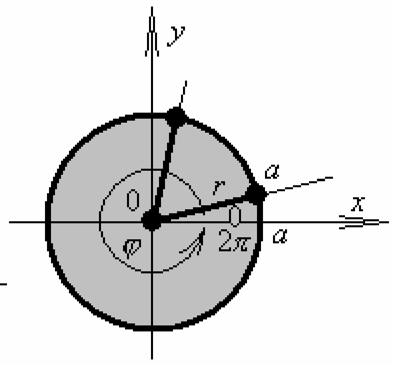
$$=\frac{4}{21}a^7\int\limits_0^{+1}\left(1-3t^2+3t^4-t^6\right)dt=\frac{4}{21}a^7\cdot\frac{16}{35}.$$

№ 35.3.

Из физических понятий очевидно, что центр масс однородного тела с круговой симметрией находится на его оси: $\left(x_0,y_0,z_0\right)=\left(0,0,?\right)$. Цель приведенных ниже расчетов, в частности, показать адекватность математических формул интуитивным представлениям.

Среди поверхностей $\{z=\sqrt{x^2+y^2},\ z=a\}$, ограничивающих объем V, нет таких, уравнения которых не содержат переменной z, так что обе поверхности необходимо построить достаточно точно: $z=\sqrt{x^2+y^2}$ – круговой конус, $z=a$ – плоскость





Из рисунка видно, что играет роль области D, “нижней” и “верхней” поверхностей

$$V=\{(x,y)\in D=\{x^2+y^2\le a^2\},\quad \sqrt{x^2+y^2}\le z\le a\}.$$

Найдем массу тела:

$$m=\iiint\limits_V \rho(x,y,z)\,dxdydz=\iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right)^2 z\ dxdydz=\to$$

Учитывая вид подынтегральной функции $f(x^2+y^2,z)$ и “цилиндрическую” форму объема V, перейдем к цилиндрическим координатам.

Поскольку

$$z=\sqrt{x^2+y^2}\ \to\ z=\sqrt{r^2}=r,\qquad x^2+y^2=a^2\ \to\ r^2=a^2\ \Rightarrow\ r=a,$$

то

$$V\to\Omega=\{(r,\varphi)\in\Delta=\{r\le a\},\quad r\le z\le a\}=\{0\le\varphi\le 2\pi,\quad 0\le r\le a,\quad r\le z\le a\}.$$

Имеем

$$\to=\iiint\limits_\Omega r^4\ z\ r\ drd\varphi dz=\int\limits_0^{2\pi}\left(\ \int\limits_0^a\left(\ \int\limits_r^a r^5\ z\ dz\ \right)dr\ \right)d\varphi=2\pi\int\limits_0^a r^5\left(\ \int\limits_r^a zdz\ \right)dr=2\pi\int\limits_0^a r^5\left(\ \left.\frac{z^2}{2}\right|_r^a\ \right)dr=$$

$$=\pi\int\limits_0^a\left(a^2r^5-r^7\right)dr=\pi\left.\left(a^2\frac{r^6}{6}-\frac{r^8}{8}\right)\right|_0^a=\frac{1}{24}\pi a^8.$$

Далее найдем координаты центра масс, учитывая симметрию тела относительно координатных плоскостей xOz, yOz и нечетность подынтегральных функций относительно переменных x, y:

$$x_0=\frac{1}{m}\iiint\limits_V x\rho(x,y,z)\,dxdydz=\frac{1}{m}\iiint\limits_V x\left(x^2+y^2\right)^2 z\ dxdydz=0,$$

$$y_0=\frac{1}{m}\iiint\limits_V y\rho(x,y,z)\,dxdydz=\frac{1}{m}\iiint\limits_V y\left(x^2+y^2\right)^2 z\ dxdydz=0.$$

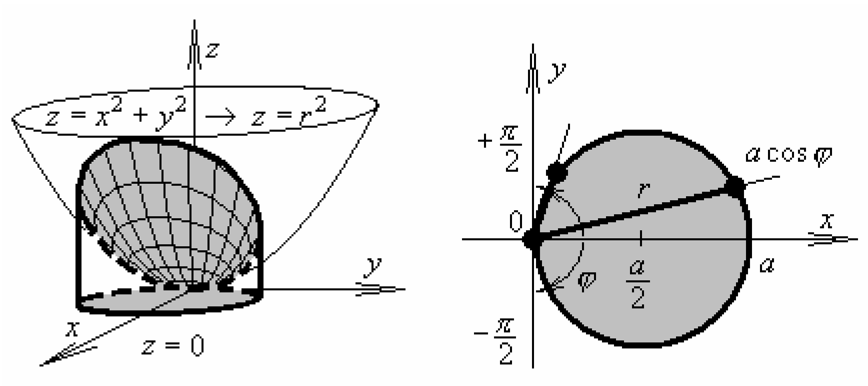
$$z_0=\frac{1}{m}\iiint\limits_V z\rho(x,y,z)\,dxdydz=\frac{1}{m}\iiint\limits_V z\left(x^2+y^2\right)^2 z\ dxdydz=\frac{1}{m}\iiint\limits_\Omega z\ r^4\ z\ r\ drd\varphi dz=$$

$$=\frac{1}{m}\int\limits_0^{2\pi}\left(\ \int\limits_0^a\left(\ \int\limits_r^a r^5\ z^2\ dz\ \right)dr\ \right)d\varphi=2\pi\frac{1}{m}\int\limits_0^a r^5\left(\ \int\limits_r^a z^2dz\ \right)dr=2\pi\frac{1}{m}\int\limits_0^a r^5\left(\ \left.\frac{z^3}{3}\right|_r^a\ \right)dr=$$

$$=\frac{2}{3m}\pi\int\limits_0^a\left(a^3r^5-r^8\right)dr=\frac{2}{3m}\pi\left.\left(a^3\frac{r^6}{6}-\frac{r^9}{9}\right)\right|_0^a=\frac{1}{27m}\pi a^9=\frac{8}{9}a.$$

№ 35.4.

Выделим среди поверхностей $\{z=x^2+y^2, \quad z=0, \quad \overbrace{x^2+y^2=ax}\}$, ограничивающих объем V, те, уравнения которых не содержат переменной z. В данном примере окружность $\{x^2+y^2=ax\}$ ограничивает круг $D=\{\ \left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2\le\left(\frac{a}{2}\right)^2\}$ радиуса $\frac{a}{2}$ с центром в точке $\left(\frac{a}{2},0\right)$, так что поверхности $\{z=0 \quad \le \quad z=x^2+y^2, \quad (x,y)\in D\}$, играющие роль "нижней" и "верхней", достаточно построить схематично.



$$V=\iiint\limits_V 1\;dxdydz=\!\!\rightarrow$$

Учитывая "цилиндрическую" форму объема V, перейдем к цилиндрическим координатам.
Поскольку

$$z=x^2+y^2\ \rightarrow\ z=r^2, \qquad x^2+y^2=ax\ \rightarrow\ r^2=ar\cos\varphi\ \ \Rightarrow\ \ r=a\cos\varphi,$$

то

$$V=\{(x,y)\in D=\{x^2+y^2\le ax\},\ 0\le z\le x^2+y^2\}\rightarrow$$

$$\rightarrow\Omega=\{(r,\varphi)\in\Delta=\{r\le a\cos\varphi\},\quad 0\le z\le r^2\}=\{-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le+\frac{\pi}{2},\ 0\le r\le a\cos\varphi,\ 0\le z\le r^2\}.$$

Имеем:

$$\rightarrow=\iiint\limits_{\Omega} r\ drd\varphi dz=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\Bigg(\int\limits_0^{a\cos\varphi}\Bigg(\int\limits_0^{r^2} r\ dz\Bigg)dr\Bigg)d\varphi=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\Bigg(\int\limits_0^{a\cos\varphi} r\cdot r^2dr\Bigg)d\varphi=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{r^4}{4}\Bigg|_0^{a\cos\varphi}d\varphi=$$

$$=\frac{a^4}{4}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi d\varphi=\frac{a^4}{16}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\left(1+2\cos2\varphi+\frac{1+\cos4\varphi}{2}\right)d\varphi=\frac{a^4}{16}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{3}{2}d\varphi+0+0=\frac{3a^4}{32}\pi.$$

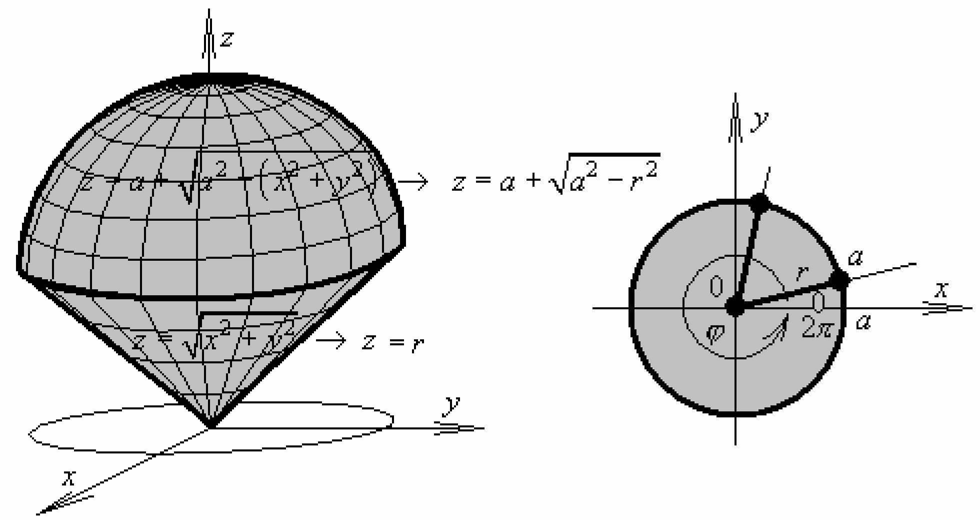
№ 35.5.

$x^2+y^2+z^2=2az, \quad z \geq \sqrt{x^2+y^2}$;

Среди поверхностей $\{x^2+y^2+z^2=2az, \quad z=\sqrt{x^2+y^2}\}$, ограничивающих объем V, нет таких, уравнения которых не содержат переменной z, так что обе поверхности необходимо построить достаточно точно:

$$x^2+y^2+z^2=2az \Rightarrow x^2+y^2+(z-a)^2=a^2$$

- "смещенная" сфера радиуса a с центром в точке $(0,0,a)$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$ – круговой конус.



Из рисунка видно, что играет роль области D, "нижней" и "верхней" поверхностей

$$V=\{(x,y)\in D=\{x^2+y^2\leq a^2\}, \quad \sqrt{x^2+y^2}\leq z\leq a+\sqrt{a^2-\left(x^2+y^2\right)}\}.$$

$$V=\iiint\limits_V 1\, dxdydz =\rightarrow$$

Учитывая "цилиндрическую" форму объема V, перейдем к цилиндрическим координатам.

Поскольку

$$z=\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow z=\sqrt{r^2}=r, \qquad z=a+\sqrt{a^2-\left(x^2+y^2\right)} \rightarrow z=a+\sqrt{a^2-r^2},$$

то

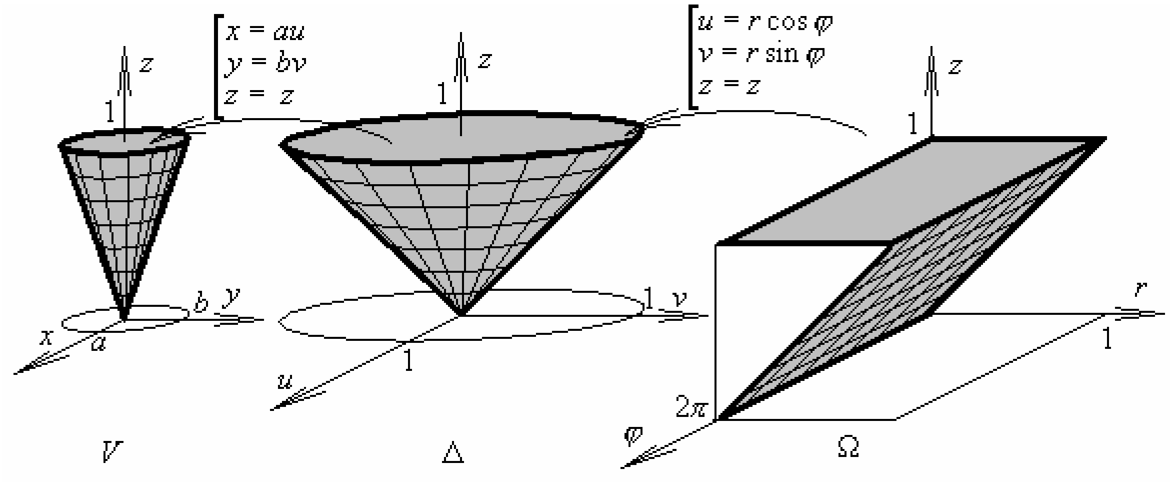
$$V\rightarrow\Omega=\{(r,\varphi)\in\Delta=\{r\leq a\}, \quad r\leq z\leq a+\sqrt{a^2-r^2}\}=\{0\leq\varphi\leq 2\pi, \quad 0\leq r\leq a, \quad r\leq z\leq a+\sqrt{a^2-r^2}\}.$$

Имеем:

$$\rightarrow=\iiint\limits_{\Omega} r\, drd\varphi dz=\int\limits_0^{2\pi}\Bigg(\int\limits_0^a\Bigg(\int\limits_r^{a+\sqrt{a^2-r^2}} r\, dz\Bigg)dr\Bigg)d\varphi=2\pi\int\limits_0^a r\left(a+\sqrt{a^2-r^2}-r\right)dr=$$

$$=2\pi\int\limits_0^a\left(ar-r^2+r\sqrt{a^2-r^2}\right)dr=2\pi\left(a\frac{1}{2}r^2-\frac{1}{3}r^3-\frac{1}{3}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^a=\pi a^3.$$

№ 35.6.



$$V=\iiint\limits_V 1\,dxdydz \Longrightarrow$$

Перейдем от старых координат (x,y,z) к промежуточным (u,v,z), полагая что:

$$\begin{cases} x=au \\ y=bv \\ z=z \end{cases} \Rightarrow \quad dxdydz=\left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,z)}\right|dudvdz=\begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_z \\ y'_u & y'_v & y'_z \\ z'_u & z'_v & z'_z \end{vmatrix}dudvdz=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}dudvdz=\boldsymbol{ab}\ dudvdz$$

$$V=\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1,\quad \sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\le z\le 1\}\ \to\ \Delta=\{u^2+v^2\le 1,\quad \sqrt{u^2+v^2}\le z\le 1\}.$$

$$\rightarrow=\iiint\limits_\Delta \left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,z)}\right|dudvdz=\iiint\limits_\Delta ab\ dudvdz \Longrightarrow$$

Переходя далее от промежуточных координат (u,v,z) к цилиндрическим (r,φ,z)

$$\begin{cases} u=r\cos\varphi \\ v=r\sin\varphi \\ z=z \end{cases} \Rightarrow \quad dudvdz=\boldsymbol{r}\ drd\varphi dz$$

$$\Delta=\{u^2+v^2\le 1,\ \sqrt{u^2+v^2}\le z\le 1\}\ \to\ \Omega=\{0\le\varphi\le 2\pi,\quad 0\le r\le 1,\quad r\le z\le 1\},$$

находим:

$$\rightarrow=ab\iiint\limits_\Omega rdrd\varphi dz=ab\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\left(\int_r^1 rdz\right)dr\right)d\varphi=2\pi ab\int_0^1 r(1-r)\,dr=2\pi ab\left(\frac{1}{2}r^2-\frac{1}{3}r^3\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}\pi ab.$$

Получена известная формула объема конуса $V=\frac{1}{3}\pi ab$, в основании которого лежит эллипс с площадью $S_{OCH}=\pi ab$ и высотой $h=1$.

Замечание. Координаты (r,φ,z) для исходных декартовых координат (x,y,z) получили название обобщенных цилиндрических координат:

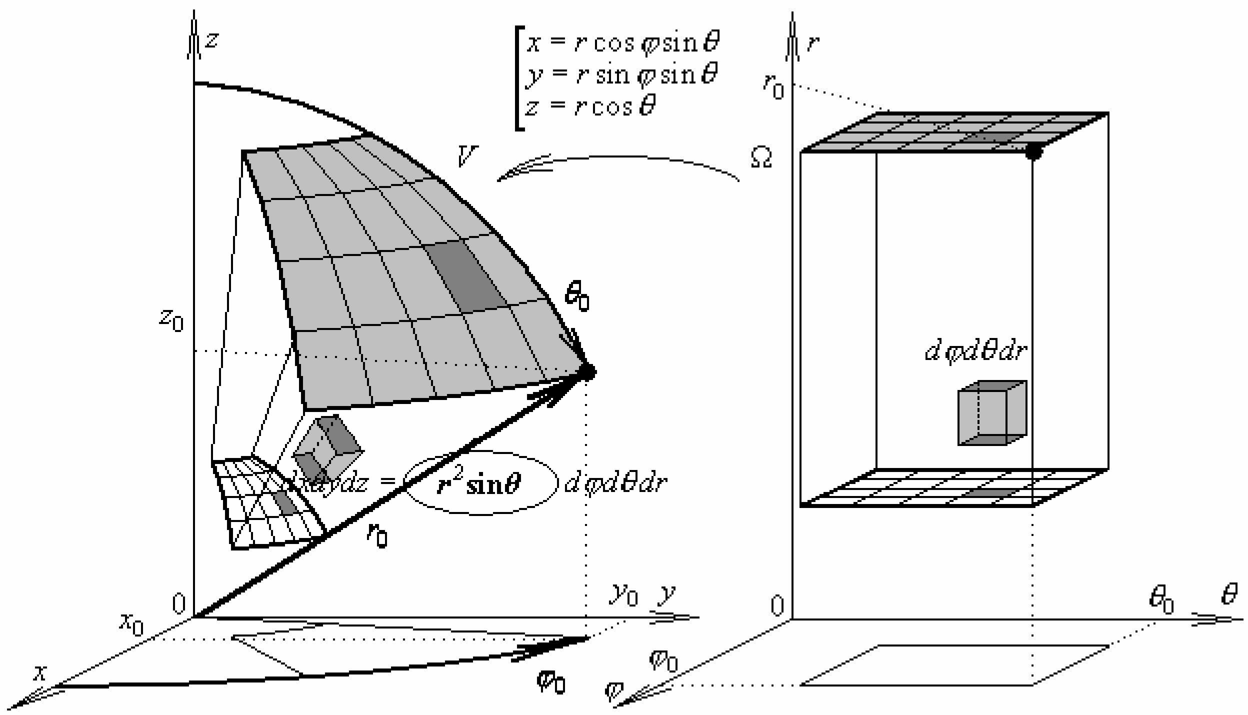
$$\begin{cases} x=ar\cos\varphi \\ y=br\sin\varphi \\ z=z \end{cases} \Rightarrow \quad \left|\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,z)}\right|=\boldsymbol{ab\ r}$$

36. Тройные интегралы. Переход к сферическим координатам

Условия.

<table>
<tr><td colspan="2">№ 36.1. Найти массу тела, ограниченного заданными поверхностями, с объемной плотностью $\rho = \rho(x, y, z)$.</td></tr>
<tr><td>$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad \rho = x^2 + y^2 + z^2.$</td><td>$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad \rho = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2}.$</td></tr>
<tr><td colspan="2">№ 36.2. Найти заряд тела, ограниченного заданными поверхностями, с объемной плотностью $\rho = \rho(x, y, z)$.</td></tr>
<tr><td>$x^2 + y^2 + z^2 = 2az, \quad \rho = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$</td><td>$x^2 + y^2 + z^2 = az, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$</td></tr>
<tr><td colspan="2">№ 36.3. Найти центр масс тела, ограниченного заданными поверхностями, с объемной плотностью $\rho = \rho(x, y, z)$.</td></tr>
<tr><td>$x^2 + y^2 + z^2 = az, \quad z \geq \sqrt{x^2 + y^2};$
$\rho = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2}.$</td><td>$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad z \leq \sqrt{x^2 + y^2};$
$\rho = x^2 + y^2 + z^2.$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Найти объем тела, ограниченного поверхностями.</td></tr>
<tr><td>№ 36.4. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad z \geq \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{3}};$
№ 36.5. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1.$</td><td>№ 36.4. $x^2 + y^2 + z^2 = az, \quad z \geq \sqrt{3\left(x^2 + y^2\right)};$
№ 36.5. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \quad \dfrac{z}{c} \geq \sqrt{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}}.$</td></tr>
</table>

Теория.



$$\boxed{\iiint\limits_V f(x^2 + y^2 + z^2)\,dxdydz = \iiint\limits_\Omega f(r^2)\ \mathbf{r^2\sin u}\ d\varphi d\theta dr}$$

Решения.

№ 36.1.

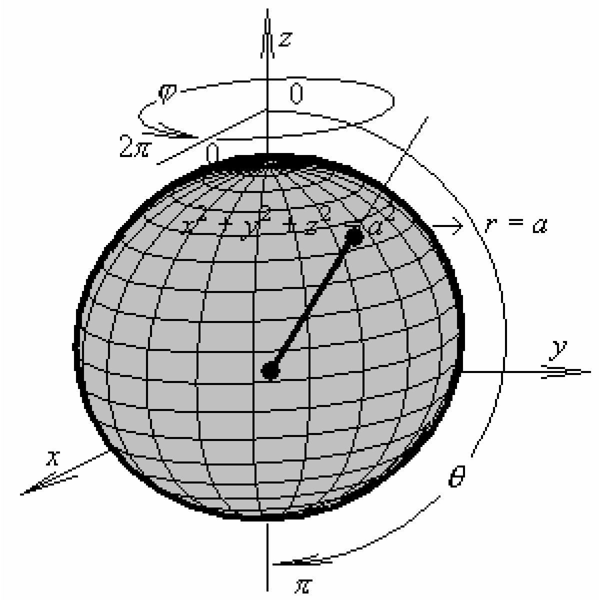
Сфера

$$S = \{x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$$

ограничивает шар

$$V = \{x^2 + y^2 + z^2 \le a^2\}$$

радиуса a с центром в начале координат $(0,0,0)$:



$$m = \iiint\limits_V \rho(x,y,z)\,dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_V \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\,dxdydz = \to$$

Учитывая вид подынтегральной функции $f(x^2 + y^2 + z^2)$ и "сферическую" форму объема V, перейдем к сферическим координатам.

Поскольку

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad \to \quad r^2 = a^2 \quad \Rightarrow \quad r = a,$$

то

$$V = \{x^2 + y^2 + z^2 \le a^2\} \to \Omega = \{0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le r \le a\}.$$

Имеем:

$$\to = \iiint\limits_\Omega r^2\ r^2 \sin\theta\ d\varphi d\theta dr = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^a r^4\ \sin\theta\ dr\right)d\theta\right)d\varphi = \int_0^{2\pi} 1\,d\varphi \cdot \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \cdot \int_0^a r^4\ dr =$$

$$= 2\pi \cdot (-\cos\theta)\ \Big|_0^{\pi} \cdot \frac{1}{5} r^5 \Big|_0^a = \frac{4}{5}\pi a^5.$$

№ 36.2.

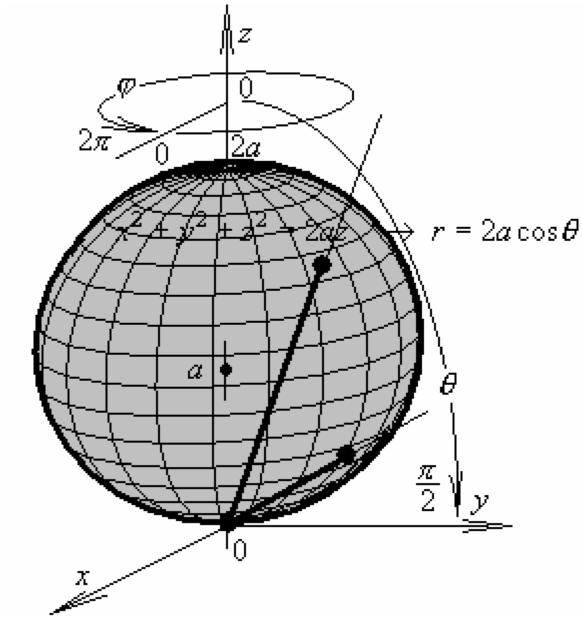
"Смещенная" сфера

$$S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 2az\}$$

ограничивает шар

$$V = \{x^2 + y^2 + (z-a)^2 \le a^2\}$$

радиуса a с центром в точке $(0,0,a)$:



$$q = \iiint\limits_V \rho(x,y,z)\,dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_V \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,dxdydz = \to$$

Учитывая вид подынтегральной функции $f(x^2 + y^2 + z^2)$ и "сферическую" форму объема V, перейдем к сферическим координатам.

Поскольку

$$x^2+y^2+z^2=2az \quad\to\quad r^2=2ar\cos\theta \;\Rightarrow\; r=2a\cos\theta,$$

то

$$V=\{x^2+y^2+(z-a)^2\le a^2\} \to \Omega=\{0\le\varphi\le 2\pi,\quad 0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\quad 0\le r\le 2a\cos\theta\}.$$

Имеем:

$$\to=\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{\sqrt{r^2}}r^2\sin\theta\, d\varphi d\theta dr=\int\limits_0^{2\pi}\Bigg(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\Bigg(\int\limits_0^{2a\cos\theta} r\sin\theta dr\Bigg)d\theta\Bigg)d\varphi=\int\limits_0^{2\pi}1\, d\varphi\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\Bigg(\sin\theta\int\limits_0^{2a\cos\theta} rdr\Bigg)d\theta=$$

$$=2\pi\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\, r^2\Big|_0^{2a\cos\theta}d\theta=4a^2\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos^2\theta d\theta=-4a^2\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\cos\theta=$$

$$=-4a^2\pi\int\limits_1^0 t^2dt=4a^2\pi\int\limits_0^1 t^2dt=\frac{4}{3}a^2\pi.$$

№ 36.3.

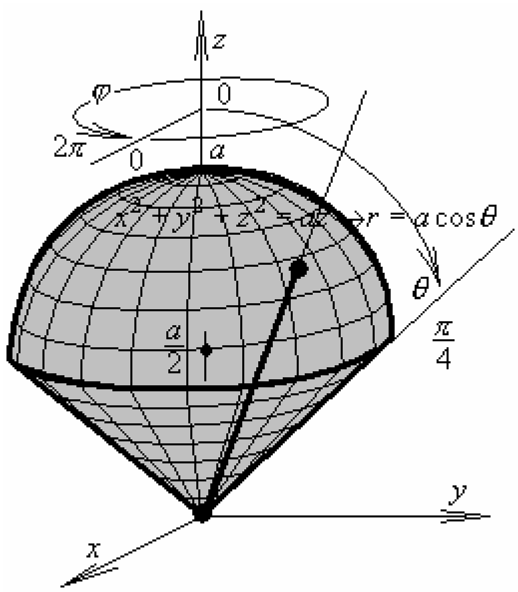
Из физических понятий очевидно, что центр масс однородного тела с круговой симметрией находится на его оси: $(x_0, y_0, z_0)=(0,0,?)$. Цель приведенных ниже расчетов, в частности, показать адекватность математических формул интуитивным представлениям.

Объем V ограничен верхней половиной "смещенной" сферы

$$x^2+y^2+\left(z-\frac{a}{2}\right)^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

радиуса $\frac{a}{2}$ с центром в точке $\left(0,0,\frac{a}{2}\right)$ и конусом

$$z=\sqrt{x^2+y^2}:$$



Найдем массу тела:

$$m=\iiint\limits_V\rho(x,y,z)\,dxdydz=$$

$$=\iiint\limits_V\frac{1}{x^2+y^2+z^2}dxdydz=\to$$

Учитывая вид подынтегральной функции $f(x^2+y^2+z^2)$ и "сферическую" форму объема V (**Сравнить** с **№ 35.5**), перейдем к сферическим координатам.

Поскольку

$$z=\sqrt{x^2+y^2} \quad\to\quad r\cos\theta=\sqrt{r^2\sin^2\theta} \;\Rightarrow\; \operatorname{tg}\theta=1 \;\Rightarrow\; \theta=\frac{\pi}{4},$$

$$x^2+y^2+z^2=az \quad\to\quad r^2=ra\cos\theta \;\Rightarrow\; r=a\cos\theta,$$

то

$$V=\{z\ge\sqrt{x^2+y^2},\quad x^2+y^2+\left(z-\frac{a}{2}\right)^2\le\left(\frac{a}{2}\right)^2\} \to \Omega=\{0\le\varphi\le 2\pi,\quad 0\le\theta\le\frac{\pi}{4},\quad 0\le r\le a\cos\theta\}.$$

Имеем:

$$\to=\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{r^2}\,r^2\sin\theta\,d\varphi d\theta dr=\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int\limits_0^{a\cos\theta}\sin\theta\,dr\right)d\theta\right)d\varphi=2\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin\theta\int\limits_0^{a\cos\theta}1\,dr\right)d\theta=$$

$$=2\pi a\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\,\cos\theta d\theta=-2\pi a\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta d\cos\theta=-2\pi a\frac{1}{2}\cos^2\theta\,\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=-\pi a\left(\cos^2\frac{\pi}{4}-\cos^2 0\right)=\frac{\pi a}{2}.$$

Далее найдем координаты центра масс, учитывая симметрию тела относительно координатных плоскостей xOz, yOz и нечетность подынтегральных функций относительно переменных x, y:

$$x_0=\frac{1}{m}\iiint\limits_V x\rho(x,y,z)\,dxdydz=\frac{1}{m}\iiint\limits_V x\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz=0,$$

$$y_0=\frac{1}{m}\iiint\limits_V y\rho(x,y,z)\,dxdydz=\frac{1}{m}\iiint\limits_V y\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz=0.$$

$$z_0=\frac{1}{m}\iiint\limits_V z\rho(x,y,z)\,dxdydz=\frac{1}{m}\iiint\limits_V z\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz=\frac{1}{m}\iiint\limits_{\Omega} r\cos\theta\,\frac{1}{r^2}\,r^2\sin\theta\,d\varphi d\theta dr=$$

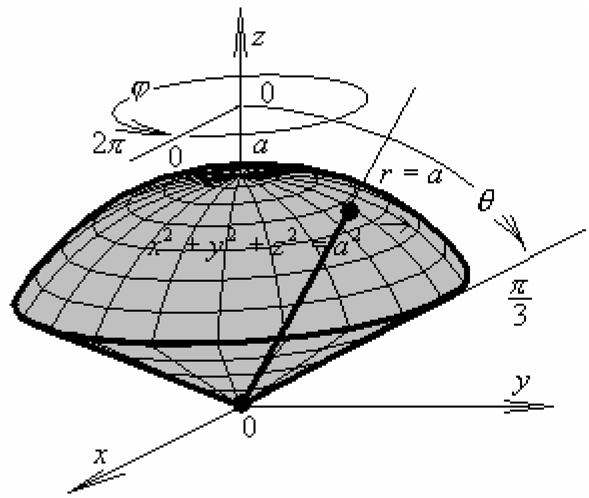
$$=\frac{1}{m}\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int\limits_0^{a\cos\theta}r\cos\theta\,\sin\theta\,dr\right)d\theta\right)d\varphi=\frac{2\pi}{m}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos\theta\,\sin\theta\int\limits_0^{a\cos\theta}r\,dr\right)d\theta=$$

$$=\frac{2\pi}{m}\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta\,\sin\theta\,r^2\,\Big|_0^{a\cos\theta}d\theta=\frac{\pi a^2}{m}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^3\theta\,\sin\theta\,d\theta=-\frac{\pi a^2}{m}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^3\theta\,d\cos\theta=$$

$$=-\frac{\pi a^2}{4m}\cos^4\theta\,\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=-\frac{\pi a^2}{4m}\left(\cos^4\frac{\pi}{4}-\cos^4 0\right)=-\frac{\pi a^2}{4m}\left(\frac{1}{2^2}-1\right)=\frac{3\pi a^2}{16m}=\frac{3a}{8m}.$$

№ 36.4.

$$V=\iiint\limits_V 1\,dxdydz=\to$$



Объем V ограничен верхней частью сферы

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

радиуса a с центром в начале координат $(0,0,0)$ и конусом

$$z=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}:$$

Учитывая “сферическую” форму объема V, перейдем к сферическим координатам. Поскольку

$$z=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}\ \to\ r\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{r^2\sin^2\theta}\ \Rightarrow\ \operatorname{tg}\theta=\sqrt{3}\ \Rightarrow\ \theta=\frac{\pi}{3},$$

$$x^2+y^2+z^2=a^2\ \to\ r^2=a^2\ \Rightarrow\ r=a,$$

то

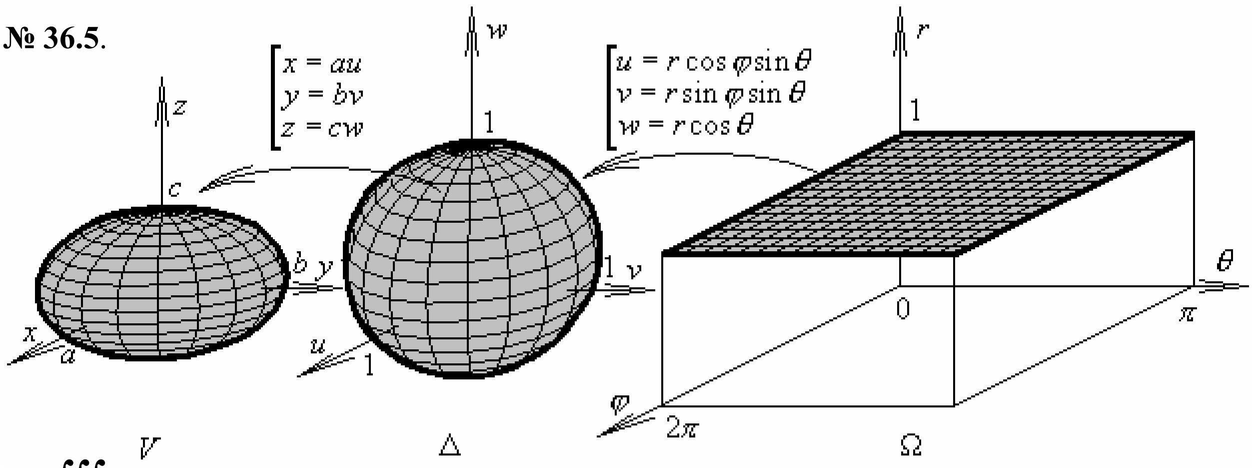
$$V=\{z\ge\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}},\quad x^2+y^2+z^2\le a^2\}\ \to\ \Omega=\{0\le\varphi\le 2\pi,\quad 0\le\theta\le\frac{\pi}{3},\quad 0\le r\le a\}.$$

Имеем:

$$\to=\iiint\limits_{\Omega} r^2\sin\theta\; d\varphi d\theta dr=\int\limits_0^{2\pi}\Bigg(\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\Big(\int\limits_0^{a} r^2\sin\theta\; dr\Big)d\theta\Bigg)d\varphi=2\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\sin\theta d\theta\int\limits_0^{a} r^2 dr=$$

$$=2\pi(-\cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}\ \frac{1}{3}r^3\Big|_0^{a}=2\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}a^3=\frac{\pi}{3}a^3.$$

№ 36.5.



$$V=\iiint\limits_{V} 1\; dxdydz=\to$$

Перейдем от старых координат (x,y,z) к промежуточным (u,v,w), полагая что:

$$\left[\begin{aligned}x&=au\\ y&=bv\\ z&=cw\end{aligned}\right.\quad\Rightarrow\quad dxdydz=\left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right|dudvdw=\begin{vmatrix}x'_u & x'_v & x'_w\\ y'_u & y'_v & y'_w\\ z'_u & z'_v & z'_w\end{vmatrix}dudvdw=\begin{vmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{vmatrix}dudvdw=\boldsymbol{abc}\; dudvdw\Rightarrow$$

$$V=\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\}\to\Delta=\{u^2+v^2+w^2\le 1\}.$$

$$\to=\iiint\limits_{\Delta}\left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right|dudvdw=\iiint\limits_{\Delta} abc\; dudvdw=\to$$

Переходя далее от промежуточных координат (u,v,w) к сферическим (r,θ,φ)

$$\left[\begin{aligned}u&=r\cos\varphi\sin\theta\\ v&=r\sin\varphi\sin\theta\\ w&=r\cos\theta\end{aligned}\right.\quad\Rightarrow\quad dudvdw=\boldsymbol{r^2}\,\mathbf{sin}\boldsymbol{u}\; d\varphi d\theta dr\Rightarrow\Delta\to\Omega=\{0\le\varphi\le 2\pi,\quad 0\le\theta\le\pi,\quad 0\le r\le 1\},$$

находим:

$$\to=abc\iiint\limits_{\Omega} r^2\sin\theta\; d\varphi d\theta dr=abc\int\limits_0^{2\pi}\Bigg(\int\limits_0^{\pi}\Big(\int\limits_0^{1} r^2\sin\theta\; dr\Big)d\theta\Bigg)d\varphi=2\pi abc\int\limits_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int\limits_0^{1} r^2\; dr=$$

$$=2\pi abc\cdot 2\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{3}\pi abc.$$

Получена полезная формула объема эллипсоида $V=\frac{4}{3}\pi abc$. В частности, объем шара радиуса $R=a=b=c$ равен $V=\frac{4}{3}\pi R^3$.

Замечание. Координаты (r,θ,φ) для исходных декартовых координат (x,y,z) получили название обобщенных сферических координат

$$\left[\begin{aligned}x&=ar\cos\varphi\sin\theta\\ y&=br\sin\varphi\sin\theta\\ z&=cr\cos\theta\end{aligned}\right.\quad\Rightarrow\quad\left|\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)}\right|=\boldsymbol{abc}\ \boldsymbol{r^2}\,\mathbf{sin}\boldsymbol{u}$$

37. Криволинейные интегралы по длине (масса, заряд)

Условия.

№ 37.1. Найти массу кривой L с линейной плотностью $\rho=\rho(x,y,z)$:	
$L=\left\{\begin{bmatrix} x=\cos t \\ y=\sin t,\ t\in[0,2\pi] \\ z=t\end{bmatrix}\right\}$, $\rho=\sqrt{x^2+y^2}\cdot z$	$L=\left\{\begin{bmatrix} x=\operatorname{ch} t \\ y=\operatorname{sh} t,\ t\in[0,1] \\ z=t\end{bmatrix}\right\}$, $\rho=\dfrac{z}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$
№ 37.2. Найти заряд кривой L с линейной плотностью заряда $\rho=\rho(x,y,z)$:	
$L=\left\{\begin{bmatrix} x=e^{-t}\cos t \\ y=e^{-t}\sin t,\ t\in[0,+\infty) \\ z=e^{-t}\end{bmatrix}\right\}$, $\rho=xyz$	$L=\left\{\begin{bmatrix} x=\cos e^{-t} \\ y=\sin e^{-t},\ t\in[0,+\infty) \\ z=e^{-t}\end{bmatrix}\right\}$, $\rho=xyz$
№ 37.3. Найти центр масс однородной кривой L:	
$L=\left\{\begin{bmatrix} x=\cos t \\ y=\sin t,\ t\in[0,2\pi] \\ z=t\end{bmatrix}\right\}$	$L=\left\{\begin{bmatrix} x=e^{-t}\cos t \\ y=e^{-t}\sin t,\ t\in[0,+\infty) \\ z=e^{-t}\end{bmatrix}\right\}$,
№ 37.4. Найти длину кривой L:	
$L=\left\{\begin{bmatrix} x=t\cos\sqrt{2}t \\ y=t\sin\sqrt{2}t,\ t\in[0,1] \\ z=t\end{bmatrix}\right\}$,	$L=\left\{\begin{bmatrix} x=t\cos t-\sin t \\ y=t\sin t+\cos t,\ t\in[0,1] \\ z=t\end{bmatrix}\right\}$,

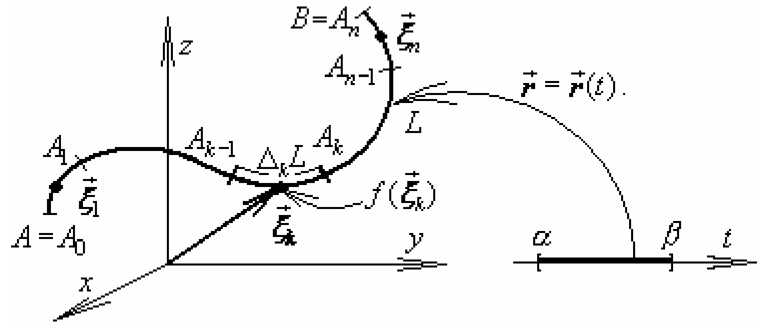
Теория.

Пусть дана простая гладкая кривая

$$L=\{\vec{\boldsymbol r}=\vec{\boldsymbol r}(t),\ t\in[\alpha,\beta]\}=\left\{\begin{bmatrix} x=x(t) \\ y=y(t),\ t\in[\alpha,\beta] \\ z=z(t)\end{bmatrix}\right\}$$ ($\exists$ *непрерывная* $\vec{\boldsymbol r}'(t)$, *причем* $\vec{\boldsymbol r}'(t)\neq 0$),

на которой распределена масса (заряд) с заданной линейной непрерывной плотностью $\rho=f(\vec{\boldsymbol r})=f(x,y,z)$.

Найдем массу (заряд) кривой. Разобьем кривую L на малые части L_k длины $\Delta_k L$ и выберем на них промежуточные точки $\vec{\xi}_k$. Тогда масса m (заряд q) равна:



$$m=\sum_{k=1}^{n}\Delta_k m=\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\vec{\xi}_k)\Delta_k L=\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta_k L.$$

Полученный предел называется криволинейным интегралом по длине от функции $f(\vec{\boldsymbol r})$ по кривой L и обозначается:

$$\int_L f(\vec{\boldsymbol r})dL=\int_L f(x,y,z)dL.$$

Он может быть сведен к следующему определенному:

$$\boxed{\int_\alpha^\beta f(\vec{\boldsymbol r}(t))\left|\vec{\boldsymbol r}'(t)\right|dt=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{\left(x_t'(t)\right)^2+\left(y_t'(t)\right)^2+\left(z_t'(t)\right)^2}\,dt}.$$

Решения.

№ 37.1.

$$m=\int\limits_L \rho(x,y,z)dL=\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\ z\ dL=\left[x=\cos t,\ \ y=\sin t,\ \ z=t;\quad 0\le t\le 2\pi\right]=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{x^2+y^2}\ z\ \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}dt=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}\ t\ \sqrt{\cos'^2 t+\sin'^2 t+t'^2}dt=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{1}\ t\ \sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t+1^2}dt=\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}tdt=\sqrt{2}\,\frac{(2\pi)^2}{2}.$$

№ 37.2.

$$q=\int\limits_L \rho(x,y,z)dL=\int\limits_L x\ y\ z\ dL=\left[x=e^{-t}\cos t,\quad y=e^{-t}\sin t,\quad z=e^{-t};\quad 0\le t<+\infty\right]=$$

$$=\int\limits_0^{+\infty}x\ y\ z\ \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}dt=\int\limits_0^{+\infty}e^{-t}\cos t\ e^{-t}\sin t\ e^{-t}\sqrt{\left(e^{-t}\cos t\right)'^2+\left(e^{-t}\sin t\right)'^2+\left(e^{-t}\right)'^2}dt=$$

$$=\int\limits_0^{+\infty}e^{-4t}\cos t\ \sin t\ \sqrt{3}dt=\frac{\sqrt{3}}{2}\int\limits_0^{+\infty}e^{-4t}\sin 2t\ dt=\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{Im}\int\limits_0^{+\infty}e^{(-4+i2)t}dt=\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{Im}\left.\frac{e^{(-4+i2)t}}{-4+i2}\right|_0^{+\infty}=$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{Im}\frac{1}{-4+i2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{Im}\frac{-4-i2}{4^2+2^2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{-2}{4^2+2^2}=\frac{\sqrt{3}}{20}$$

№ 37.3.

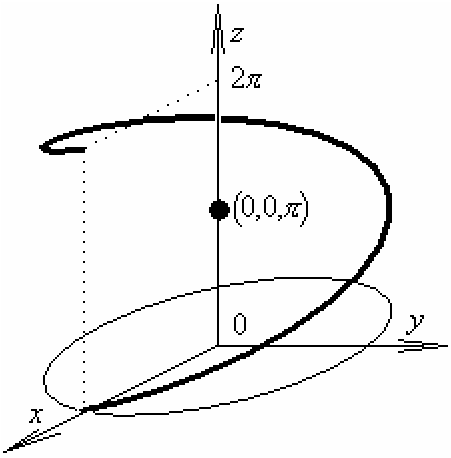
При нахождении центра масс неоднородной кривой L с линейной плотностью $\rho=\rho(\vec{\boldsymbol r})=\rho(x,y,z)$ и массой

$$m=\int\limits_L \rho(\vec{\boldsymbol r})dL=\int\limits_L \rho(x,y,z)dL$$

воспользуемся определением центра масс системы материальных точек. Разобьем кривую L точками на малые части L_k, с массами $\Delta_k m\approx\rho(\vec{\xi}_k)\Delta_k L=\rho(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta_k L$, настолько малые, что каждую можно рассматривать как материальную точку $\vec{\xi}_k=(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)$. Тогда:

$$\vec{\boldsymbol r}_0\approx\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n}\vec{\xi}_k\Delta_k m\approx\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n}\vec{\xi}_k\rho(\vec{\xi}_k)\Delta_k L\underset{d\to 0}{\to}\frac{1}{m}\int\limits_L \vec{\boldsymbol r}\rho(\vec{\boldsymbol r})dL\quad\Rightarrow\quad\left[\begin{aligned}x_0&=\frac{1}{m}\int\limits_L x\rho(x,y,z)dL\\ y_0&=\frac{1}{m}\int\limits_L y\rho(x,y,z)dL\\ z_0&=\frac{1}{m}\int\limits_L z\rho(x,y,z)dL\end{aligned}\right.$$

Из физических соображений очевидно, что центр масс однородной винтовой линии находится на ее оси: $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, \pi)$. Цель приведенных ниже расчетов, в частности, убедиться в адекватности математических формул интуитивным представлениям.
Найдем массу кривой



$$m = \int_L \rho(x,y,z)dL = \int_L \rho\, dL =$$
$$= [x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t; \quad 0 \le t \le 2\pi] =$$
$$= \rho \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt = \rho \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos'^2 t + \sin'^2 t + t'^2}\, dt =$$
$$= \rho \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1^2}\, dt = \rho \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = 2\sqrt{2}\pi\rho.$$

Далее найдем координаты центра масс:

$$x_0 = \frac{1}{m}\int_L x\rho(x,y,z)\, dL = \frac{1}{m}\int_L x\rho dL = \frac{\rho}{m}\int_L x dL = \frac{\rho}{m}\int_0^{2\pi} \cos t \cdot \sqrt{2} dt = 0,$$
$$y_0 = \frac{1}{m}\int_L y\rho(x,y,z)\, dL = \frac{1}{m}\int_L y\rho dL = \frac{\rho}{m}\int_L y dL = \frac{\rho}{m}\int_0^{2\pi} \sin t \cdot \sqrt{2} dt = 0,$$
$$z_0 = \frac{1}{m}\int_L z\rho(x,y,z)\, dL = \frac{1}{m}\int_L z\rho dL = \frac{\rho}{m}\int_L z dL = \frac{\rho}{m}\int_0^{2\pi} t \cdot \sqrt{2} dt = \sqrt{2}\,\frac{\rho}{m}\frac{(2\pi)^2}{2} = \pi.$$

№ 37.4.

$$L = \int_L 1\, dL = \left[x = t\cos\sqrt{2}t, \quad y = t\sin\sqrt{2}t, \quad z = t; \quad 0 \le t \le 1\right] = \int_0^1 \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt =$$
$$= \int_0^1 \sqrt{\left(t\cos\sqrt{2}t\right)'^2 + \left(t\sin\sqrt{2}t\right)'^2 + t'^2}\, dt = \sqrt{2}\int_0^1 \sqrt{1+t^2}\, dt = \to$$

Воспользовавшись ранее найденным интегралом (см. **№ 23.3**.)

$$L = \int_0^\alpha \sqrt{1+\varphi^2}\, d\varphi = \frac{1}{2}\left(\ln\left(\alpha + \sqrt{1+\alpha^2}\right) + \alpha\sqrt{1+\alpha^2}\right),$$

получим

$$\to = \frac{1}{2}\left(\ln\left(1+\sqrt{1+1^2}\right) + 1\sqrt{1+1^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\ln\left(1+\sqrt{2}\right) + \sqrt{2}\right).$$

38. Криволинейные интегралы по координатам (работа силы)

Условия.

№ 38 1. Найти работу силы $\vec{\boldsymbol{F}}$ при перемещении материальной точки из начала A в конец B кривой L_{AB}.	
$L_{AB}=\left\{\begin{bmatrix} x=\operatorname{ch}t \\ y=\operatorname{sh}t,\ t\in[-1,+1] \\ z=t\end{bmatrix}\right\},\ \vec{\boldsymbol{F}}=\begin{bmatrix} y \\ z \\ x\end{bmatrix}$	$L_{AB}=\left\{\begin{bmatrix} x=\cos t \\ y=\sin t,\ t\in[-\pi,+\pi] \\ z=t\end{bmatrix}\right\},\ \vec{\boldsymbol{F}}=\begin{bmatrix} z \\ x \\ y\end{bmatrix}$
№ 38 2. Найти работу силы $\vec{\boldsymbol{F}}_{TP}$ трения при перемещении материальной точки по плоской кривой $L_{AB}=\left\{\begin{bmatrix} x=x(t) \\ y=y(t)\end{bmatrix},\ t\in[\alpha,\beta]\right\}$	**№ 38.2**. Найти работу силы $\vec{\boldsymbol{F}}_{C}$ сопротивления воздуха при перемещении материальной точки по кривой $L_{AB}=\left\{\begin{bmatrix} x=x(t) \\ y=y(t),\ t\in[\alpha,\beta] \\ z=z(t)\end{bmatrix}\right\}$
№ 38.3. Найти работу силы $\vec{\boldsymbol{F}}_{T}$ тяготения, создаваемой материальной точкой массой M, находящейся в начале координат, при перемещении материальной точки массой m по кривой $L_{AB}=\left\{\begin{bmatrix} x=x(t) \\ y=y(t),\ t\in[\alpha,\beta] \\ z=z(t)\end{bmatrix}\right\}$	**№ 38.3**. Найти работу силы $\vec{\boldsymbol{F}}_{y}$ упругости, создаваемой бесконечно растяжимой пружиной прикрепленной к началу координат, при перемещении материальной точки по кривой $L_{AB}=\left\{\begin{bmatrix} x=x(t) \\ y=y(t),\ t\in[\alpha,\beta] \\ z=z(t)\end{bmatrix}\right\}$
№ 38.4. Найти работу векторного поля $\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\operatorname{grad} u(\vec{\boldsymbol{r}})$ при перемещении материальной точки из начала A конец B кривой L_{AB}.	
$L_{AB}=\left\{\begin{bmatrix} x=x(t) \\ y=y(t),\ t\in[\alpha,\beta] \\ z=z(t)\end{bmatrix}\right\}$	$L_{AB}=\left\{\begin{bmatrix} x=x(t) \\ y=y(t),\ t\in[\alpha,\beta] \\ z=z(t)\end{bmatrix}\right\},\quad A=B$

Теория.

Пусть дана простая гладкая кривая

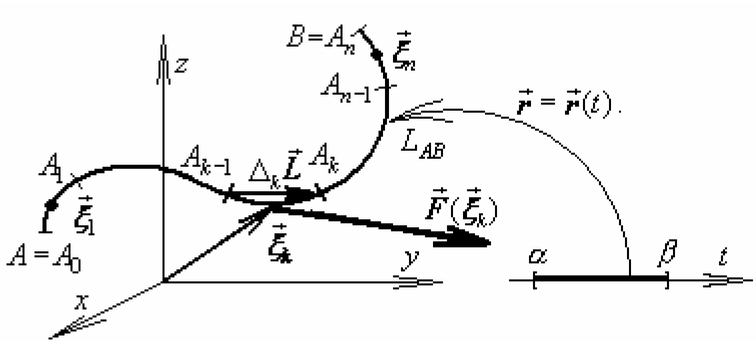
$$L=\left\{\vec{\boldsymbol{r}}=\vec{\boldsymbol{r}}(t),\ t\in[\alpha,\beta]\right\}=\left\{\begin{bmatrix} x=x(t) \\ y=y(t),\ t\in[\alpha,\beta] \\ z=z(t)\end{bmatrix}\right\}\quad (\exists \textit{ непрерывная } \vec{\boldsymbol{r}}'(t)\textit{, причем } \vec{\boldsymbol{r}}'(t)\neq 0),$$

воспринимаемая, как траектория движения материальной точки. Тогда для любых двух точек $A_1(\vec{\boldsymbol{r}}(t_1))$ и $A_2(\vec{\boldsymbol{r}}(t_2))$ можно сказать, что одна из них A_1 встретится раньше другой A_2, понимая под этим, что $t_1<t_2$. Таким образом, конкретная параметризация автоматически задает направление движения вдоль кривой или, как говорят, ориентацию. В частном случае, когда кривая простая (без точек самопересечения), направление движения однозначно определяется указанием одной из концевых точек A или B в качестве начала или конца. Поэтому простые кривые с заданной ориентацией обозначаются L_{AB} (или L_{BA}). Если дополнительно кривая гладкая, то направление движения можно определить, задав непрерывное поле единичных векторов касательных $\vec{\tau}(\vec{\boldsymbol{r}})=\vec{\tau}(\vec{\boldsymbol{r}}(t))=\dfrac{\vec{\boldsymbol{r}}'(t)}{|\vec{\boldsymbol{r}}'(t)|}$ (или $-\vec{\tau}(\vec{\boldsymbol{r}})$).

Пусть кривая L *находится в силовом непрерывном поле*

$$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\begin{bmatrix}P(x,y,z)\\Q(x,y,z)\\R(x,y,z)\end{bmatrix}.$$

Найдем работу силы $\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ *по перемещению материальной точки из начала* A *в конец* B *кривой* L_{AB}.



Разобьем ориентированную кривую L_{AB} *на малые ориентированные части* $L_{A_{k-1}A_k}$, *почти совпадающие с вектором перемещения* $\Delta_k\vec{\boldsymbol{r}}=\Delta_k\vec{\boldsymbol{L}}=\overrightarrow{A_{k-1}A_k}$, *и выберем на них промежуточные точки* $\vec{\xi}_k$. *Тогда работа* A *равна:*

$$A=\sum_{k=1}^{n}\Delta_k A=\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n}\left(\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\xi}_k),\Delta_k\vec{\boldsymbol{L}}\right)=\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n}P(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta_k x+Q(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta_k y+R(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta_k z$$

Полученный предел называется криволинейным интегралом по координатам от вектор-функции $\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ *по ориентированной кривой* L_{AB} *и обозначается*

$$\int\limits_{L_{AB}}\left(\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}),d\vec{\boldsymbol{r}}\right)=\int\limits_{L_{AB}}\left(\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}),d\vec{\boldsymbol{L}}\right)=\int\limits_{L_{AB}}P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz.$$

Он может быть сведен к следующему определенному:

$$\boxed{\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left(\vec{\boldsymbol{F}}\left(\vec{\boldsymbol{r}}(t)\right),\vec{r}_t'(t)\right)dt=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left(P(x(t),y(t),z(t))x_t'(t)+Q(\ldots)y_t'+R(\ldots)z_t'\right)dt}.$$

Решения.

№ 38.1.

$$A=\int\limits_{L_{AB}}\left(\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}),d\vec{\boldsymbol{L}}\right)=\int\limits_{L_{AB}}P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=$$

$$=\left[P(x,y,z)=y,\ \ Q(x,y,z)=z,\ \ R(x,y,z)=x\right]=\int\limits_{L_{AB}}\left(ydx+zdy+xdz\right)=$$

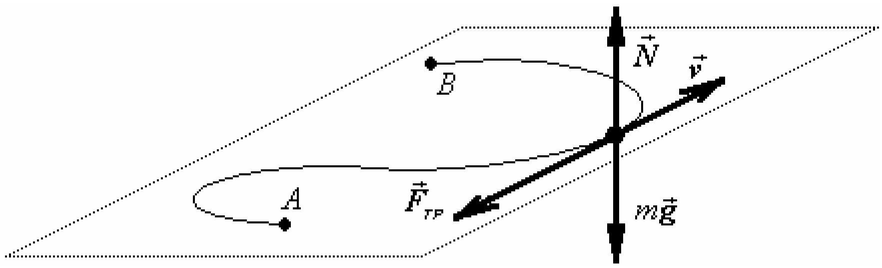
$$=\left[x=\operatorname{ch}t,\quad y=\operatorname{sh}t,\quad z=t;\quad -1\le t\le +1\right]=\int\limits_{-1}^{+1}(\operatorname{sh}td\operatorname{ch}t+td\operatorname{sh}t+\operatorname{ch}tdt)=$$

$$=\int\limits_{-1}^{+1}\operatorname{sh}^2tdt+\int\limits_{-1}^{+1}t\ \operatorname{ch}tdt+\int\limits_{-1}^{+1}\operatorname{ch}tdt=2\int\limits_{0}^{+1}\operatorname{sh}^2tdt+0+2\int\limits_{0}^{+1}\operatorname{ch}tdt=2\int\limits_{0}^{+1}\frac{\operatorname{ch}2t-1}{2}dt+2\int\limits_{0}^{+1}\operatorname{ch}tdt=$$

$$=\left(\frac{\operatorname{sh}2t}{2}-t+2\operatorname{sh}t\right)\Bigg|_0^{+1}=\left(\frac{\operatorname{sh}2}{2}-1+2\operatorname{sh}1\right).$$

№ 38.2.

Сила трения скольжения $\vec{\boldsymbol F}_{TP}$ по величине равна $\left|\vec{\boldsymbol F}_{TP}\right| = k_{TP}\left|\vec{\boldsymbol N}\right| = k_{TP}mg$ и направлена противоположно движению (скорости $\vec{\boldsymbol v}$) $\vec{\boldsymbol F}_{TP} \uparrow\uparrow -\dfrac{\vec{\boldsymbol v}}{|\vec{\boldsymbol v}|}$,



так что

$$\vec{\boldsymbol F}_{TP} = -k_{TP}mg\,\frac{\vec{\boldsymbol v}}{|\vec{\boldsymbol v}|} = -k_{TP}mg\,\frac{\vec{\boldsymbol r}'}{|\vec{\boldsymbol r}'|} = -k_{TP}mg\,\frac{1}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

Работа силы трения при перемещении материальной точки по плоской кривой равна:

$$A = \int\limits_{L_{AB}} \left(\vec{\boldsymbol F}_{TP}, d\vec{\boldsymbol L}\right) = -k_{TP}mg\int\limits_{L_{AB}} \frac{x'dx + y'dy + z'dz}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} = -k_{TP}mg\int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{x'^2+y'^2+z'^2}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}dt =$$

$$= -k_{TP}mg\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt = -k_{TP}mg\ L, \qquad \text{где } L = \int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt \text{ - длина кривой.}$$

Приведенным преобразованиям можно придать векторную форму записи:

$$A = \int\limits_{L_{AB}} \left(\vec{\boldsymbol F}_{TP}, d\vec{\boldsymbol L}\right) = \int\limits_{L_{AB}} \left(-k_{TP}mg\,\frac{\vec{\boldsymbol r}'}{|\vec{\boldsymbol r}'|}, d\vec{\boldsymbol L}\right) = -k_{TP}mg\int\limits_{L_{AB}} \left(\vec{\boldsymbol\varphi}(\vec{\boldsymbol r}), d\vec{\boldsymbol L}\right) =$$

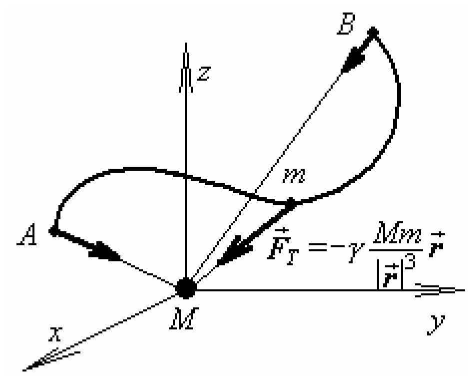
$$= \left[\left(\vec{\boldsymbol\varphi}, d\vec{\boldsymbol L}\right) = |\vec{\boldsymbol\varphi}|\,|d\vec{\boldsymbol L}|\cos\left(\widehat{\vec{\boldsymbol\varphi}, d\vec{\boldsymbol L}}\right) = |d\vec{\boldsymbol L}| = dL\right] = -k_{TP}mg\int\limits_{L} 1dL = -k_{TP}mg\ L.$$

Замечание. Сила сопротивления воздуха $\vec{\boldsymbol F}_C$ по величине пропорциональна величине скорости $|\vec{\boldsymbol v}|$ и направлена противоположно движению (скорости $\vec{\boldsymbol v}$) $\vec{\boldsymbol F}_C \uparrow\uparrow -\dfrac{\vec{\boldsymbol v}}{|\vec{\boldsymbol v}|}$, так что

$$\vec{\boldsymbol F}_C = -k_C\,|\vec{\boldsymbol v}|\frac{\vec{\boldsymbol v}}{|\vec{\boldsymbol v}|} = -k_C\vec{\boldsymbol v} = -k_C\vec{\boldsymbol r}' = -k_C\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}.$$

№ 38.3.

Согласно закону всемирного тяготения (Ньютон, 1687) сила, с которой материальная точка массой M притягивает другую массой m, по величине прямо пропорциональна массам этих точек и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними, и направлена по радиусу-вектору, соединяющего эти точки:



$$\vec{\boldsymbol F}_T(\vec{\boldsymbol r}) = -\gamma\frac{Mm}{|\vec{\boldsymbol r}|^2}\frac{\vec{\boldsymbol r}}{|\vec{\boldsymbol r}|} = -\gamma\frac{Mm}{|\vec{\boldsymbol r}|^3}\vec{\boldsymbol r} = -\gamma\frac{Mm}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^{\,3}}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Работа силы тяготения при перемещении материальной точки по кривой материальной точки массой m, находящейся в гравитационном поле $\vec{F}_T(\vec{r})$. Нетрудно видеть, что $\vec{F}_T(\vec{r}) = -\operatorname{grad} U(\vec{r})$ (см. **№ 27.4**). Как видно, работа гравитационного поля не зависит от кривой, а определяется только ее начальной и конечной точкой, и равна изменению потенциальной энергии точки.

Замечание. Согласно закону Гука (1660) сила упругости $\vec{F}_y$ равна:

$$\vec{F}_y = -k_y |\vec{r}| \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = -k_y \vec{r} = -k_y \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

№ 38.4.

Работа векторного поля

$$\vec{F}(\vec{r}) = \operatorname{grad} u(\vec{r}) = \begin{bmatrix} u'_x \\ u'_y \\ u'_z \end{bmatrix}$$

при перемещении материальной точки из начала A в конец B кривой L_{AB} равна:

$$A = \int\limits_{L_{AB}} \left(\vec{F}(\vec{r}), d\vec{r}\right) = \int\limits_{L_{AB}} \left(\operatorname{grad} u(\vec{r}), d\vec{r}\right) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} u'_x(x,y,z)dx + u'_y(x,y,z)dy + u'_z(x,y,z)dz =$$

равна:

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} du(x(t), y(t), z(t)) = u(x(t), y(t), z(t)) \Big|_{\alpha}^{\beta} = u(x(\beta), y(\beta), z(\beta)) - u(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha)).$$

$$A = \int\limits_{L_{AB}} \left(\vec{F}_T, d\vec{r}\right) = -\gamma Mm \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} = -\gamma Mm \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} \frac{d\left(x^2+y^2+z^2\right)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} = \gamma Mm \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\, \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} =$$

$$= \gamma Mm \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \Bigg|_{\alpha}^{\beta} = \gamma Mm \left(\frac{1}{\sqrt{x^2(\beta)+y^2(\beta)+z^2(\beta)}} - \frac{1}{\sqrt{x^2(\alpha)+y^2(\alpha)+z^2(\alpha)}} \right).$$

Приведенным преобразованиям можно придать векторную форму записи:

$$A = \int\limits_{L_{AB}} \left(\vec{F}_T, d\vec{r}\right) = -\gamma Mm \int\limits_{L_{AB}} \frac{(\vec{r}, d\vec{r})}{|\vec{r}|^3} = -\gamma Mm \int\limits_{L_{AB}} \frac{1}{2} \frac{d(\vec{r}, \vec{r})}{|\vec{r}|^3} = -\gamma Mm \int\limits_{L_{AB}} \frac{1}{2} \frac{d|\vec{r}|^2}{|\vec{r}|^3} = -\gamma Mm \int\limits_{L_{AB}} \frac{|\vec{r}|\, d|\vec{r}|}{|\vec{r}|^3} =$$

$$= -\gamma Mm \int\limits_{L_{AB}} \frac{d|\vec{r}|}{|\vec{r}|^2} = \gamma Mm \int\limits_{L_{AB}} d\,\frac{1}{|\vec{r}|} = \gamma Mm \frac{1}{|\vec{r}|}\Bigg|_{A}^{B} = \gamma Mm \left(\frac{1}{|\vec{r}(B)|} - \frac{1}{|\vec{r}(A)|} \right) = -\left(U(B) - U(A)\right)$$

Замечание. Скалярная функция $U(\vec{r}) = -\gamma \dfrac{Mm}{|\vec{r}|}$ - это потенциальная энергия

Приведенным преобразованиям можно придать векторную форму записи:

$$A = \int\limits_{L_{AB}} \left(\vec{F}(\vec{r}), d\vec{r}\right) = \int\limits_{L_{AB}} \left(\operatorname{grad} u(\vec{r}), d\vec{r}\right) = \int\limits_{L_{AB}} du(\vec{r}) = u(\vec{r}) \Big|_{A}^{B} = u(B) - u(A).$$

Замечание. По аналогии с физическими силовыми полями в математике скалярная функция $u(\vec{r})$ называется потенциалом векторного поля $\vec{F}(\vec{r}) = \operatorname{grad} u(\vec{r})$. Как видно, работа такого поля не зависит от кривой, а определяется только ее начальной и конечной точкой, и равна разности потенциалов. Само векторное поле $\vec{F}(\vec{r}) = \operatorname{grad} u(\vec{r})$ называется потенциальным.

39. Поверхностные интегралы по площади (масса, заряд)

Условия.

№ 39 1. Найти массу поверхности S с поверхностной плотностью $\rho=\rho(x,y,z)$.	
$S=\left\{z=\frac{1}{2}(x^2+y^2),\quad x^2+y^2\le a^2\right\}$ $\rho=\sqrt{\left(x^2+y^2\right)\cdot z}$	$S=\left\{z=\sqrt{x^2+y^2},\ x^2+y^2\le ax\right\}$ $\rho=\sqrt{\left(x^2+y^2\right)}\cdot z$
№ 39 2. Найти заряд поверхности S с поверхностной плотностью $\rho=\rho(x,y,z)$.	
$S=\left\{z=\sqrt{x^2+y^2},\quad x^2+y^2\le ay\right\}$ $\rho=\left(x^2+y^2\right)\cdot z$	$S=\left\{z=xy,\quad x^2+y^2\le a^2\right\}$ $\rho=\left(x^2+y^2\right)\cdot z$
№ 39 3. Найти центр масс поверхности S с поверхностной плотностью $\rho=\rho(x,y,z)$.	
$S=\left\{z=\frac{1}{2}(x^2+y^2),\quad x^2+y^2\le a^2\right\}$ $\rho=\frac{z}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$	$S=\left\{z=\sqrt{x^2+y^2},\quad x^2+y^2\le a^2\right\}$ $\rho=\sqrt{x^2+y^2}\cdot z^2$
№ 39 4. Найти площадь поверхности S.	
$S=\left\{z=xy,\quad x^2+y^2\le a^2\right\}$	$S=\left\{z=\frac{1}{2}(x^2+y^2),\quad x^2+y^2\le a^2\right\}$.
№ 39 5. Найти площадь поверхности S.	
Часть сферы, ограниченной двумя параллелями и двумя меридианами $S=\left\{\begin{bmatrix} x=R\cos\varphi\sin\theta \\ y=R\sin\varphi\sin\theta \\ z=R\cos\theta\end{bmatrix}\right\}$, . $(\varphi,\theta)\in\Omega=\left\{\alpha\le\varphi\le\beta,\ \gamma\le\theta\le\delta\right\}$	Часть геликоида $S=\left\{\begin{bmatrix} x=u\cos v \\ y=u\sin v \\ z=v\end{bmatrix}\right\}$, $(u,v)\in\Omega=\left\{\alpha\le u\le\beta,\ \gamma\le v\le\delta\right\}$

Теория.

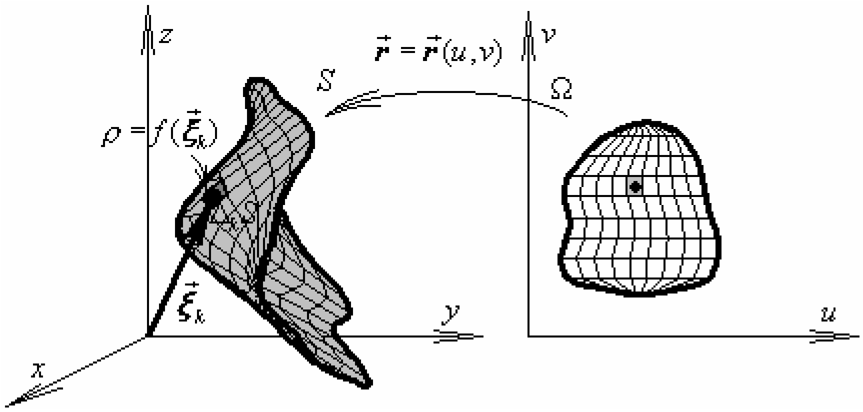
Пусть дана простая гладкая поверхность

$$S=\left\{\vec{\boldsymbol r}=\vec{\boldsymbol r}(u,v),\ (u,v)\in\Omega\right\}=\left\{\begin{bmatrix} x=x(u,v) \\ y=y(u,v),(u,v)\in\Omega \\ z=z(u,v)\end{bmatrix}\right\}\ (\exists\ \textit{непрерывные}\ \vec{\boldsymbol r}'_u,\ \vec{\boldsymbol r}'_v,\ \textit{причем}\ \left[\vec{\boldsymbol r}'_u,\vec{\boldsymbol r}'_v\right]\ne 0),$$

на которой распределена масса (заряд) с заданной поверхностной непрерывной плотностью $\rho=f(\vec{\boldsymbol r})=f(x,y,z)$. *Найдем массу (заряд) поверхности.*

Разобьем поверхность S *на малые части* S_k *с площадью* $\Delta_k S$ *и выберем на них промежуточные точки* $\vec{\xi}_k$. *Тогда масса* m *(заряд* q*) равна:,*

$$m=\sum_{k=1}^{n}\Delta_k m=\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\vec{\xi}_k)\Delta_k S=\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta_k S$$



Полученный предел называется поверхностным интегралом по площади, от функции $f(\vec{r})$ по поверхности S и обозначается:

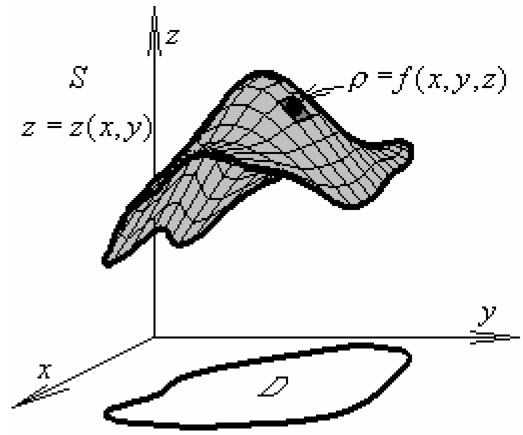
$$\iint_S f(\vec{r})dS = \iint_S f(x,y,z)dS\,.$$

Он может быть сведен к следующему двойному:

$$\boxed{\iint_S f(\vec{r})dS = \iint_\Omega f(\vec{r}(u,v))\left|\left[\vec{r}'_u,\vec{r}'_v\right]\right|dudv = \iint_\Omega f(\vec{r}(u,v))\sqrt{\left(\vec{r}'_u,\vec{r}'_u\right)\left(\vec{r}'_v,\vec{r}'_v\right)-\left(\vec{r}'_u,\vec{r}'_v\right)^2}\,dudv}.$$

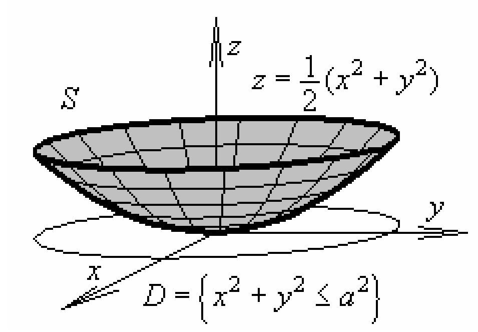
В частном случае, когда $S=\left\{z=z(x,y),\ (x,y)\in D\right\}$ – график непрерывно дифференцируемой функции, интеграл равен:

$$\boxed{\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_D f(x,y,z)\sqrt{1+\left(z'_x\right)^2+\left(z'_y\right)^2}\Bigg|_{z=z(x,y)} dxdy}$$



Решения.

№ 39.1.



$$m=\iint_S \rho(x,y,z)dS=\iint_S \sqrt{\left(x^2+y^2\right)\cdot z}dS=\to$$

$$S=\left\{z=\frac{1}{2}(x^2+y^2),\quad (x,y)\in D=\left\{x^2+y^2\le a^2\right\}\right\}$$

$$\to=\iint_D \sqrt{\left(x^2+y^2\right)\cdot z}\,\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\Big|_{z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\,dxdy=\iint_D \sqrt{\left(x^2+y^2\right)\cdot\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy=\to$$

Учитывая вид подынтегральной функции $f(x^2+y^2)$ и "круговую" форму области D, перейдем к полярным координатам.

Поскольку

$$x^2+y^2=a^2\to r=a\ ,$$

то

$$D=\{x^2+y^2\le a^2\}\ \to\ \Omega=\{r\le a\}=\{0\le\varphi\le 2\pi,\ \ 0\le r\le a\}.$$

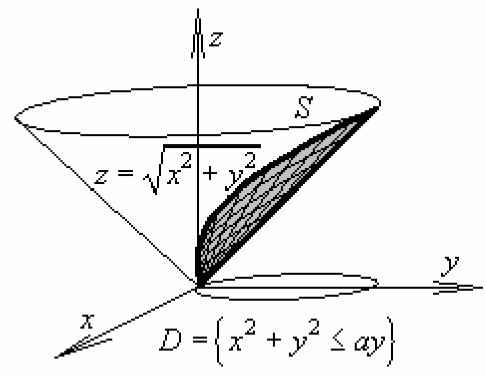
Тогда

$$\to=\iint_\Omega \sqrt{r^2\cdot\frac{1}{2}r^2}\sqrt{1+r^2}\ r\ drd\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\left(\ \int_0^a r^2\sqrt{1+r^2}\ r\ dr\ \right)d\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}2\pi\int_0^a r^2\sqrt{1+r^2}\ r\ dr=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\pi\int_0^a\left((1+r^2)^{\frac{3}{2}}-(1+r^2)^{\frac{1}{2}}\right)\,d\left(1+r^2\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\pi\int_1^{1+a^2}\left(t^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{1}{2}}\right)\,dt=\frac{1}{\sqrt{2}}\pi\left(\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_1^{1+a^2}=$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{5}\left(\sqrt{1+a^2}^{\,5}-1\right)-\frac{2}{3}\left(\sqrt{1+a^2}^{\,3}-1\right)\right).$$

№ 39.2



$$q=\iint_S \rho(x,y,z)dS=\iint_S\left(x^2+y^2\right)\cdot zdS=\to$$

$$S=\left\{z=\sqrt{x^2+y^2},\quad (x,y)\in D=\left\{x^2+y^2\le ay\right\}\right\}$$

$$\to=\iint_D\left(x^2+y^2\right)z\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\Big|_{z=\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy=$$

$$=\iint_D\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\,dxdy=\iint_D\sqrt{x^2+y^2}^{\,3}\sqrt{2}dxdy=\to$$

Учитывая вид подынтегральной функции $f(x^2+y^2)$ и "круговую" форму области D, перейдем к полярным координатам.

Поскольку

$$x^2+y^2=ay \to r^2=ar\sin\varphi \Rightarrow r=a\sin\varphi,$$

то

$$D=\{x^2+y^2\le ay\} \to \quad \Omega=\{r\le a\sin\varphi\}=\{0\le\varphi\le\pi, \quad 0\le r\le a\sin\varphi\}.$$

Тогда

$$\to=\sqrt{2}\iint_{\Omega}\sqrt{r^2}^{\,3}\ r\,drd\varphi=\sqrt{2}\int_0^{\pi}\Big(\int_0^{a\sin\varphi} r^4dr\Big)d\varphi=\frac{\sqrt{2}}{5}\int_0^{\pi}\sin^5\varphi\ d\varphi=-\frac{\sqrt{2}}{5}\int_0^{\pi}\left(1-\cos^2\varphi\right)^2\ d\cos\varphi=$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{5}\int_{+1}^{-1}\left(1-t^2\right)^2\ dt=\frac{2\sqrt{2}}{5}\int_0^1\left(1-2t^2+t^4\right)dt=\frac{2\sqrt{2}}{5}\left(1-2\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)=\frac{16\sqrt{2}}{75}.$$

№ 39.3.

При нахождении центра масс неоднородной поверхности S, с поверхностной плотностью $\rho=\rho(\vec{r})=\rho(x,y,z)$ и массой

$$m=\iint_S\rho(\vec{r})dS=\iint_S\rho(x,y,z)dS\quad,$$

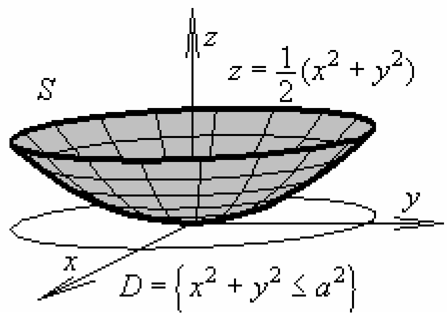
воспользуемся определением центра масс системы материальных точек. Разобьем поверхность S кривыми, на малые, попарно не налегающие части S_k с массами $\Delta_k m\approx\rho(\vec{\xi}_k)\Delta_k S=\rho(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta_k S$, настолько малые, что каждую можно рассматривать как материальную точку $\vec{\xi}_k=(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)$. Тогда:

$$\vec{r}_0\approx\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n}\vec{\xi}_k\Delta_k m\approx\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n}\vec{\xi}_k\rho(\vec{\xi}_k)\Delta_k S\underset{d\to 0}{\to}\frac{1}{m}\iint_S\vec{r}\,\rho(\vec{r})dS \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{aligned} x_0&=\frac{1}{m}\iint_S x\rho(x,y,z)dS\\ y_0&=\frac{1}{m}\iint_S y\rho(x,y,z)dS\\ z_0&=\frac{1}{m}\iint_S z\rho(x,y,z)dS\end{aligned}\right.$$

Из физических понятий очевидно, что центр масс поверхности с круговой симметрией находится на ее оси: $\left(x_0,y_0,z_0\right)=\left(0,0,?\right)$. Цель приведенных ниже расчетов, в частности, убедиться в адекватности математических формул интуитивным представлениям.

Найдем массу поверхности:

$$m=\iint_S\rho(x,y,z)dS=\iint_S\frac{z}{\sqrt{1+x^2+y^2}}dS=\to$$



$$S=\left\{z=\frac{1}{2}(x^2+y^2), \quad (x,y)\in D=\left\{x^2+y^2\le a^2\right\}\right\}$$

$$\to=\iint_D\frac{z}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\Big|_{z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dxdy=$$

$$=\iint_D\frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy=\frac{1}{2}\iint_D(x^2+y^2)dxdy=\to$$

Учитывая вид подынтегральной функции $f(x^2+y^2)$ и “круговую” форму области D, перейдем к полярным координатам.

Поскольку

$$x^2+y^2=a^2 \to r=a\ ,$$

то

$$D=\{x^2+y^2\le a^2\}\ \ \to\ \ \Omega=\{r\le a\}=\{0\le\varphi\le 2\pi,\ \ 0\le r\le a\}.$$

Тогда

$$\to=\frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega} r^2\ r\ drd\varphi=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(\ \int\limits_0^a r^3dr\ \ \right)d\varphi=\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot\frac{a^4}{4}=\pi\frac{a^4}{4}.$$

Далее найдем координаты центра масс, учитывая симметрию поверхности относительно координатных плоскостей xOz, yOz и нечетность подынтегральных функций относительно переменных x, y:

$$x_0=\frac{1}{m}\iint\limits_S x\rho(x,y,z)dS=\frac{1}{m}\iint\limits_S x\frac{z}{\sqrt{1+x^2+y^2}}dS=0,$$

$$y_0=\frac{1}{m}\iint\limits_S y\rho(x,y,z)dS=\frac{1}{m}\iint\limits_S y\frac{z}{\sqrt{1+x^2+y^2}}dS=0.$$

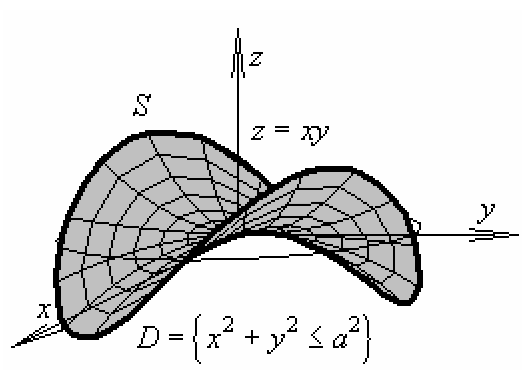
$$z_0=\frac{1}{m}\iint\limits_S z\rho(x,y,z)dS=\frac{1}{m}\iint\limits_S z\frac{z}{\sqrt{1+x^2+y^2}}dS=\frac{1}{m}\iint\limits_D\frac{z^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy=$$

$$=\frac{1}{m}\iint\limits_D\frac{\left(\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right)^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy=\frac{1}{4m}\iint\limits_D(x^2+y^2)^2\,dxdy=$$

$$=\frac{1}{4m}\iint\limits_{\Omega} r^4\ r\ drd\varphi=\frac{1}{4m}\int\limits_0^{2\pi}\left(\ \int\limits_0^a r^5dr\ \ \right)d\varphi=\frac{1}{4m}\cdot 2\pi\cdot\frac{a^6}{6}=\pi\frac{a^6}{12m}=\frac{a^2}{3}.$$

№ 39.4.

$$S=\iint\limits_S 1\ dS=\to$$



$$S=\left\{z=xy,\quad (x,y)\in D=\left\{x^2+y^2\le a^2\right\}\right\}$$

$$\to=\iint\limits_D\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\Big|_{z=xy}\,dxdy=$$

$$=\iint\limits_D\sqrt{1+y^2+x^2}\,dxdy=\to$$

Учитывая вид подынтегральной функции $f(x^2+y^2)$ и “круговую” форму области D, перейдем к полярным координатам.

Поскольку

$$x^2+y^2=a^2 \to r=a\ ,$$

то

$$D=\{x^2+y^2\le a^2\}\ \ \to\ \ \Omega=\{r\le a\}=\{0\le\varphi\le 2\pi,\ \ 0\le r\le a\}.$$

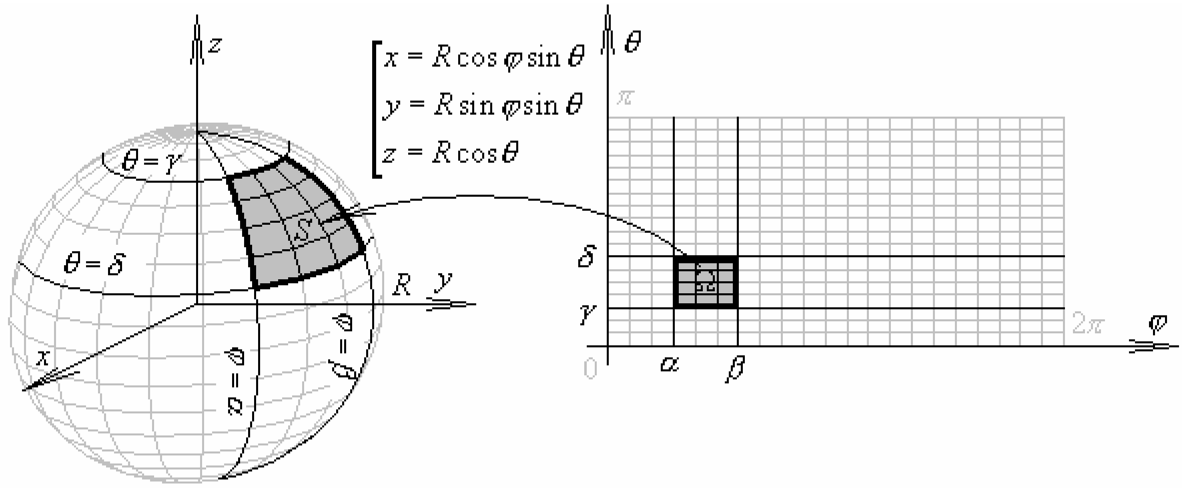
Тогда

$$\to=\iint\limits_{\Omega}\sqrt{1+r^2}\ r\ drd\varphi=\int\limits_0^{2\pi}\left(\ \int\limits_0^{a}\sqrt{1+r^2}\ r\ dr\ \right)d\varphi=2\pi\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^{a}(1+r^2)^{\frac{1}{2}}\,d(1+r^2)=$$

$$=\pi\frac{2}{3}(1+r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a=\frac{2}{3}\pi\left(\sqrt{1+a^2}^{\,3}-1\right).$$

№ 39.5.

Часть сферы, ограниченной двумя параллелями и двумя меридианами:



$$S=\iint\limits_S 1\ dS=\to$$

$$S=\left\{\ \vec{\boldsymbol r}=R\begin{bmatrix}\cos\varphi\sin\theta\\ \sin\varphi\sin\theta\\ \cos\theta\end{bmatrix},\quad(\varphi,\theta)\in\Omega=\{\alpha\le\varphi\le\beta,\ \gamma\le\theta\le\delta\}\ \right\}$$

$$\to=\iint\limits_{\Omega}\sqrt{\left|\vec{\boldsymbol r}'_\varphi\right|^2\cdot\left|\vec{\boldsymbol r}'_\theta\right|^2-\left(\vec{\boldsymbol r}'_\varphi,\vec{\boldsymbol r}'_\theta\right)^2}\,d\varphi d\theta=\to$$

$$\vec{\boldsymbol r}'_\varphi=R\begin{bmatrix}-\sin\varphi\sin\theta\\ \cos\varphi\sin\theta\\ 0\end{bmatrix},\ \ \vec{\boldsymbol r}'_\theta=R\begin{bmatrix}\cos\varphi\cos\theta\\ \sin\varphi\cos\theta\\ -\sin\theta\end{bmatrix}\ \Rightarrow\ \left[\begin{array}{l}\left|\vec{\boldsymbol r}'_\varphi\right|^2=R^2\sin^2\theta,\qquad\left|\vec{\boldsymbol r}'_\theta\right|^2=R^2,\qquad\left(\vec{\boldsymbol r}'_\varphi,\vec{\boldsymbol r}'_\theta\right)=0\\ dS=\sqrt{\left|\vec{\boldsymbol r}'_\varphi\right|^2\cdot\left|\vec{\boldsymbol r}'_\theta\right|^2-\left(\vec{\boldsymbol r}'_\varphi,\vec{\boldsymbol r}'_\theta\right)^2}\,d\varphi d\theta=R^2\sin\theta d\varphi d\theta\end{array}\right.$$

$$\to=\iint\limits_{\Omega}R^2\sin\theta d\varphi d\theta=R^2\int\limits_\alpha^\beta\left(\ \int\limits_\gamma^\delta\sin\theta\ d\theta\ \right)d\varphi=R^2\int\limits_\alpha^\beta 1\ d\varphi\cdot\int\limits_\gamma^\delta\sin\theta\ d\theta=R^2\,(\beta-\alpha)\cdot(\cos\gamma-\cos\delta)$$

При $\alpha=0,\quad\beta=2\pi,\quad\gamma=0,\quad\delta=\pi$ получаем площадь сферы радиуса R: $\quad S=4\pi R^2$.

Сравнить: выражение дифференциала площади сферы радиуса r

$$dS=\left|\left[\vec{\boldsymbol r}'_\varphi,\vec{\boldsymbol r}'_\theta\right]\right|d\varphi d\theta=r^2\sin\theta d\varphi d\theta$$

с дифференциалом объема при переходе к сферическим координатам

$$dV=\left|\left(\vec{\boldsymbol r}'_r,\vec{\boldsymbol r}'_\varphi,\vec{\boldsymbol r}'_\theta\right)\right|drd\varphi d\theta=r^2\sin\theta drd\varphi d\theta\,.$$

40. Поверхностные интегралы по координатам (поток вектора)

Условия.

№ 40 1. Найти количество жидкости (объем), протекающее в единицу времени через верхнюю сторону поверхности S_+, со скоростью $\vec{v}(\vec{r})$.	
$S_+ = \left\{ z = xy, \quad x^2+y^2 \le a^2 \right\}$, $\quad \vec{v}(\vec{r}) = \begin{bmatrix} y \\ z \\ x \end{bmatrix}$	$S_+ = \left\{ z = x^2+y^2, \quad x^2+y^2 \le a^2 \right\}$, $\vec{v}(\vec{r}) = \begin{bmatrix} z \\ x \\ y \end{bmatrix}$
№ 40 2. Найти величину заряда, протекающего в единицу времени через нижнюю сторону поверхности S_-, с плотностью заряда $\rho(\vec{r})$ и со скоростью $\vec{v}(\vec{r})$.	
$S_- = \{ z = x^2+y^2, \ x^2+y^2 \le a^2 \}$, $\vec{v}(\vec{r}) = \begin{bmatrix} z \\ x \\ y \end{bmatrix}$, $\rho(\vec{r}) = x \cdot y \cdot z$	$S_- = \{ z = x^2+y^2, \ x^2+y^2 \le a^2 \}$, $\vec{v}(\vec{r}) = \begin{bmatrix} y \\ z \\ x \end{bmatrix}$, $\rho(\vec{r}) = x \cdot y \cdot z$
№ 40 3. Найти поток вектора $\vec{F}(\vec{r})$ через коническую поверхность.	
$S = \{ z = a\sqrt{x^2+y^2}, \ (x,y) \in D \}$, $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{r}$.	$S = \{ z = a\sqrt{x^2+y^2}, (x,y) \in D \}$, $\vec{F}(\vec{r}) = \dfrac{\vec{r}}{\lvert\vec{r}\rvert^3}$.
Найти поток вектора $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{r}$ через поверхность.	
№ 40 4. $S_+ = \left\{ \begin{bmatrix} x = u\cos v \\ y = u\sin v, (0 \le u \le a, 0 \le v \le 2\pi) \\ z = v \end{bmatrix} \right\}$	**№ 40.4**. $S_+ = \left\{ \begin{bmatrix} x = u\cos v \\ y = u\sin v, (0 \le u \le a, 0 \le v \le 2\pi) \\ z = u \end{bmatrix} \right\}$
№ 40 5. часть сферы $S_+ = \{ \lvert\vec{r}\rvert = r_0 \}$ площади S.	**№ 40.5.** часть плоскости $(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{n}) = 0$ площади S.

Теория.

Пусть задана простая гладкая поверхность:

$$S = \left\{ \vec{r} = \vec{r}(u,v), \ (u,v) \in \Omega \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x = x(u,v) \\ y = y(u,v), (u,v) \in \Omega \\ z = z(u,v) \end{bmatrix} \right\} (\exists \textit{ непрерывные } \vec{r}'_u, \ \vec{r}'_v, \textit{ причем } \left[\vec{r}'_u, \vec{r}'_v \right] \ne 0).$$

На ней можно выбрать два непрерывных поля единичных векторов нормалей $\vec{n}(\vec{r}) = \vec{n}(\vec{r}(u,v)) = \dfrac{\left[\vec{r}'_u, \vec{r}'_v \right]}{\left\| \left[\vec{r}'_u, \vec{r}'_v \right] \right\|}$ *(или* $-\vec{n}(\vec{r})$*). Тем самым, определяется выбор стороны* S_+ *(или* S_-*) поверхности или, как говорят, ориентации.*

Пусть поверхность пронизывает непрерывное векторное поле

$$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{bmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{bmatrix}.$$

Например, $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{v}(\vec{r})$ *стационарное поле скоростей жидкости, с плотностью* $\rho(\vec{r})$.

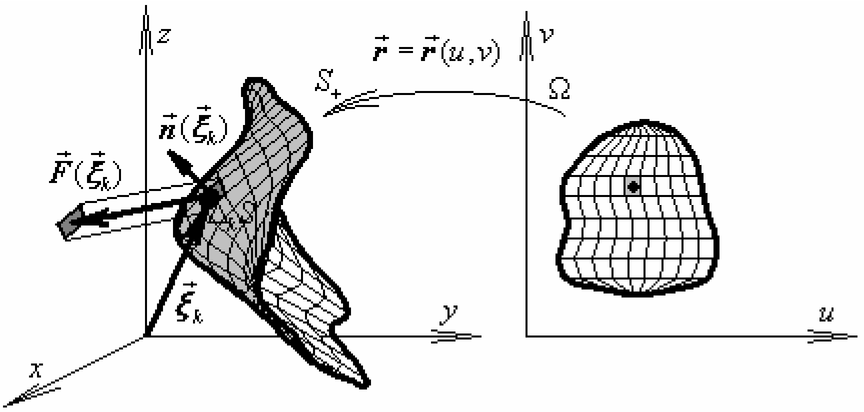
Найдем поток векторного поля $\vec{F}(\vec{r})$ *через заданную сторону* S_+ *(или* S_-*) поверхности. (Поток* $\vec{v}(\vec{r})$ *– это объем, поток* $\rho(\vec{r}) \cdot \vec{v}(\vec{r})$ *– масса жидкости, протекающей через соответствующую сторону в единицу времени).*

Разобьем ориентированную поверхность S_+ *на малые ориентированные части* S_k *площади* $\Delta_k S$ *и выберем на них промежуточные точки* $\vec{\xi}_k$ *..*

Тогда поток Π *равен:*

$$\Pi=\sum_{k=1}^{n}\Delta_k\Pi=\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n}\left(\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\xi}_k),\Delta_k\vec{\boldsymbol{S}}\right)=\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n}P(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta_k S_{yz}+Q(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta_k S_{zx}+R(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta_k S_{xy}$$

где $\Delta_k\vec{\boldsymbol{S}}=\vec{\boldsymbol{n}}(\vec{\xi}_k)\Delta_k S=\begin{bmatrix}\cos\alpha_k\\ \cos\beta_k\\ \cos\gamma_k\end{bmatrix}\Delta_k S=\begin{bmatrix}\Delta_k S_{yz}\\ \Delta_k S_{zx}\\ \Delta_k S_{xy}\end{bmatrix}$ – *вектор ориентированной площади, компоненты которого представляют собой площади* $\Delta_k S_{yz}$, $\Delta_k S_{zx}$, $\Delta_k S_{xy}$ *проекций частей* S_k *на координатные плоскости.*



Полученный предел называется поверхностным интегралом по координатам от вектор-функции $\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})$, *по выбранной стороне ориентированной поверхности* S_+, *и обозначается*

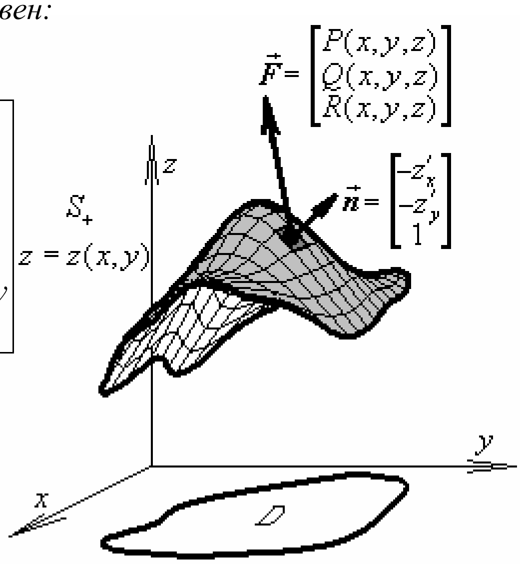
$$\iint_{S_+}\left(\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}),d\vec{\boldsymbol{S}}\right)=\iint_{S_+}P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy.$$

Он может быть сведен к следующему двойному:

$$\boxed{\iint_{S_+}\left(\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}),d\vec{\boldsymbol{S}}\right)=\iint_{S}\left(\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}),\vec{\boldsymbol{n}}(\vec{\boldsymbol{r}})\right)dS=\iint_{\Omega}\left(\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}(u,v)),\vec{\boldsymbol{r}}'_u,\vec{\boldsymbol{r}}'_v\right)dudv}.$$

В частном случае, когда $S_+=\{z=z(x,y),\ (x,y)\in D\}$ – *верхняя сторона графика непрерывно дифференцируемой функции, интеграл равен:*

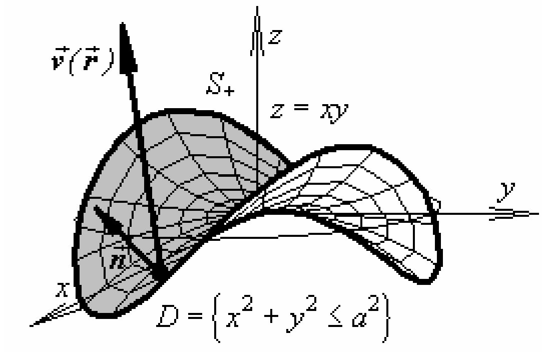
$$\boxed{\begin{aligned}&\iint_{S_+}P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy=\\&=\iint_{D}\left(-P(x,y,z)z'_x-Q(x,y,z)z'_y+R(x,y,z)\right)\Big|_{z=z(x,y)}dxdy\end{aligned}}$$



Решения.

№ 40.1.

$$\Pi=\iint\limits_{S_+}\left(\vec{v}(\vec{r}),d\vec{S}\right)=\to$$



$$S_+=\left\{z=xy,\quad (x,y)\in D=\left\{x^2+y^2\le a^2\right\}\right\}$$

$$\to=\iint\limits_D\left(-P(x,y,z)z'_x-Q(x,y,z)z'_y+R(x,y,z)\right)dxdy=\iint\limits_D\left(-y\cdot z'_x-z\cdot z'_y+x\right)\Big|_{z=xy}dxdy=$$

$$=\iint\limits_D\left(-y\cdot y-xy\cdot x+x\right)dxdy=-\iint\limits_D y^2dxdy+0+0=-\iint\limits_D y^2dxdy=\to$$

Учитывая "круговую" форму области D, перейдем к полярным координатам. Поскольку

$$x^2+y^2=a^2\to r=a\ ,$$

то

$$D=\{x^2+y^2\le a^2\}\ \to\ \Omega=\{r\le a\}=\{0\le\varphi\le 2\pi,\ \ 0\le r\le a\}.$$

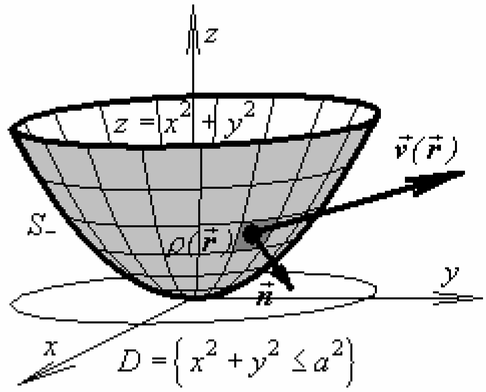
Тогда

$$\to=-\iint\limits_\Omega r^2\sin^2\varphi\ r\ drd\varphi=-\int\limits_0^{2\pi}\left(\ \int\limits_0^a r^3\sin^2\varphi\ dr\ \right)d\varphi=-\int\limits_0^{2\pi}\sin^2\varphi d\varphi\cdot\int\limits_0^a r^3dr\ =$$

$$=-\int\limits_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}d\varphi\cdot\frac{a^4}{4}=-\pi\frac{a^4}{4}.$$

№ 40.2.

$$I=\iint\limits_{S_-}\left(\rho(\vec{r})\vec{v}(\vec{r}),d\vec{S}\right)=\to$$



$$S_-=\left\{z=x^2+y^2,\quad (x,y)\in D=\left\{x^2+y^2\le a^2\right\}\right\}$$

$$\to=-\iint\limits_D\left(-P(x,y,z)z'_x-Q(x,y,z)z'_y+R(x,y,z)\right)dxdy=$$

$$=-\iint\limits_D x\cdot y\cdot z\cdot\left(-z\cdot z'_x-x\cdot z'_y+y\right)\Big|_{z=x^2+y^2}dxdy=$$

$$=-\iint\limits_D x\cdot y\cdot\left(x^2+y^2\right)\cdot\left(-\left(x^2+y^2\right)\cdot 2x-x\cdot 2y+y\right)dxdy=$$

$$=-\iint\limits_D \left(-2x^2y\left(x^2+y^2\right)^2-2x^2y^2\left(x^2+y^2\right)+xy^2\left(x^2+y^2\right)\right)dxdy=$$

$$=0+\iint\limits_D 2x^2y^2\left(x^2+y^2\right)dxdy+0=2\iint\limits_D x^2y^2\left(x^2+y^2\right)dxdy=\to$$

Учитывая "круговую" форму области D, перейдем к полярным координатам. Поскольку

$$x^2+y^2=a^2\to r=a\ ,$$

то

$$D=\{x^2+y^2\le a^2\}\ \to\ \Omega=\{r\le a\}=\{0\le\varphi\le 2\pi,\ \ 0\le r\le a\}.$$

Тогда

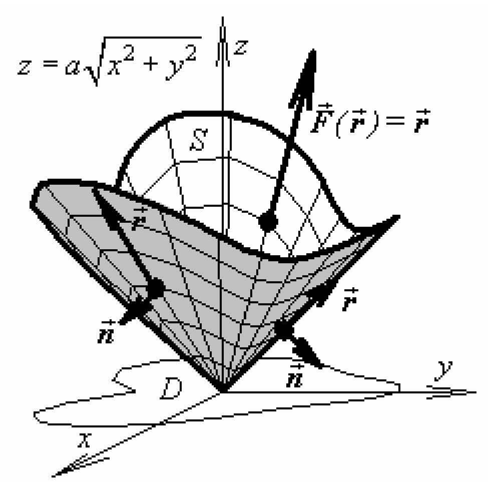
$$\to=\iint\limits_\Omega r^2\cos^2\varphi\ r^2\sin^2\varphi\ r^2\ r\ drd\varphi=\int\limits_0^{2\pi}\left(\ \int\limits_0^a r^7\cos^2\varphi\sin^2\varphi\ dr\ \right)d\varphi=\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\varphi\sin^2\varphi d\varphi\cdot\int\limits_0^a r^7dr\ =$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{4}\sin^2 2\varphi d\varphi\cdot\frac{a^8}{8}=\frac{a^8}{32}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1-\cos 4\varphi}{2}d\varphi=\frac{a^8}{32}\pi.$$

№ 40.3.

Из физических понятий очевидно, что поток вектора $\vec{\boldsymbol r}$ через коническую поверхность равен нулю (вектор $\vec{\boldsymbol r}$ "скользит" вдоль конической поверхности). Убедимся в адекватности математических формул интуитивным представлениям.

$$\Pi=\iint\limits_S\left(\vec{\boldsymbol F}(\vec{\boldsymbol r}),d\vec{\boldsymbol S}\right)=\iint\limits_S\left(\vec{\boldsymbol r},d\vec{\boldsymbol S}\right)=\to$$



$$S=\{z=a\sqrt{x^2+y^2},\ (x,y)\in D\}$$

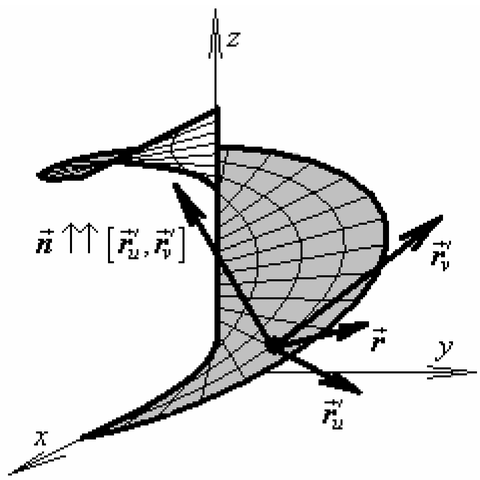
$$\to=\pm\iint\limits_D\left(-P(x,y,z)z'_x-Q(x,y,z)z'_y+R(x,y,z)\right)dxdy=$$

$$=\pm\iint\limits_D\left(-x\cdot z'_x-y\cdot z'_y+z\right)\Big|_{z=a\sqrt{x^2+y^2}}\ dxdy=$$

$$=\pm\iint\limits_D\left(-x\cdot\frac{a\,x}{\sqrt{x^2+y^2}}-y\cdot\frac{a\,y}{\sqrt{x^2+y^2}}+a\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy=$$

$$=\pm\iint\limits_D 0dxdy=0.$$

№ 40.4.



$$\Pi=\iint_{S_+}\left(\vec{F}(\vec{r}),d\vec{S}\right)=\to$$

$$S_+=\left\{\quad \vec{r}=\begin{bmatrix}u\cos v\\ u\sin v\\ v\end{bmatrix}\quad\right\},$$
$$(0\le u\le a,\quad 0\le v\le 2\pi)$$

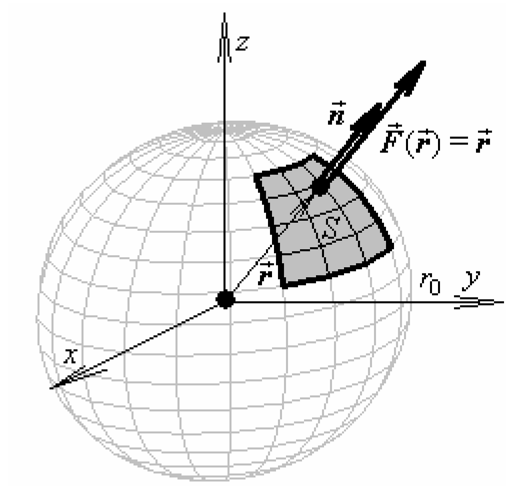
$$\to=\iint_{\Omega}\left(\vec{F}(\vec{r}),\vec{r}'_u,\vec{r}'_v\right)dudv=\iint_{\Omega}\left(\vec{r},\vec{r}'_u,\vec{r}'_v\right)dudv=\to$$

$$\vec{r}'_u=\begin{bmatrix}\cos v\\ \sin v\\ 0\end{bmatrix},\quad \vec{r}'_v=\begin{bmatrix}-u\sin v\\ u\cos v\\ 1\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad[\vec{r}'_u,\vec{r}'_v]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \cos v & \sin v & 0\\ -u\sin v & u\cos v & 1\end{vmatrix}=\begin{bmatrix}\sin v\\ -\cos v\\ u\end{bmatrix}$$

$$\left(\vec{r},\vec{r}'_u,\vec{r}'_v\right)=\left(\vec{r},[\vec{r}'_u,\vec{r}'_v]\right)=\left(\quad\begin{bmatrix}u\cos v\\ u\sin v\\ v\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\sin v\\ -\cos v\\ u\end{bmatrix}\quad\right)=u\ v$$

$$\to=\iint_{\Omega}uvdudv=\int_0^{2\pi}\left(\ \int_0^{\pi}u\ v\ du\ \right)dv=\int_0^{2\pi}vdv\int_0^{\pi}udu=\frac{1}{2}v^2\Big|_0^{2\pi}\ \frac{1}{2}u^2\Big|_0^{\pi}=\pi^4.$$

№ 40.5.



$$\Pi=\iint_{S_+}\left(\vec{F}(\vec{r}),d\vec{S}\right)=\iint_{S_+}\left(\vec{r},d\vec{S}\right)=\iint_{S}(\vec{r},\vec{n})dS=$$

$$=\left[\vec{n}\uparrow\uparrow\vec{r}\Rightarrow(\vec{r},\vec{n})=|\vec{r}||\vec{n}|\cos\left(\widehat{\vec{r},\vec{n}}\right)=|\vec{r}|\ \Big|_{\vec{r}\in\boldsymbol{S}}=r_0\right]=$$

$$=\iint_S r_0dS=r_0\iint_S 1\ dS=r_0\ S.$$

41. Сходимость несобственных интегралов

Условия.

<table>
<tr><td colspan="2">Выяснить сходимость интегралов по неограниченному промежутку.</td></tr>
<tr><td>

№ 41.1. $\int\limits_1^\infty \frac{x+1}{x^3+2x+1}dx$

№ 41.2. $\int\limits_2^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2-1}dx$

№ 41.3. $\int\limits_1^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{x^2+1}}dx$

№ 41.4. $\int\limits_1^\infty \frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x^2+1}}dx$

№ 41.5.

$a)\ \int\limits_2^\infty \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^4}}dx,\ b)\ \int\limits_2^\infty \frac{\ln x}{x}dx,\ c)\ \int\limits_2^\infty \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}dx$

№ 41.6.

$a)\ \int\limits_2^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}\ln x}dx,\ b)\ \int\limits_2^\infty \frac{1}{x\ln x}dx,\ c)\ \int\limits_2^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x}\ \ln x}dx$

№ 41.7. $\int\limits_1^\infty \frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{e^x}dx$

</td><td>

№ 41.1. $\int\limits_1^\infty \frac{2x+1}{x^4+2x^2+1}dx$

№ 41.2. $\int\limits_2^\infty \frac{\sqrt[3]{x^4}}{x^2-1}dx$

№ 41.3. $\int\limits_1^\infty \frac{\operatorname{arctg} x^2}{\sqrt[3]{x^4+1}}dx$

№ 41.4. $\int\limits_1^\infty \frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x+1}}dx$

№ 41.5.

$a)\ \int\limits_2^\infty \frac{\ln^2 x}{\sqrt[5]{x^4}}dx,\ b)\ \int\limits_2^\infty \frac{\ln^2 x}{x}dx,\ c)\ \int\limits_2^\infty \frac{\ln^2 x}{\sqrt[5]{x^7}}dx$

№ 41.6.

$a)\int\limits_2^\infty \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}\ln^2 x}dx,\ b)\int\limits_2^\infty \frac{1}{x\ln^2 x}dx,\ c)\int\limits_2^\infty \frac{1}{\sqrt[5]{x^7}\ln^2 x}dx$

№ 41.7. $\int\limits_1^\infty \frac{\sqrt{x^5+1}}{e^x}dx$

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Выяснить сходимость интегралов от неограниченной функции.</td></tr>
<tr><td>

№ 41.8. $\int\limits_0^1 \frac{\sin\sqrt{x}}{\ln(1+x)}dx$

№ 41.9. $\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{tg}\sqrt{x}}{e^{\arcsin x}-1}dx$

№ 41.10. $\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{x^2-x}dx$

№ 41.11. $a)\ \int\limits_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx,\ b)\ \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\ln x}dx$

</td><td>

№ 41.8. $\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{tg}\sqrt{x}}{\arcsin x}dx$

№ 41.9. $\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{e^{\sin x}-1}dx$

№ 41.10. $\int\limits_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{x^3-x}dx$

№ 41.11. $a)\ \int\limits_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x^3}}dx,\ b)\ \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^3}\ \ln x}dx$

</td></tr>
<tr><td>

№ 41.12. $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{x^4}}dx$

</td><td>

№ 41.12. $\int\limits_0^\infty \frac{1}{\operatorname{arctg} x\cdot\sqrt[3]{x}}dx$

</td></tr>
</table>

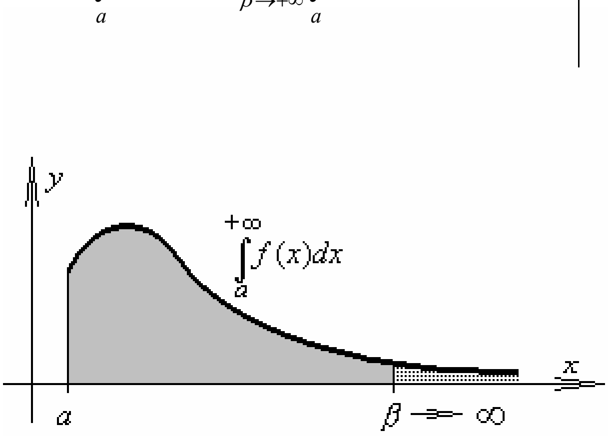
Теория.

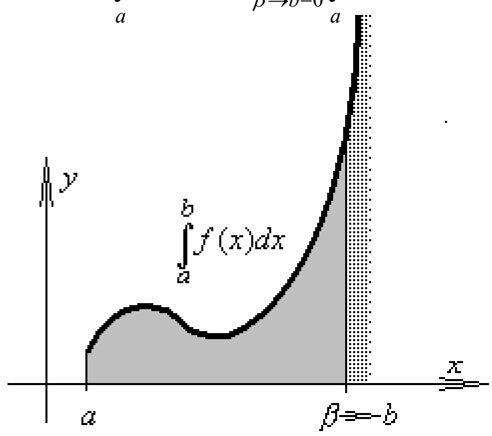
Несобственным интегралом по неограниченному промежутку называется:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\beta\to+\infty}\int_a^{\beta} f(x)dx$$

Несобственным интегралом от неограниченной функции называется:

$$\int_a^{b} f(x)dx = \lim_{\beta\to b-0}\int_a^{\beta} f(x)dx$$





Обозначив через $\omega = +\infty,\ b-0$, *удобно объединить оба случая*

$$\int_a^{\omega} f(x)dx = \lim_{\beta\to\omega}\int_a^{\beta} f(x)dx.$$

Если предел существует и конечен, несобственный интеграл называется ***сходящимся.***
Из формулы Ньютона-Лейбница

$$\int_a^{\omega} f(x)dx = \lim_{\beta\to\omega}\int_a^{\beta} f(x)dx = \lim_{\beta\to\omega} F(x)\Big|_a^{\beta} = \lim_{\beta\to\omega}\big(F(\beta)-F(a)\big) = F(\omega)-F(a)$$

вытекает, что сходимость несобственного интеграла равносильна сходимости первообразной, т.е. существованию конечного предела

$$\lim_{x\to\omega} F(x) = F(\omega).$$

В случае неотрицательной подынтегральной функции $f(x)\ge 0$ *имеются простые признаки сходимости несобственных интегралов, позволяющие выяснить сходимость опосредовано (т.е. без нахождения первообразной).*

Теорема. *(Признак сравнения в общей форме).*

Пусть:

1) $0 \le f(x) \le g(x)$

$\Rightarrow$

1) если "больший" интеграл $\int_a^{\omega} g(x)dx < \infty \;\Rightarrow$ *"меньший" интеграл* $\int_a^{\omega} f(x)dx < \infty$

(сходится)

если "меньший" интеграл $\int_a^{\omega} f(x)dx = \infty \;\Rightarrow$ *"больший" интеграл* $\int_a^{\omega} g(x)dx = \infty$

(расходится)

Теорема. *(Признак сравнения в предельной форме).*

Пусть:

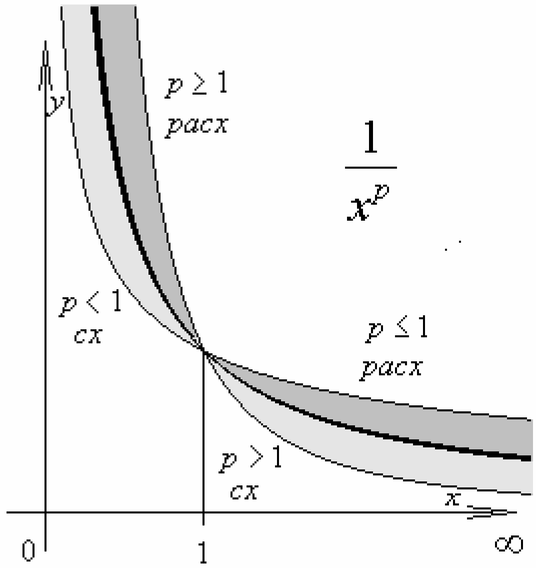
1) $f(x) \underset{x\to\omega}{\sim} g(x)$

$\Rightarrow$

1) интегралы $\int_a^{\omega} f(x)dx$, $\int_a^{\omega} g(x)dx$ ***сходятся*** *или* ***расходятся одновременно***.

В качестве “эталонных” функций, с которыми чаще всего приходится сравнивать другие функции, отметим степенные:

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}dx=\left[\begin{array}{ll} p\le 1, & расх \\ p>1, & сх \end{array}\right.$$



$$\int_0^{1}\frac{1}{x^p}dx=\left[\begin{array}{ll} p<1, & сх \\ p\ge 1, & расх \end{array}\right.$$

Решения.

№ 41.1.

$$\int_1^{\infty}\frac{x+1}{x^3+2x+1}dx \quad\Rightarrow\quad f(x)=\frac{x+1}{x^3+2x+1}\underset{x\to\infty}{\sim}\frac{x}{x^3}=\frac{1}{x^2} \quad\Rightarrow\quad p=2>1 \quad\Rightarrow\quad \textbf{сходится.}$$

№ 41.2.

$$\int_2^{\infty}\frac{\sqrt{x}}{x^2-1}dx \quad\Rightarrow\quad f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x^2-1}\underset{x\to\infty}{\sim}\frac{\sqrt{x}}{x^2}=\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \quad\Rightarrow\quad p=\frac{3}{2}>1 \quad\Rightarrow\quad \textbf{сходится.}$$

№ 41.3.

$$\int_1^{\infty}\frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{x^2+1}}dx \quad\Rightarrow\quad f(x)=\frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{x^2+1}}\underset{x\to\infty}{\sim}\frac{\frac{\pi}{2}}{x^{\frac{2}{3}}} \quad\Rightarrow\quad p=\frac{2}{3}<1 \quad\Rightarrow\quad \textbf{расходится.}$$

№ 41.4.

$$\int_1^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x^2+1}}dx \quad\Rightarrow\quad f(x)=\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x^2+1}}\underset{x\to\infty}{\sim}\frac{\frac{1}{x}}{x^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{x^{\frac{5}{3}}} \quad\Rightarrow\quad p=\frac{5}{3}>1 \quad\Rightarrow\quad \textbf{сходится.}$$

В следующих примерах демонстрируется применение признака сравнения для интегралов по неограниченному промежутку в общей форме. Полезно вспомнить, что:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\varepsilon}}=0,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\varepsilon}}{e^{x}}=0\quad(\varepsilon>0).$$

Отсюда, в частности, вытекает, что при достаточно больших значениях $x\in[a,\infty)$ имеют место оценки:

$$\frac{\ln x}{x^{\varepsilon}}\le const,\quad \frac{x^{\varepsilon}}{e^{x}}\le const\quad(\varepsilon>0).$$

№ 41.5.

$$a)\ \int_2^{\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^4}}dx\ \Rightarrow\ f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^4}}=\frac{\ln x}{x^{\frac{4}{3}}}=\frac{\ln x}{x^{\varepsilon}}\frac{x^{\varepsilon}}{x^{\frac{4}{3}}}\le const\frac{1}{x^{\frac{4}{3}-\varepsilon}}=g(x)\ \Rightarrow\ p=\frac{4}{3}-\varepsilon.$$

Попробуем подобрать $\varepsilon>0$ так, чтобы $p=\frac{4}{3}-\varepsilon>1$ (тогда интеграл от “большей” функции $g(x)$ будет сходящимся). Имеем $0<\varepsilon<\frac{1}{3}$.

Следовательно, исходный интеграл **сходится**.

$$b)\ \int_2^{\infty}\frac{\ln x}{x}dx\ \Rightarrow\ g(x)=\frac{\ln x}{x}\ge\frac{\ln 2}{x}=f(x)\ \Rightarrow\ p=1.$$

Найдена “меньшая” функция $f(x)$, интеграл от которой расходится.

Следовательно, исходный интеграл **расходится**.

$$c)\ \int_2^{\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}dx\ \Rightarrow\ g(x)=\frac{\ln x}{x^{\frac{1}{3}}}\ge\frac{\ln 2}{x^{\frac{1}{3}}}=f(x)\ \Rightarrow\ p=\frac{1}{3}<1.$$

Найдена “меньшая” функция $f(x)$, интеграл от которой расходится.

Следовательно, исходный интеграл **расходится**.

№ 41.6.

$$a)\ \int_2^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}\ln x}dx\ \Rightarrow\ f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}\ln x}\le\frac{1}{x^{\frac{4}{3}}\ln 2}=g(x)\ \Rightarrow\ p=\frac{4}{3}>1.$$

Найдена “большая” функция $g(x)$, интеграл от которой сходится.

Следовательно, исходный интеграл **сходится**.

$$c)\ \int_2^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x}\,\ln x}dx\ \Rightarrow\ g(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}\,\ln x}=\frac{x^{\varepsilon}}{\ln x}\frac{1}{\sqrt[3]{x}\,x^{\varepsilon}}\ge\frac{1}{const}\frac{1}{x^{\frac{1}{3}+\varepsilon}}=f(x)\ \Rightarrow\ p=\frac{1}{3}+\varepsilon.$$

Попробуем подобрать $\varepsilon>0$ так, чтобы $p=\frac{1}{3}+\varepsilon\le1$ (тогда интеграл от “меньшей” функции $f(x)$ будет расходящимся). Имеем $0<\varepsilon\le\frac{2}{3}$.

Следовательно, исходный интеграл **расходится**.

$$b)\quad \int_2^{\infty} \frac{1}{x\ln x}dx$$

Имеем:

$$f(x)=\frac{1}{x\ln x}\le\frac{1}{x\ln 2}=g(x)\quad\Rightarrow\quad p=1.$$

Найдена "большая" функция $g(x)$, интеграл от которой расходится, что бесполезно.

По другому:

$$g(x)=\frac{1}{x\ln x}=\frac{x^{\varepsilon}}{\ln x}\frac{1}{x\cdot x^{\varepsilon}}\ge\frac{1}{const}\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}=f(x)\quad\Rightarrow\quad p=1+\varepsilon>1.$$

Теперь найдена "меньшая" функция $f(x)$, интеграл от которой сходится, что также бесполезно.

Попробуем найти интеграл "непосредственно":

$$\int_2^{\infty}\frac{1}{x\ln x}dx=\int_2^{\infty}\frac{1}{\ln x}d\ln x=\ln\ln x\ \Big|_2^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\ln\ln x-\ln\ln 2=\infty.$$

Следовательно, исходный интеграл **расходится**.

№ 41.7.

$$\int_1^{\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{e^x}dx\quad\Rightarrow\quad f(x)=\frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{e^x}\underset{x\to\infty}{\sim}\frac{\sqrt[3]{x^2}}{e^x}=\frac{x^{\varepsilon}}{e^x}\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\varepsilon}}\le const\frac{1}{x^{\varepsilon-\frac{2}{3}}},\quad p=\varepsilon-\frac{2}{3}.$$

Попробуем подобрать $\varepsilon>0$ так, чтобы $p=\varepsilon-\dfrac{2}{3}>1$ (тогда интеграл от "большей" функции будет сходящимся). Имеем $\varepsilon>\dfrac{5}{3}$. Следовательно, исходный интеграл **сходится**.

№ 41.8.

$$\int_0^1\frac{\sin\sqrt{x}}{\ln(1+x)}dx$$

Подынтегральная функция имеет особенность на конце $a=0$ интервала $[a,b]=[0,1]$. Имеем:

$$f(x)=\frac{\sin\sqrt{x}}{\ln(1+x)}\underset{x\to0}{\sim}\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}=g(x),\quad p=\frac{1}{2}<1\quad\Rightarrow\quad \textbf{сходится}.$$

№ 41.10.

$$\int_0^1\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{x^2-x}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{x^2-x}dx+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{x^2-x}dx.$$

Подынтегральная функция имеет особенности на обоих концах $a=0$ и $b=1$ интервала $[a,b]=[0,1]$. Разобьем интеграл в сумму двух и исследуем каждый отдельно. Имеем:

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{x^2-x}dx\quad\Rightarrow\quad f(x)=\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{x^2-x}\underset{x\to0}{\sim}\frac{\sqrt{x}}{-x}=-\frac{1}{-x^{\frac{1}{2}}},\quad p=\frac{1}{2}<1\quad\Rightarrow\quad\text{сходится.}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{x^2-x}dx\quad\Rightarrow\quad f(x)=\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{x^2-x}=\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{x(x-1)}\underset{x\to1}{\sim}\frac{\operatorname{arctg}1}{1\cdot(x-1)}=\frac{\frac{\pi}{4}}{(x-1)},\quad p=1\quad\Rightarrow\quad\text{расходится.}$$

Следовательно, исходный интеграл **расходится**.

В следующих примерах демонстрируется применение признака сравнения для интегралов от неограниченной функции в общей форме. Отметим, что:

$$\lim_{x\to+0} x^{\varepsilon}\ln x = \left[x=\frac{1}{y}\Rightarrow\frac{1}{x}=y\to+\infty\right] = \lim_{y\to+\infty}\frac{1}{y^{\varepsilon}}\ln\frac{1}{y} = \lim_{y\to+\infty}\frac{-\ln y}{y^{\varepsilon}} = 0 \quad (\varepsilon>0).$$

Отсюда, в частности, вытекает, что при достаточно малых значениях $x\in(0,a]$ имеет место оценка:

$$\left|x^{\varepsilon}\ln x\right| \le const \quad (\varepsilon>0)$$

№ 41.11.

$$a)\ \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx \quad\Rightarrow\quad |f(x)| = \frac{|\ln x|}{\sqrt{x}} = \frac{|\ln x|}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{x^{\varepsilon}|\ln x|}{x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} \le const\,\frac{1}{x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} = g(x) \quad\Rightarrow\quad p=\frac{1}{2}+\varepsilon.$$

Попробуем подобрать $\varepsilon>0$ так, чтобы $p=\frac{1}{2}+\varepsilon<1$ (тогда интеграл от “большей” функции $g(x)$ будет сходящимся). Имеем $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$.

Следовательно, исходный интеграл **сходится**.

$$b)\ \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\ln x}dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}\ln x}dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{x}\ln x}dx.$$

Подынтегральная функция имеет особенности на обоих концах $a=0$ и $b=1$ интервала $[a,b]=[0,1]$. Разобьем интеграл в сумму двух и исследуем каждый отдельно. Имеем:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}\ln x}dx \quad\Rightarrow\quad |f(x)| = \frac{1}{\sqrt{x}|\ln x|} \le \frac{1}{\sqrt{x}\left|\ln\frac{1}{2}\right|} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}\ln 2} = g(x), \quad p=\frac{1}{2}<1 \quad\Rightarrow\quad \text{сходится.}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{x}\ln x}dx \quad\Rightarrow\quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}\ln x} = \frac{1}{\sqrt{x}\ln((x-1)+1)} \underset{x\to1}{\sim} \frac{1}{1\cdot(x-1)} = \frac{1}{(x-1)}, \quad p=1 \quad\Rightarrow\quad \text{расходится.}$$

Следовательно, исходный интеграл **расходится**.

№ 41.12.

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{x^4}}dx = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{x^4}}dx + \int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{x^4}}dx.$$

Разбив интеграл в сумму двух, исследуем каждый отдельно. Имеем:

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{x^4}}dx \quad\Rightarrow\quad f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{x^4}} \underset{x\to+0}{\sim} \frac{x}{x^{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}, \quad p=\frac{1}{3}<1 \quad\Rightarrow\quad \text{сходится.}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{x^4}}dx \quad\Rightarrow\quad f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{x^4}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{\pi}{2}}{x^{\frac{4}{3}}}, \quad p=\frac{4}{3}>1 \quad\Rightarrow\quad \text{сходится.}$$

Следовательно, исходный интеграл **сходится**.

42. Числовые ряды. Признаки сравнения

Условия.

Выяснить сходимость рядов.

№ 42.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^3+2n+1}$

№ 42.2. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2-1}$

№ 42.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg} n}{\sqrt[3]{n^2+1}}$

№ 42.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{n}}{\sqrt[3]{n^2+1}}$

№ 42.5.

$a)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^4}},\ b)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n},\ c)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n}}$

№ 42.6.

$a)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}\ln n},\ b)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n},\ c)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}\ \ln n}$

№ 42.7. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+1}}{e^n}$

№ 42.8. $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)$

№ 42.9. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n+1}{3n-1}$

№ 42.10. $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}\right)$

№ 42.11. $\sum_{n=2}^{\infty}\sin\frac{1}{2^n}$

№ 42.12. $\sum_{n=2}^{\infty}4^n\ \operatorname{arctg}\frac{1}{3^n}$

№ 42.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^4+2n^2+1}$

№ 42.2. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n^4}}{n^2-1}$

№ 42.3. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg} n^2}{\sqrt[3]{n^4+1}}$

№ 42.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{n}}{\sqrt[3]{n+1}}$

№ 42.5.

$a)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{\sqrt[5]{n^7}},\ b)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{n},\ c)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{\sqrt[5]{n^4}}$

№ 42.6.

$a)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n^7}\ln^2 n},\ b)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n},c)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n^4}\ln^2 n}$

№ 42.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^5+1}}{e^n}$

№ 42.8. $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n-1}\right)$

№ 42.9. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{1000n-1}$

№ 42.10. $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sqrt{n^3+n^2}-\sqrt{n^3-n^2}\right)$

№ 42.11. $\sum_{n=2}^{\infty}\arcsin\frac{1}{4^n}$

№ 42.12. $\sum_{n=2}^{\infty}\sqrt{5^n}\ \operatorname{tg}\frac{1}{2^n}$

Теория.

Числовым рядом с общим членом a_k $(k=0,\ 1,\ 2,...\infty)$ *называется последовательность частичных сумм*

$$S_n=a_0+a_1+a_2+...+a_k+...+a_n=\sum_{k=0}^{n}a_k\quad(n=0,\ 1,\ 2,...\ \infty),$$

обозначаемая $\sum_{k=0}^{\infty}a_k$.

Если предел последовательности частичных сумм

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}a_k=\sum_{k=0}^{\infty}a_k=S,$$

существует и конечен, ряд $\sum_{k=0}^{\infty}a_k$ *называется* ***сходящимся*** *(соответственно, если предел не существует или бесконечен, ряд называется* ***расходящимся****).*

В случае неотрицательных слагаемых $a_n \ge 0$ имеются простые признаки сходимости рядов, позволяющие выяснить сходимость опосредовано (т.е. без нахождения точного значения суммы S).

Теорема. *(Признак сравнения в общей форме).*

Пусть:

1) $0 \le a_n \le b_n$

$\Rightarrow$

1) если "больший" ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \Rightarrow$ *"меньший" ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ ***(сходится);***

если "меньший" ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \Rightarrow$ *"больший" ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$ *(**расходится**).*

Теорема. *(Признак сравнения в предельной форме).*

Пусть:

1) $a_n \underset{n\to\infty}{\sim} b_n$

$\Rightarrow$

1) ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ***сходятся*** *или* ***расходятся одновременно***.

В качестве "эталонных" рядов, с которыми чаще всего приходится сравнивать другие ряды, отметим следующие:

Гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \left[\begin{array}{ll} p \le 1, & расх \\ p > 1, & сх \end{array}\right.$$

Геометрическая прогрессия

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \left[\begin{array}{ll} q < 1, & сх \\ q \ge 1, & расх \end{array}\right.$$

Теорема. *(Интегральный признак).*

Пусть:

1) $f(x) \underset{x\to+\infty}{\searrow} 0$

$\Rightarrow$

1) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ *и интеграл* $\int_1^{\infty} f(x)dx$ ***сходятся*** *или* ***расходятся одновременно***.

Решения.

№ 42.1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3+2n+1} \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{n+1}{n^3+2n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2} \quad \Rightarrow \quad p = 2 > 1 \quad \Rightarrow \quad \textbf{сходится}.$$

№ 42.2.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2-1} \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2-1} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \quad \Rightarrow \quad p = \frac{3}{2} > 1 \quad \Rightarrow \quad \textbf{сходится}.$$

№ 42.3.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{\sqrt[3]{n^2+1}} \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{\operatorname{arctg} n}{\sqrt[3]{n^2+1}} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\frac{\pi}{2}}{n^{\frac{3}{2}}} \quad \Rightarrow \quad p = \frac{3}{2} < 1 \quad \Rightarrow \quad \textbf{расходится}.$$

№ 42.4.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{n}}{\sqrt[3]{n^2+1}} \quad\Rightarrow\quad a_n=\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{n}}{\sqrt[3]{n^2+1}} \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{n}}{n^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}} \quad\Rightarrow\quad p=\frac{5}{2}>1 \quad\Rightarrow\quad \textbf{сходится}.$$

В следующих примерах демонстрируется применение признака сравнения в общей форме. Полезно вспомнить, что:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n^{\varepsilon}}=0,\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{n^{\varepsilon}}{e^{n}}=0 \quad (\varepsilon>0).$$

Отсюда, в частности, вытекает, что при достаточно больших значениях n имеют место оценки:

$$\frac{\ln n}{n^{\varepsilon}}\le const,\quad \frac{n^{\varepsilon}}{e^{n}}\le const \quad (\varepsilon>0)$$

№ 42.5.

$a)$ $$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^4}} \quad\Rightarrow\quad a_n=\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^4}}=\frac{\ln n}{n^{\frac{4}{3}}}=\frac{\ln n}{n^{\varepsilon}}\frac{n^{\varepsilon}}{n^{\frac{4}{3}}}\le const\frac{1}{n^{\frac{4}{3}-\varepsilon}}=b_n \quad\Rightarrow\quad p=\frac{4}{3}-\varepsilon.$$

Попробуем подобрать $\varepsilon>0$ так, чтобы $p=\frac{4}{3}-\varepsilon>1$ (тогда ряд из "больших" слагаемых b_n будет сходящимся). Имеем $0<\varepsilon<\frac{1}{3}$.

Следовательно, исходный ряд **сходится**.

$b)$ $$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n} \quad\Rightarrow\quad b_n=\frac{\ln n}{n}\ge\frac{\ln 2}{n}=a_n \quad\Rightarrow\quad p=1.$$

Найдены "меньшие" слагаемые a_n, ряд из которых расходится. Следовательно, исходный ряд **расходится**.

$c)$ $$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n}} \quad\Rightarrow\quad b_n=\frac{\ln n}{n^{\frac{1}{3}}}\ge\frac{\ln 2}{n^{\frac{1}{3}}}=a_n \quad\Rightarrow\quad p=\frac{1}{3}<1.$$

Найдены "меньшие" слагаемые a_n, ряд из которых расходится.
Следовательно, исходный ряд **расходится**.

№ 42.6.

$a)$ $$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}\ln n} \quad\Rightarrow\quad a_n=\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}\ln n}\le\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}\ln 2}=b_n \quad\Rightarrow\quad p=\frac{4}{3}>1$$

Найдены "большие" слагаемые b_n, ряд из которых сходится.
Следовательно, исходный ряд **сходится**.

$c)$ $$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}\,\ln n} \quad\Rightarrow\quad b_n=\frac{1}{\sqrt[3]{n}\,\ln n}=\frac{n^{\varepsilon}}{\ln n}\frac{1}{\sqrt[3]{n}\,n^{\varepsilon}}\ge\frac{1}{const}\frac{1}{n^{\frac{1}{3}+\varepsilon}}=a_n \quad\Rightarrow\quad p=\frac{1}{3}+\varepsilon.$$

Попробуем подобрать $\varepsilon>0$ так, чтобы $p=\frac{1}{3}+\varepsilon\le 1$ (тогда ряд из "меньших" слагаемых a_n будет расходящимся). Имеем $0<\varepsilon\le\frac{2}{3}$.

Следовательно, исходный ряд **расходится**.

$b)\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$

Имеем:

$a_n=\frac{1}{n\ln n}\le\frac{1}{n\ln 2}=b_n \quad\Rightarrow\quad p=1.$

Найдены “большие” слагаемые b_n, ряд из которых расходится, что бесполезно. По другому:

$b_n=\frac{1}{n\ln n}=\frac{n^{\varepsilon}}{\ln n}\frac{1}{n\cdot n^{\varepsilon}}\ge\frac{1}{const}\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}=a_n \quad\Rightarrow\quad p=1+\varepsilon>1.$

Теперь найдены “меньшие” слагаемые a_n, ряд из которых сходится, что также бесполезно.

Попробуем применить интегральный признак:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n} \quad\Rightarrow\quad a_n=\frac{1}{n\ln n} \quad\Rightarrow\quad f(x)=\frac{1}{x\ln x}\underset{x\to+\infty}{\searrow}0 \quad\Rightarrow$$

$$\int_2^{\infty}\frac{1}{x\ln x}dx=\int_2^{\infty}\frac{1}{\ln x}d\ln x=\ln\ln x\,\Big|_2^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\ln\ln x-\ln\ln 2=\infty \quad\Rightarrow\quad \textbf{расходится}.$$

№ 42.7.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+1}}{e^n} \quad\Rightarrow\quad a_n=\frac{\sqrt[3]{n^2+1}}{e^n}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{\sqrt[3]{n^2}}{e^n}=\frac{n^{\varepsilon}}{e^n}\frac{n^{\frac{2}{3}}}{n^{\varepsilon}}\le const\frac{1}{n^{\varepsilon-\frac{2}{3}}} \quad\Rightarrow\quad p=\varepsilon-\frac{2}{3}$$

Попробуем подобрать $\varepsilon>0$ так, чтобы $p=\varepsilon-\frac{2}{3}>1$ (тогда ряд из “больших” слагаемых будет сходящимся). Имеем $\varepsilon>\frac{5}{3}$.

Следовательно, исходный ряд **сходится**.

№ 42.8.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right) \Rightarrow a_n=\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}\sim\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\Rightarrow p=\frac{1}{2}\Rightarrow \textbf{расходится}.$$

№ 42.9.

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n+1}{3n-1} \quad\Rightarrow\quad a_n=\frac{2n+1}{3n-1}\underset{n\to\infty}{\to}\frac{2}{3}\ne 0 \Rightarrow$ ряд **расходится**, т.к. не выполнено необходимое условие.

№ 42.10.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}\right) \Rightarrow a_n=\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}=\frac{2n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}\underset{n\to\infty}{\to}1\ne 0 \Rightarrow \textbf{расходится.}$$

№ 42.11.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\sin\frac{1}{2^n} \quad\Rightarrow\quad a_n=\sin\frac{1}{2^n}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{1}{2^n}=\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad\Rightarrow\quad q=\frac{1}{2}<1 \quad\Rightarrow\quad \textbf{сходится}.$$

№ 42.12.

$$\sum_{n=2}^{\infty}4^n\ \mathrm{arctg}\frac{1}{3^n} \quad\Rightarrow\quad a_n=4^n\,\mathrm{arctg}\frac{1}{3^n}\underset{n\to\infty}{\sim}4^n\ \frac{1}{3^n}\le\left(\frac{4}{3}\right)^n \quad\Rightarrow\quad q=\frac{4}{3}>1 \quad\Rightarrow\quad \textbf{расходится}.$$

43. Числовые ряды. Признаки Даламбера, Коши, Лейбница

Условия.

Выяснить сходимость знакоположительных рядов.	
№ 43.1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$	**№ 43.1.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}$
№ 43.2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{(2n)!!}$	**№ 43.2.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{(2n+1)!!}$
№ 43.3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{3^n n!}$	**№ 43.3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{4^n n!}$
№ 43.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$	**№ 43.4.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^3}{3^n}$
№ 43.5. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$	**№ 43.5.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$
№ 43.6 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin^n\frac{1}{n}$	**№ 43.6.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^n n}$
№ 43.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$	**№ 43.7.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{3^n}$
№ 43.8. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2}$	**№ 43.8.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2+2}\right)^{n^3}$
Выяснить сходимость знакочередующихся рядов. Уточнить характер сходимости (абсолютно или условно)	
№ 43.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$	**№ 43.9.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$
№ 43.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$	**№ 43.10.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^3}}$
№ 43.11. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^4}\ln n}$	**№ 43.11.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n^7}\ln^2 n}$
Выяснить абсолютную сходимость знаконепостоянных рядов.	
№ 43.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\alpha n}{n^2}$	**№ 43.12.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n^{\alpha}}{n^3}$
Рассмотрев соответствующий ряд, доказать, что	
№ 43.13. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$	**№ 43.13.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{a^{n!}}=0$
№ 43.14. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n!)^n}{n^{n^2}}=0$	**№ 43.14.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}=0$

Теория.

Теорема.

Пусть *(признак Даламбера)* *(признак Коши)*

1) $a_n \ge 0$ *и* $\exists\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$ $\exists\ \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$

$\Rightarrow$

1) $$q=\left[\begin{array}{ll}<1, & сх\\ =1, & ?\\ >1, & расх\end{array}\right.$$

Замечание. *Признак Даламбера удобно применять в случае, когда в составе* a_n *имеется* $(...)!$ *факториал, а признак Коши в случае, когда* a_n *имеет вид* $(...)^{n\ \underline{ой}}$ *степени.*

Теорема. *(Признак Лейбница).*

Пусть:

1) ряд $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n \quad (a_n \geq 0)$ *- знакочередующийся, причем* $a_n \searrow 0$

$\Rightarrow$

1) ряд сходится.

Если ***сходится*** *не только ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, *но и* ***сходится*** *ряд из "модулей"* $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$, *то исходный ряд называется* ***абсолютно сходящимся***. *Сумма абсолютно сходящегося ряда не зависит от порядка слагаемых.*

Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ***сходится,*** *но ряд из "модулей"* $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$ ***расходится***, *то исходный ряд называется* ***условно сходящимся***. *Сумму условно сходящегося ряда путем перестановки слагаемых можно сделать равной любому числу.*

Теорема. *(Об абсолютной сходимости).*

Пусть:

1) ряд $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$ *-* ***сходится***

$\Rightarrow$

1) ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *-* ***сходится***.

Решения.

№ 43.1.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} \quad \Rightarrow \quad a_n=\frac{1}{n!}, \quad a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}=\frac{1}{n!(n+1)}=a_n\frac{1}{(n+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{(n+1)} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)}=0=q<1 \quad \Rightarrow \quad \textbf{сходится}.$$

№ 43.2.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{(2n)!!} \Rightarrow a_n=\frac{n!}{(2n)!!}, \quad a_{n+1}=\frac{(n+1)!}{(2(n+1))!!}=\frac{(n+1)!}{(2n+2))!!}=\frac{n!(n+1)}{(2n)!!(2n+2)}=a_n\frac{(n+1)}{(2n+2)}$$

$$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)}{(2n+2)} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{(2n+2)}=\frac{1}{2}=q<1 \quad \Rightarrow \quad \textbf{сходится}.$$

№ 43.3.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{3^n n!} \Rightarrow a_n=\frac{(2n+1)!!}{3^n n!}, \quad a_{n+1}=\frac{(2(n+1)+1)!!}{3^{n+1}(n+1)!}=\frac{(2n+3)!!}{3^{n+1}(n+1)!}=\frac{(2n+1)!!\,(2n+3)}{3^n\ 3\ n!\,(n+1)}=a_n\frac{(2n+3)}{3(n+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(2n+3)}{3(n+1)} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)}{3(n+1)}=\frac{2}{3}=q<1 \quad \Rightarrow \quad \textbf{сходится}.$$

№ 43.4.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n} \quad\Rightarrow\quad a_n=\frac{n^2}{2^n},\ a_{n+1}=\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}$$

$$\Rightarrow\ \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}\frac{2^n}{n^2}\ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2 2}=\frac{1}{2}=q<1\quad\Rightarrow\quad \textbf{сходится}.$$

Сравнить:

$$\Rightarrow\ \sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}}\ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}}=\frac{1}{2}=q<1\ \Rightarrow \textbf{сходится}.$$

Здесь воспользовались известным пределом:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}\ln n}=\left[\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0\right]=e^0=1.$$

№ 43.5.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}\ \Rightarrow\ a_n=\frac{(2n)!}{(n!)^2},\ a_{n+1}=\frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2}=\frac{(2n+2)!}{(n!(n+1))^2}=a_n\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}$$

$$\Rightarrow\ \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}\ \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}=4=q>1\Rightarrow \textbf{расходится}.$$

№ 43.6

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin^n\frac{1}{n}\ \Rightarrow\ a_n=\sin^n\frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow\ \sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{\sin^n\frac{1}{n}}=\sin\frac{1}{n}\ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{n}=0=q<1\quad\Rightarrow\ \textbf{сходится}.$$

№ 43.7.

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\ \Rightarrow\ a_n=2^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}=2^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n\cdot n}=\left(2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right)^n$$

$$\Rightarrow\ \sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{\left(2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right)^n}=2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}2\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{2}{e}=q<1\quad\Rightarrow\ \textbf{сходится}.$$

№ 43.8.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2}\ \Rightarrow\ a_n=\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n\cdot n}=\left(\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n\right)^n$$

$$\Rightarrow\ \sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{\left(\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n\right)^n}=\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n\ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}e^{n\ln\left(\frac{n-1}{n+1}\right)}=$$

$$=\left[\lim_{n\to\infty}n\ln\left(\frac{n-1}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}n\ln\left(\left(\frac{n-1}{n+1}-1\right)+1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{n-1}{n+1}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{-2n}{n+1}=-2\right]=e^{-2}=q<1\Rightarrow \textbf{сходится}$$

№ 43.9.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad\Rightarrow\quad a_n=\frac{1}{n}\searrow 0 \quad\Rightarrow\quad \textbf{сходится}.$$

Уточним характер сходимости (абсолютно или условно). Рассмотрим ряд из “модулей”

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \quad\Rightarrow\quad a_n=\frac{1}{n} \quad\Rightarrow\quad p=1 \quad\Rightarrow\quad \textbf{расходится}.$$

Следовательно, данный ряд сходится **условно**.

Замечание. Сумма условно сходящегося ряда

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}+\ldots$$

зависит от порядка суммирования слагаемых. Например:

$$R=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\frac{1}{7}-\frac{1}{14}-\frac{1}{16}+\ldots=$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)-\frac{1}{12}+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{14}\right)-\frac{1}{16}+\ldots=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\frac{1}{14}-\frac{1}{16}+\ldots=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\ldots\right)=\frac{1}{2}S.$$

№ 43.10.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n^2} \quad\Rightarrow\quad a_n=\frac{1}{n^2}\searrow 0 \quad\Rightarrow\quad \textbf{сходится}.$$

Уточним характер сходимости (абсолютно или условно). Рассмотрим ряд из “модулей”

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \quad\Rightarrow\quad a_n=\frac{1}{n^2} \quad\Rightarrow\quad p=2 \quad\Rightarrow\quad \textbf{сходится}.$$

Следовательно, данный ряд сходится **абсолютно**. Его сумма не зависит от порядка суммирования слагаемых.

Замечание. Из сходимости ряда из “модулей” вытекает сходимость исходного ряда, так что в данном случае непосредственно проверять сходимость исходного ряда, применяя признак Лейбница, было излишне.

№ 43.11.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{\sqrt[3]{n^4}\ln n}$$

Рассмотрим сразу ряд из “модулей”:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}\ln n} \quad\Rightarrow\quad a_n=\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}\ln n}\le\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}\ln 2}=b_n \quad\Rightarrow\quad p=\frac{4}{3}>1 \quad\Rightarrow\quad \textbf{сходится}.$$

Ряд из “модулей” сходится (по признаку сравнения в общей форме). Следовательно, исходный ряд также **сходится** (причем, **абсолютно**).

№ 43.12.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\alpha n}{n^2}$$

Рассмотрим ряд из “модулей”:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos\alpha n|}{n^2} \quad\Rightarrow\quad a_n=\frac{|\cos\alpha n|}{n^2}\le\frac{1}{n^2}=b_n \quad\Rightarrow\quad p=2>1 \quad\Rightarrow\quad \textbf{сходится}.$$

Ряд из “модулей” сходится (по признаку сравнения в общей форме). Следовательно, исходный ряд также **сходится** (причем, **абсолютно**).

№ 43.13.

Рассмотрим вспомогательный ряд:

$$\sum^{\infty}\frac{a^n}{n!}\quad\Rightarrow\quad u_n=\frac{a^n}{n!},\quad u_{n+1}=\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{a^n a}{n!(n+1)}=u_n\,\frac{a}{(n+1)}=\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{a}{(n+1)}\ \Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{(n+1)}=0=q<1\quad\Rightarrow\quad \text{сходится.}$$

Из сходимости ряда $\sum^{\infty}u_n$ вытекает выполнение необходимого условия его сходимости:

$$\lim_{n\to\infty}u_n=0\quad\Rightarrow\quad\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0\ .$$

№ 43.14.

Рассмотрим вспомогательный ряд:

$$\sum^{\infty}\frac{(n!)^n}{n^{n^2}}\quad\Rightarrow\quad u_n=\frac{(n!)^n}{n^{n^2}}=\frac{(n!)^n}{n^{n\cdot n}}=\left(\frac{n!}{n^n}\right)^n\qquad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \sqrt[n]{u_n}=\sqrt[n]{\left(\frac{n!}{n^n}\right)^n}=\frac{n!}{n^n}\quad\Rightarrow\quad\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=?$$

Рассмотрим еще один вспомогательный ряд:

$$\sum^{\infty}\frac{n!}{n^n}\qquad\Rightarrow\quad v_n=\frac{n!}{n^n},\quad v_{n+1}=\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}=\frac{n!}{(n+1)^n}\qquad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{v_{n+1}}{v_n}=\ \frac{n!}{(n+1)^n}\,\frac{n^n}{n!}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}\frac{v_{n+1}}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}<1\quad\Rightarrow\quad\text{сходится.}$$

Из сходимости ряда $\sum^{\infty}v_n$ вытекает выполнение необходимого условия его сходимости:

$$\lim_{n\to\infty}v_n=0\quad\Rightarrow\quad\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=0<1.$$

В свою очередь, это означает сходимость ряда $\sum^{\infty}u_n$, а значит, необходимое условие его сходимости:

$$\lim_{n\to\infty}u_n=0\quad\Rightarrow\quad\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^n}{n^{n^2}}=0.$$

44. Степенные ряды. Ряды Тейлора

Условия.

Найти область сходимости степенных рядов.	
№ 44.1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n^2+1}$	**№ 44.1.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n^3+1}}$
№ 44.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n n}$	**№ 44.2.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n\sqrt{n}}$
№ 44.3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{3^n}$	**№ 44.3.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{4^n}$
№ 44.4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(2n+1)!!}$	**№ 44.4.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(2n)!!}$
№ 44.5. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\ln^n n\, x^n$	**№ 44.5.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^{n^2}\, x^n$
Найти суммы степенных рядов	
№ 44.6. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$	**№ 44.6.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n-1}$
№ 44.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$	**№ 44.7.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+2)x^n$
Найти сумму числового ряда.	
№ 44.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$	**№ 44.8.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$
Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=0$	
№ 44.9. $f(x)=\frac{5}{x^2+x-6}$	**№ 44.9.** $f(x)=\frac{5}{x^2-3x-4}$
№ 44.10. $f(x)=\operatorname{ch} x$	**№ 44.10.** $f(x)=\operatorname{sh} x$
№ 44.11. $f(x)=\operatorname{arctg} x$	**№ 44.11.** $f(x)=\arcsin x$
Разложив подынтегральную функцию в степенной ряд, найти интеграл с точностью $\varepsilon=0,001$	
№ 44.12. $\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx$	**№ 44.12.** $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$

Теория.

Для каждого степенного ряда

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

существует некоторый интервал $(-R,+R)$, *внутри которого ряд сходится (причем абсолютно), а вне интервала ряд расходится (на концах интервала* $x=\pm R$ *поведение ряда может быть произвольным и требует отдельного исследования).*

Для радиуса сходимости R *имеют место формулы:*

Теорема.

Пусть *(формула Даламбера)* *(формула Коши)*

1) $\exists\ \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=q$ $\qquad\exists\ \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=q$

$\Rightarrow$

1) $R=\frac{1}{q}$

Степенной ряд можно почленно дифференцировать и интегрировать внутри интервала сходимости

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{d}{dx} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} \qquad \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n+1}$$

Коэффициенты a_n *можно выразить через сумму степенного ряда* $S(x)$: $\quad a_n = \dfrac{S^{(n)}(0)}{n!}$.

Рядом Тейлора функции $f(x)$ *называется степенной ряд*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n .$$

Отметим наиболее употребительные разложения функций в ряд Тейлора:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \qquad (-\infty < x < +\infty),$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \qquad (-\infty < x < +\infty),$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \qquad (-\infty < x < +\infty),$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \ldots \qquad (-1 < x \le +1),$$

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{\alpha}^n x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \ldots \qquad (-1 < x < +1).$$

В частности, при $\alpha = -1, \quad x \to -x$ *получаем известную формулу суммы геометрической прогрессии:*

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots \qquad (-1 < x < +1).$$

Решения.

№ 44.1.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2+1} \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{1}{n^2+1}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2+1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(n+1)^2+1} \frac{n^2+1}{1} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2+2n+2} = 1 = q \quad \Rightarrow \quad R = \frac{1}{q} = 1$$

Ряд сходится внутри интервала $(-1, +1)$, расходится вне этого интервала. Проверим поведение ряда на концах:

$$x = -R = -1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2+1} \Bigg|_{x=-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n^2+1} \searrow 0 \quad \Rightarrow \quad \text{сходится;}$$

$$x = +R = +1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2+1} \Bigg|_{x=+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n^2+1} \sim \frac{1}{n^2} \quad \Rightarrow \quad p = 2 > 1 \quad \Rightarrow \quad \text{сходится.}$$

Замечание. Сходимость первого ряда, очевидно, следует из сходимости второго (ряда из “модулей”).

Итак, областью сходимости исходного степенного ряда является замкнутый интервал $[-1, +1]$.

№ 44.2.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n n} \quad\Rightarrow\quad a_n=\frac{1}{2^n n},\quad a_{n+1}=\frac{1}{2^{n+1}(n+1)} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2^{n+1}(n+1)}\frac{2^n n}{1} \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2(n+1)}=\frac{1}{2}=q \quad\Rightarrow\quad R=\frac{1}{q}=2.$$

Ряд сходится внутри интервала $(-2,+2)$, расходится вне этого интервала. Проверим поведение ряда на концах:

$$x=-R=-2 \quad\Rightarrow\quad \left.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n n}\right|_{x=-2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{2^n n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{n}\searrow 0 \quad\Rightarrow\quad \text{сходится;}$$

$$x=+R=+2 \quad\Rightarrow\quad \left.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n n}\right|_{x=+2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2^n n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \quad\Rightarrow\quad p=1 \quad\Rightarrow\quad \text{расходится.}$$

Итак, областью сходимости исходного степенного ряда является полуоткрытый интервал $[-2,+2)$.

№ 44.3.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{3^n} \quad\Rightarrow\quad a_m=\left[\begin{array}{ll}\frac{1}{3^n}, & m=2n\\ 0, & m=2n+1\end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad \lim_{m\to\infty}\left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right|=\cancel{\exists},\quad \lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{|a_m|}=\cancel{\exists}.$$

Воспользовавшись закономерностью в появлении только четных степеней $x^{2n}=\left(x^2\right)^n$, сделаем замену переменной $y=x^2$ и рассмотрим вспомогательный ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{3^n} \quad\Rightarrow\quad b_n=\frac{1}{3^n} \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|b_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{3^n}}=\frac{1}{3}=q \quad\Rightarrow\quad R=\frac{1}{q}=3.$$

Вспомогательный ряд сходится внутри интервала $(-3,+3)$, расходится вне этого интервала. Проверим поведение ряда на концах:

$$y=-R=-3 \quad\Rightarrow\quad \left.\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{3^n}\right|_{y=-3}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n}{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \quad\Rightarrow\quad (-1)^n\not\to 0 \quad\Rightarrow\quad \text{расходится;}$$

$$y=+R=+3 \quad\Rightarrow\quad \left.\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{3^n}\right|_{y=+3}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(+3)^n}{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}1 \quad\Rightarrow\quad 1\not\to 0 \quad\Rightarrow\quad \text{расходится;}$$

Итак, областью сходимости вспомогательного ряда является открытый интервал $(-3,+3)$. Следовательно,

$$-3<y<+3 \quad\Rightarrow\quad -3<x^2<+3 \quad\Rightarrow\quad x^2<+3 \quad\Rightarrow\quad -\sqrt{3}<x<+\sqrt{3}\quad ,$$

так что областью сходимости исходного ряда является открытый интервал $(-\sqrt{3},+\sqrt{3})$.

№ 44.4.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(2n+1)!!} \quad\Rightarrow\quad a_n=\frac{1}{(2n+1)!!},\quad a_{n+1}=\frac{1}{(2(n+1)+1)!!}=\frac{1}{(2n+3)!!}=a_n\frac{1}{(2n+3)} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{(2n+3)} \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+3)}=0=q \quad\Rightarrow\quad R=\frac{1}{q}=\frac{1}{0}=\infty.$$

Итак, областью сходимости исходного степенного ряда является вся ось $(-\infty,+\infty)$.

№ 44.5.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \ln^n n\, x^n \;\Rightarrow\; a_n = \ln^n n \;\Rightarrow\; \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\ln^n n} = \ln n \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \ln n = \infty = q \;\Rightarrow\; R = \frac{1}{q} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Итак, областью сходимости исходного степенного ряда является единственная точка $x_0 = 0$.

№ 44.6.

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$$

Нетрудно видеть, что область сходимости данного ряда полуоткрытый интервал $[-1,+1)$. Имеем:

$$S(x)\cdot x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}\cdot x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dx}\big(S(x)\cdot x\big) = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\frac{x^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \Rightarrow$$

$$S(x)\cdot x = \int_0^x \frac{d}{dt}\big(S(t)\cdot t\big)\,dt = \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = -\ln(1-t)\,\Big|_0^x = -\ln(1-x) \quad \Rightarrow$$

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = -\frac{\ln(1-x)}{x}, \quad x\in[-1,+1).$$

Замечание. Полагая, например, $x=-1$, $x=-\frac{1}{2}$, $x=+\frac{1}{3}$ и т.д., получим суммы некоторых числовых рядов:

$$S(-1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = -\frac{\ln(1-(-1))}{(-1)} \qquad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2,$$

$$S\left(-\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{n+1} = -\frac{\ln\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)}{\left(-\frac{1}{2}\right)} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)2^n} = 2\ln\frac{3}{2},$$

$$S\left(\frac{1}{3}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{n+1} = -\frac{\ln\left(1-\frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{1}{3}\right)} \qquad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)3^n} = -3\ln\frac{2}{3} = 3\ln\frac{3}{2}.$$

№ 44.7.

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n$$

Нетрудно видеть, что область сходимости данного ряда открытый интервал $(-1,+1)$. Имеем:

$$\frac{S(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n \cdot \frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \quad \Rightarrow$$

$$\int_0^x \frac{S(t)}{t}\,dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} n t^{n-1}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x n t^{n-1}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{t^n}{n}\Big|_0^x = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = x\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{S(x)}{x} = \frac{d}{dx}\int_0^x \frac{S(t)}{t}\,dt = \frac{d}{dx}\frac{x}{1-x} = \frac{(1-x)-x(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \Rightarrow$$

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad x\in(-1,+1)$$

Замечание. Полагая, например, $x=-\frac{1}{2}$, $x=+\frac{1}{3}$ и т.д., получим суммы некоторых числовых рядов:

$$S\left(-\frac{1}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty} n\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{2^n}=-\frac{2}{9},$$

$$S\left(\frac{1}{3}\right)=\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{\frac{1}{3}}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} \qquad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}=\frac{3}{4}.$$

№ 44.9.

$$f(x)=\frac{5}{x^2+x-6}=\frac{5}{(x-2)(x+3)}=\frac{1}{(x-2)}-\frac{1}{(x+3)}.$$

Учитывая, что:

$$\frac{1}{(x-2)}=-\frac{1}{2\left(1-\frac{x}{2}\right)}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}}, \quad -1<\frac{x}{2}<+1 \quad \Rightarrow \quad -2<x<+2,$$

$$\frac{1}{(x+3)}=\frac{1}{3\left(1-\left(-\frac{x}{3}\right)\right)}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{3^{n+1}}, \quad -1<-\frac{x}{3}<+1 \quad \Rightarrow \quad -3<x<+3,$$

получим:

$$f(x)=\frac{5}{x^2+x-6}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{3^{n+1}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n+1}+(-1)^n 2^{n+1}}{6^{n+1}}x^n, \quad -2<x<+2.$$

№ 44.10.

$$f(x)=\operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(1+(-1)^n\right)x^n}{n!}$$

Замечая, что

$$a_n=\frac{\left(1+(-1)^n\right)}{2\cdot n!}=\left[\begin{array}{ll} 0, & n=2m+1 \\ \frac{1}{(2m)!}, & n=2m \end{array}\right.,$$

получим:

$$\operatorname{ch} x=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{2m}}{(2m)!}, \quad x\in(-\infty,+\infty)$$

№ 44.11.

$$f(x)=\operatorname{arctg} x \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx} f(x)=\frac{d}{dx}\operatorname{arctg} x=\frac{1}{1+x^2}.$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1-\left(-x^2\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-x^2\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}, \quad -1<\left(-x^2\right)<+1 \quad \Rightarrow \quad -1<x<+1,$$

получим:

$$\operatorname{arctg} x=\int_0^x \frac{d}{dt}\operatorname{arctg} t dt=\int_0^x \frac{1}{1+x^2}dt=\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x t^{2n}dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}, \ -1<x<+1.$$

Очевидно, на обоих концах $x=\pm 1$ ряд сходится. Итак,

$$\operatorname{arctg} x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}, \qquad -1\le x\le +1.$$

Замечание. Полагая, например, $x=1$, получим сумму некоторого числового ряда, позволяющего, в частности, приближенно найти число π:

$$\operatorname{arctg} 1=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)} \quad \Rightarrow \quad \pi=4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}.$$

№ 44.12.

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx=\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-x^2\right)^n}{n!}dx=\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 x^{2n}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left.\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right|_0^1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}=$$

$$=1-\frac{1}{1!(2\cdot1+1)}+\frac{1}{2!(2\cdot2+1)}-\frac{1}{3!(2\cdot3+1)}+\frac{1}{4!(2\cdot4+1)}-\frac{1}{5!(2\cdot5+1)}+\ldots=$$

$$=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{10}-\frac{1}{42}+\frac{1}{216}-\frac{1}{1320}+\ldots=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{10}-\frac{1}{42}+\frac{1}{216}-\ldots\approx 0.747$$

Замечание. При определении числа слагаемых, которое достаточно взять для достижения заданной точности, воспользуемся тем, что для знакочередующегося ряда имеет место оценка

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n \quad (a_n \searrow 0) \quad \Rightarrow \quad \left|S-S_n\right|\le a_{n+1}.$$

В данном случае, заданная точность $\varepsilon=0,001$ достигается, если взять первые пять слагаемых.

45. Ряды Фурье

Условия.

Разложить функцию в ряд Фурье на интервале $[-\pi,+\pi]$. Построить график суммы ряда Фурье. Полагая $x=0$, $x=\dfrac{\pi}{2}$, $x=\pi$, найти суммы получающихся числовых рядов.	
№ 45.1. $f(x)=x$	**№ 45.1.** $f(x)=1$
№ 45.2. $f(x)=\lvert x\rvert$	**№ 45.2.** $f(x)=\operatorname{sign} x$
№ 45.3. $f(x)=\left[\begin{array}{ll} 0, & -\pi\le x<0 \\ \pi-x, & 0\le x\le+\pi \end{array}\right.$	**№ 45.3.** $f(x)=\left[\begin{array}{ll} x+\pi, & -\pi\le x<0 \\ 0, & 0\le x\le+\pi \end{array}\right.$
№ 45.4. $f(x)=\sin\alpha x$	**№ 45.4.** $f(x)=\cos\alpha x$

Теория.

Если функция $y=f(x)$ *кусочно-непрерывно дифференцируемая в интервале длиной* 2π *(например,* $[-\pi,+\pi]$, $[0,2\pi]$, $[a,a+2\pi]$*), причем точки разрыва* x_0 *регулярны*

$$f(x_0)=\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2},$$

то ее можно представить рядом Фурье:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right),\qquad -\pi\le x\le+\pi$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\cos nx dx,\quad n=0,\ 1,\ 2,\ldots\qquad\qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\sin nx dx,\quad n=\ \ 1,\ 2,\ldots$$

Если дополнительно функция $y=f(x)$ $(-\pi\le x\le+\pi)$ *четная или нечетная, то ее ряд Фурье имеет соответственно только четную или нечетную составляющую:*

четная

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,\qquad -\pi\le x\le+\pi$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\pi}f(x)\cos nx dx,\qquad b_n=0.$$

нечетная

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx,\qquad -\pi\le x\le+\pi$$

$$a_n=0,\quad b_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\pi}f(x)\sin nx dx.$$

Отсюда вытекает возможность разлагать функцию, заданную только на интервале $[0,\pi]$*, в ряд по* Cos *или по* Sin*, представляющие собой ряды Фурье соответственно четного или нечетного продолжений функции на интервал* $[-\pi,0]$*:*

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx\ =\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx,\qquad\qquad 0<x<+\pi$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\pi}f(x)\cos nx dx,\qquad b_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\pi}f(x)\sin nx dx.$$

При нахождении коэффициентов ряда Фурье полезно помнить:

- интегралы от функций $\cos(\ldots)$, $\sin(\ldots)$ *по интервалу длины период (или несколько периодов) равны нулю:*

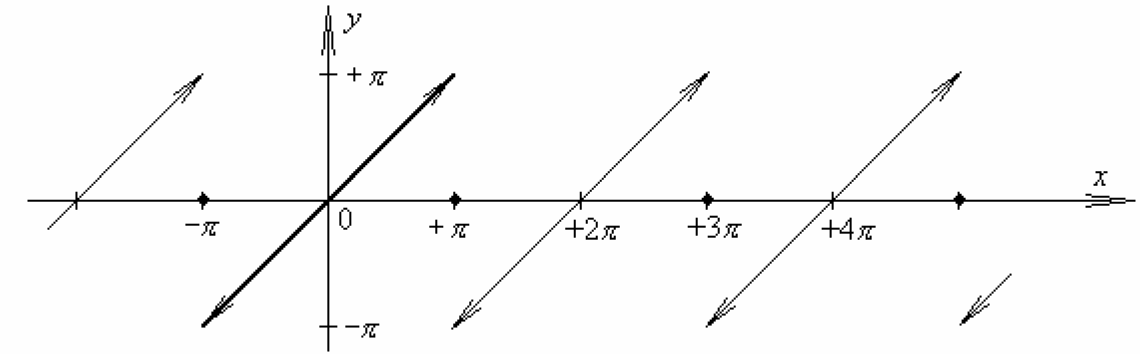
$$\int_{-\pi}^{+\pi}\cos nx dx=\int_{-\pi}^{+\pi}\sin nx dx=0;$$

$$\cos n\pi=(-1)^n,\quad \sin n\pi=0,\quad \cos n\frac{\pi}{2}=\left[\begin{array}{ll}(-1)^m, & n=2m\\ 0, & n=2m+1\end{array}\right.,\quad \sin n\frac{\pi}{2}=\left[\begin{array}{ll}0, & n=2m\\ (-1)^m, & n=2m+1\end{array}\right..$$

Решения.

№ 45.1.

График суммы ряда Фурье является $2\pi-$периодическим продолжением на всю ось графика данной функции $y = f(x) \quad (-\pi \le x \le +\pi)$, с регулярными точками разрыва.



Найдем коэффициенты ряда Фурье:

Функция $f(x) = x$ – нечетная на интервале $[-\pi,+\pi] \Rightarrow \quad a_n = 0.$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nxdx = -\frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi} xd\cos nx = -\frac{2}{\pi n}\left(x\cdot\cos nx \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\cos nxdx \right) =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\left(\pi\cdot\cos n\pi - \frac{1}{n}\sin nx \Big|_0^{\pi}\right) = -\frac{2}{\pi n}\left(\pi\cdot(-1)^n - 0\right) = -\frac{2}{n}(-1)^n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}.$$

Итак,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx, \qquad -\pi < x < +\pi .$$

Используя полученное разложение, с учетом вида графика суммы ряда Фурье, из которого видно к чему сходится ряд в точках разрыва, найдем суммы некоторых числовых рядов:

$x = 0 \quad \Rightarrow$

$$0 = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin n0 = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}0 = 0 \ ;$$

$x = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow$

$$\frac{\pi}{2} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin n\frac{\pi}{2} = 2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{2m+2}}{2m+1}\sin(2\mathrm{m}+1)\frac{\pi}{2} = 2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2m+1}(-1)^m \quad \Rightarrow \quad \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1} = \frac{\pi}{4};$$

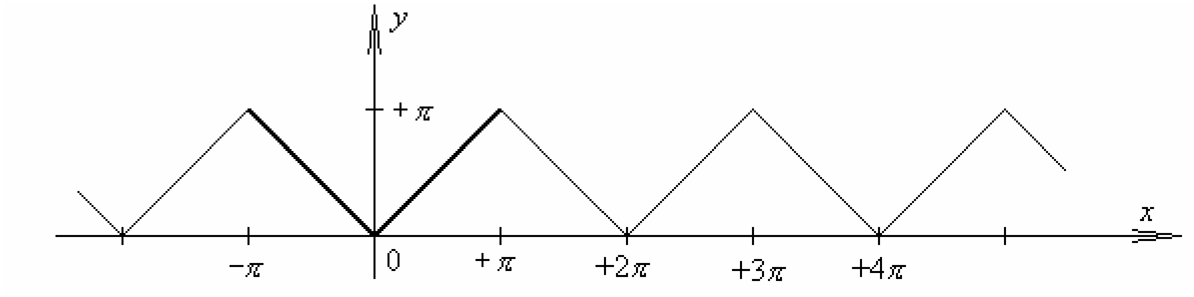
$x = \pi \quad \Rightarrow$

$$0 = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin n\pi = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}0 = 0.$$

Сравнить с **№ 40.11.**

№ 45.2.

График суммы ряда Фурье является периодическим продолжением на всю ось графика данной функции $y = f(x) \quad (-\pi \le x \le +\pi)$.



Найдем коэффициенты ряда Фурье:

Функция $f(x) = |x|$ – четная на интервале $[-\pi, +\pi] \quad \Rightarrow \quad b_n = 0$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xdx = \frac{2}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nxdx = \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi} xd\sin nx = \frac{2}{\pi n}\left(x\cdot\sin nx \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin nxdx \right) =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left(0 + \frac{1}{n}\cos nx \Big|_0^{\pi}\right) = \frac{2}{\pi n^2}(\cos\pi n - 1) = \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right) = \left[\begin{array}{ll} 0, & n = 2m \\ \dfrac{-4}{\pi(2m+1)^2}, & n = 2m+1 \end{array}\right.$$

.

Итак,

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}\cos(2m+1)x, \qquad -\pi \le x \le +\pi .$$

Используя полученное разложение, с учетом вида (непрерывности) графика суммы ряда Фурье, найдем суммы некоторых числовых рядов.

$x = 0 \quad \Rightarrow$

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}\cos(2m+1)0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{8};$$

$x = \dfrac{\pi}{2} \quad \Rightarrow$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}\cos(2m+1)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}0 = \frac{\pi}{2} ;$$

$x = \pi \quad \Rightarrow$

$$\pi = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}\cos(2m+1)\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

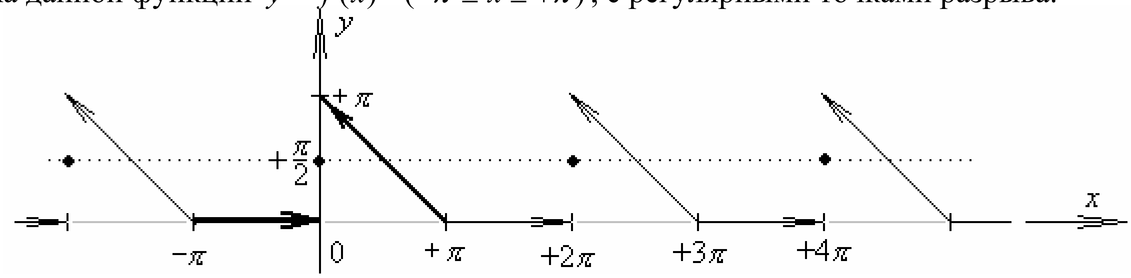
№ 45.3.

"Подправим" функцию, изменив ее в точке разрыва $x_0 = 0$ регулярным значением:

$$f(0) = f(x_0) = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} = \frac{\pi+0}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0 \\ \dfrac{\pi}{2}, & x = 0 \\ \pi - x, & 0 < x \le +\pi \end{cases}$$

График суммы ряда Фурье является 2π-периодическим продолжением на всю ось графика данной функции $y = f(x)$ $(-\pi \le x \le +\pi)$, с регулярными точками разрыва.



Найдем коэффициенты ряда Фурье. Функция $f(x)$ ни четная, ни нечетная.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\,dx = -\frac{1}{\pi}\frac{(\pi-x)^2}{2}\Bigg|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi n}\int_0^{\pi}(\pi-x)d\sin nx = \frac{1}{\pi n}\left((\pi-x)\cdot\sin nx \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\sin nx dx \right) =$$

$$= -\frac{1}{\pi n^2}\cos nx \Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{\pi n^2}(\cos n\pi - 1) = -\frac{1}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} 0, & n = 2m \\ \dfrac{2}{\pi(2m+1)^2}, & n = 2m+1 \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\sin nx dx = -\frac{1}{\pi n}\int_0^{\pi}(\pi-x)d\cos nx =$$

$$= -\frac{1}{\pi n}\left((\pi-x)\cos nx \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos nx dx \right) = -\frac{1}{\pi n}\left(-\pi + \frac{1}{n}\sin nx \Big|_0^{\pi}\right) = \frac{1}{n}$$

Итак,

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}\cos(2m+1)x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx, \qquad -\pi \le x \le +\pi .$$

Используя полученное разложение, с учетом вида графика суммы ряда Фурье, из которого видно к чему сходится ряд в точках разрыва, найдем суммы некоторых числовых рядов:

$x = 0 \quad \Rightarrow$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}\cos(2m+1)0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin n0 = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{8};$$

$x = \dfrac{\pi}{2} \quad \Rightarrow$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}\cos(2m+1)\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin n\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)} \quad \Rightarrow \quad \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)} = \frac{\pi}{4};$$

$x = \pi \quad \Rightarrow$

$$0 = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}\cos(2m+1)\pi + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin n\pi = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Замечание. Коэффициенты a_n, b_n можно найти “одновременно”:

$$\left[\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow \quad a_n - ib_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i\sin nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\,e^{-inx}dx = -\frac{1}{\pi in}\int_0^{\pi}(\pi - x)\,de^{-inx} = -\frac{1}{\pi in}\left((\pi - x)\cdot e^{-inx}\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^{-inx}dx \right) = -\frac{1}{\pi in}\left(-\pi - \frac{1}{in}e^{-inx}\Big|_0^{\pi}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\pi in}\left(-\pi - \frac{1}{in}\left(e^{-in\pi} - 1\right)\right) = -\frac{1}{\pi in}\left(-\pi - \frac{1}{in}(\cos n\pi - 1)\right) = -\frac{1}{\pi in}\left(-\pi - \frac{1}{in}\left((-1)^n - 1\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{in} - \frac{1}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right) = -\frac{1}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right) - i\frac{1}{n}$$

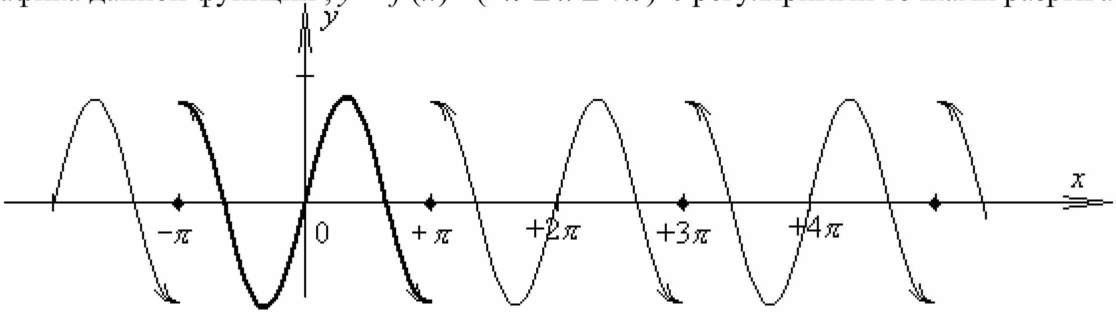
$$a_n - ib_n = -\frac{1}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right) - i\frac{1}{\pi n} \quad \Rightarrow \quad a_n = -\frac{1}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right) = \left[\begin{array}{ll} 0, & n = 2m \\ \dfrac{2}{\pi(2m+1)^2}, & n = 2m+1 \end{array}\right., \quad b_n = \frac{1}{n}$$

По существу найдены коэффициенты $c_n = \dfrac{a_n - ib_n}{2} = -\dfrac{1}{2\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right) - i\dfrac{1}{2n}$ ряда Фурье в комплексной форме:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(-\frac{1}{2\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right) - i\frac{1}{2n}\right)e^{inx} \quad (-\pi \le x \le +\pi).$$

№ 45.4.

График суммы ряда Фурье является 2π - периодическим продолжением на всю ось графика данной функции , $y = f(x)$ $(-\pi \le x \le +\pi)$ с регулярными точками разрыва.



Очевидно, если $\alpha = n$ – целое число, то “рядом” Фурье функции $f(x) = \sin nx$ является сама функция (т.е. все остальные слагаемые ряда равны нулю). Пусть $\alpha \ne n$ – нецелое. Найдем коэффициенты ряда Фурье.

Функция $f(x) = \sin\alpha x$ – нечетная на интервале $[-\pi, +\pi]$ $\Rightarrow$ $a_n = 0$.

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\alpha x\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\cos(\alpha - n)x - \cos(\alpha + n)x\right)dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(\alpha - n)x}{\alpha - n} - \frac{\sin(\alpha + n)x}{\alpha + n}\right)\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(\alpha - n)\pi}{\alpha - n} - \frac{\sin(\alpha + n)\pi}{\alpha + n}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin\alpha\pi\cos n\pi - \cos\alpha\pi\sin n\pi}{\alpha - n} - \frac{\sin\alpha\pi\cos n\pi + \cos\alpha\pi\sin n\pi}{\alpha + n}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin\alpha\pi(-1)^n}{\alpha - n} - \frac{\sin\alpha\pi(-1)^n}{\alpha + n}\right) = \frac{1}{\pi}\sin\alpha\pi(-1)^n\left(\frac{1}{\alpha - n} - \frac{1}{\alpha + n}\right) = \frac{1}{\pi}\sin\alpha\pi(-1)^n\frac{2n}{\alpha^2 - n^2}$$

Итак,

$$\sin\alpha x = \frac{2}{\pi}\sin\alpha\pi\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{\alpha^2 - n^2}\sin nx, \qquad -\pi < x < +\pi\ .$$

Замечание. Положим $x=\dfrac{\pi}{2}\quad\Rightarrow$

$$\sin\alpha\frac{\pi}{2}=\frac{1}{\pi}\sin\alpha\pi\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{\alpha-n}-\frac{1}{\alpha+n}\right)\sin n\frac{\pi}{2}=$$

$$=\frac{1}{\pi}2\sin\alpha\frac{\pi}{2}\cos\alpha\frac{\pi}{2}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{2m+1}\left(\frac{1}{\alpha-(2m+1)}-\frac{1}{\alpha+(2m+1)}\right)(-1)^m$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{\cos\frac{\pi\alpha}{2}}=\frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\left(\frac{1}{\alpha+(2m+1)}-\frac{1}{\alpha-(2m+1)}\right)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\left(\frac{1}{\frac{\pi\alpha}{2}+(m\pi+\frac{\pi}{2})}-\frac{1}{\frac{\pi\alpha}{2}-(m\pi+\frac{\pi}{2})}\right)$$

Обозначая через $z=\dfrac{\pi\alpha}{2}$, получим разложение функции $\dfrac{1}{\cos z}$ на простые дроби

$$\frac{1}{\cos z}=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\left(\frac{1}{z+\left(\frac{\pi}{2}+m\pi\right)}-\frac{1}{z-\left(\frac{\pi}{2}+m\pi\right)}\right)$$

по корням знаменателя: $z_m=\pm\left(\dfrac{\pi}{2}+m\pi\right)\quad(m=0,\ 1,\ 2,\ldots)$.

Замечание. Полученное представление является аналогом разложения рациональной дроби в сумму простых дробей по корням знаменателя.

46. Ряды Фурье по *Cos* и по *Sin*

Условия.

<table>
<tr><td colspan="2">Разложить функцию в ряд Фурье. Построить график суммы ряда Фурье.
Полагая что: $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\pi$, найти суммы получающихся числовых рядов.</td></tr>
<tr><td>№ 46.1. $f(x)=x^2$
$a)\ -\pi\le x\le+\pi,\ b)\ 0\le x\le 2\pi$</td><td>№ 46.1. $f(x)=x^3$
$a)\ -\pi\le x\le+\pi,\ b)\ 0\le x\le 2\pi$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Разложить функцию в ряд Фурье. Построить график ряда Фурье.</td></tr>
<tr><td>№ 46.2. $f(x)=x^2$
$a)\ -l\le x\le+l,\ b)\ 0\le x\le 2l$</td><td>№ 46.2. $f(x)=x^3$
$a)\ -l\le x\le+l,\ b)\ 0\le x\le 2l$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Разложить функцию в ряд Фурье по Cos и по Sin.. Построить графики сумм полученных рядов.</td></tr>
<tr><td>№ 46.3. $f(x)=x^2$
$a)\ 0\le x\le\pi,\ b)\ 0\le x\le l$</td><td>№ 46.3. $f(x)=x^3$
$a)\ 0\le x\le\pi,\ b)\ 0\le x\le l$</td></tr>
</table>

Теория.

Пусть функция $y=f(x)$ *кусочно-непрерывно дифференцируемая в интервале длиной* $2l$ *(например,* $[-l,+l]$, $[0,2l]$, $[a,b]=[a,a+2l]$, $l=\frac{b-a}{2}$*), причем точки разрыва* x_0 *регулярны*

$$f(x_0)=\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}.$$

Интервал $-l\le x\le+l$ *"сожмем" в* l *раз* $-1\le\frac{1}{l}x\le+1$ *и "растянем" " в* π *раз* $-\pi\le\frac{\pi}{l}x\le+\pi$ *(т.е. сделаем замену переменной* $\frac{\pi}{l}x=y \Rightarrow x=\frac{l}{\pi}y \Rightarrow$ $g(y)=g\left(\frac{\pi}{l}x\right)=f(x)=f\left(\frac{l}{\pi}y\right)$*). Разложив функцию* $g(y)$ *в ряд Фурье на "привычном" интервале* $-\pi\le y\le+\pi$*, после замены переменной получим разложение* $f(x)$ *на заданном интервале* $-l\le x\le+l$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\frac{\pi}{l}x+b_n\sin n\frac{\pi}{l}x\right).$$

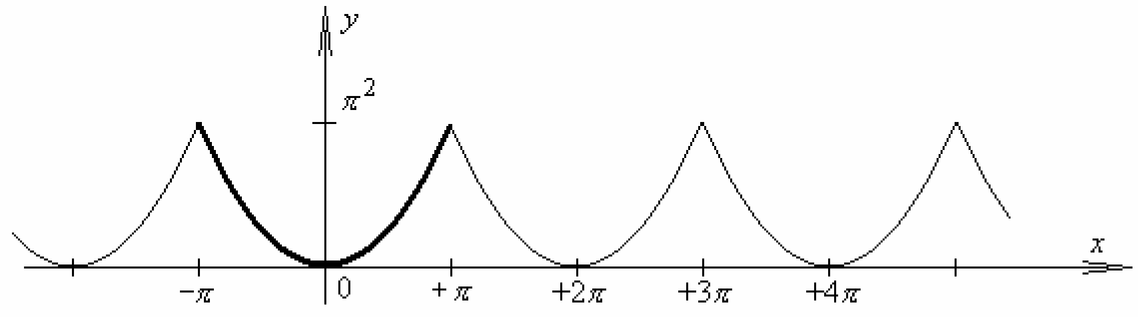
Это разложение можно получить, вычисляя непосредственно коэффициенты по формулам:

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{+l}f(x)\cos n\frac{\pi}{l}xdx,\quad n=0,\ 1,\ 2,...\qquad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{+l}f(x)\sin n\frac{\pi}{l}xdx,\quad n=\ \ 1,\ 2,...$$

Решения.

№ 46.1.

$a)\ f(x)=x^2, \qquad -\pi \le x \le +\pi$.



Найдем коэффициенты ряда Фурье:

Функция $f(x)=x^2$ – четная на интервале $[-\pi,+\pi] \quad \Rightarrow \quad b_n=0.$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2dx=\frac{2}{\pi}\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^\pi=\frac{2}{3}\pi^2,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos nxdx=\frac{2}{\pi n}\int_0^\pi x^2 d\sin nx=\frac{2}{\pi n}\left(x^2\cdot\sin nx\ \Big|_0^\pi-\int_0^\pi \sin nxdx^2\right)=$$

$$=-\frac{4}{\pi n}\int_0^\pi x\sin nxdx=\frac{4}{\pi n^2}\int_0^\pi xd\cos nx=\frac{4}{\pi n^2}\left(x\cdot\cos nx\ \Big|_0^\pi-\int_0^\pi\cos nxdx\right)=$$

$$=\frac{4}{\pi n^2}\left(\pi\cdot\cos n\pi-\frac{1}{n}\sin nx\ \Big|_0^\pi\right)=\frac{4}{n^2}(-1)^n$$

Итак,

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^\infty\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx, \qquad -\pi\le x\le+\pi$$

Используя полученное разложение, с учетом вида (непрерывности) графика суммы ряда Фурье, найдем суммы некоторых числовых рядов:

$x=0 \quad \Rightarrow$

$$0=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^\infty\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n0=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^\infty\frac{(-1)^n}{n^2} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=1}^\infty\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12};$$

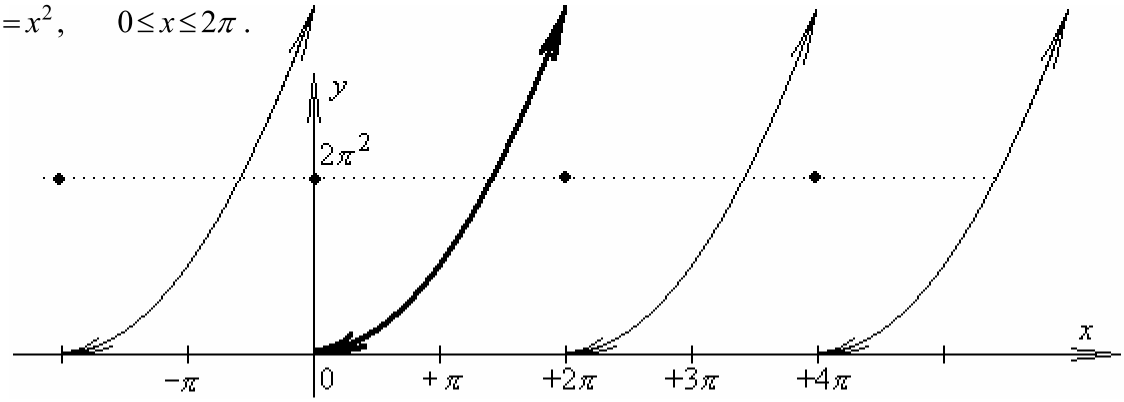
$x=\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow$

$$\frac{\pi^2}{4}=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^\infty\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{m=1}^\infty\frac{(-1)^{2m}}{(2m)^2}(-1)^m \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{m=1}^\infty\frac{(-1)^{m+1}}{m^2}=\frac{\pi^2}{12};$$

$x=\pi \quad \Rightarrow$

$$\pi^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^\infty\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^\infty\frac{(-1)^n}{n^2}(-1)^n \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

$b)\ f(x)=x^2, \qquad 0\le x\le 2\pi$.



$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2dx=\frac{1}{\pi}\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^{2\pi}=\frac{8}{3}\pi^2.$$

$$\left[\begin{array}{l} a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\cos nxdx \\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\sin nxdx \end{array}\right. \Rightarrow\quad a_n-ib_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)(\cos nx-i\sin nx)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2e^{-inx}dx=-\frac{1}{\pi in}\int_0^{2\pi} x^2de^{-inx}=-\frac{1}{\pi in}\left(x^2\cdot e^{-inx}\ \Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi} e^{-inx}dx^2\right)=-\frac{1}{\pi in}\left(4\pi^2\cdot e^{-in2\pi}-2\int_0^{2\pi} xe^{-inx}dx\right)=$$

$$=-\frac{1}{\pi in}\left(4\pi^2+2\frac{1}{in}\int_0^{2\pi} xde^{-inx}\right)=-\frac{1}{\pi in}\left(4\pi^2+2\frac{1}{in}\left(x\cdot e^{-inx}\ \Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi} e^{-inx}dx\right)\right)=$$

$$=-\frac{1}{\pi in}\left(4\pi^2+2\frac{1}{in}\left(2\pi\cdot e^{-in2\pi}-0\right)\right)=-\frac{1}{\pi in}\left(4\pi^2+\frac{4\pi}{in}\right)=-\frac{1}{in}\left(4\pi+\frac{4}{in}\right)=i\frac{4\pi}{n}+\frac{4}{n^2}$$

$$a_n-ib_n=\frac{4}{n^2}+i\frac{4\pi}{n} \quad\Rightarrow\quad a_n=\frac{4}{n^2},\quad b_n=-\frac{4\pi}{n}$$

Итак,

$$x^2=\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos nx-4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx, \qquad 0<x<2\pi .$$

Используя полученное разложение, с учетом вида графика суммы ряда Фурье, из которого видно к чему сходится ряд в точках разрыва, найдем суммы некоторых числовых рядов.

$x=0 \quad\Rightarrow$

$$2\pi^2=\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos n0-4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin n0=\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

$x=\dfrac{\pi}{2} \quad\Rightarrow$

$$\frac{\pi^2}{4}=\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos n\frac{\pi}{2}-4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin n\frac{\pi}{2}=\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m)^2}(-1)^m-4\pi\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2m+1}(-1)^m$$

$$\Rightarrow\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m^2}-4\pi\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}=-\frac{13\pi^2}{12} \qquad \left(ср.\ \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{m^2}=\frac{\pi^2}{12},\quad \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}=\frac{\pi}{4}\right)$$

$x=\pi \quad\Rightarrow$

$$\pi^2=\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos n\pi=\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(-1)^n \qquad\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}.$$

№ 46.2.

Положим $\frac{\pi}{l}x = y \;\Rightarrow\; x = \frac{l}{\pi}y \;\Rightarrow\; g(y) = g\left(\frac{\pi}{l}x\right) = f(x) = f\left(\frac{l}{\pi}y\right) = \left(\frac{l}{\pi}y\right)^2 = \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 y^2$.

$a)\; f(x) = x^2, \quad -l \le x \le +l \quad \Rightarrow \quad g(y) = \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 y^2, \quad -\pi \le y \le +\pi$

Используя найденное в **№ 46.1.** $a)$ разложение

$$g(y) = \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 y^2 = \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \left(\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos ny\right), \qquad -\pi \le y \le +\pi$$

получаем:

$$f(x) = x^2 = \frac{l^2}{3} + 4\left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\frac{\pi}{l}x, \qquad -l \le x \le +l$$

$b)\; f(x) = x^2, \quad 0 \le x \le 2l \quad \Rightarrow \quad g(y) = \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 y^2, \quad 0 \le y \le 2\pi$

Используя найденное в **№ 46.1.** $b)$ разложение

$$g(y) = \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 y^2 = \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \left(\frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\cos ny - 4\pi\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin ny\right), \qquad 0 < y < 2\pi$$

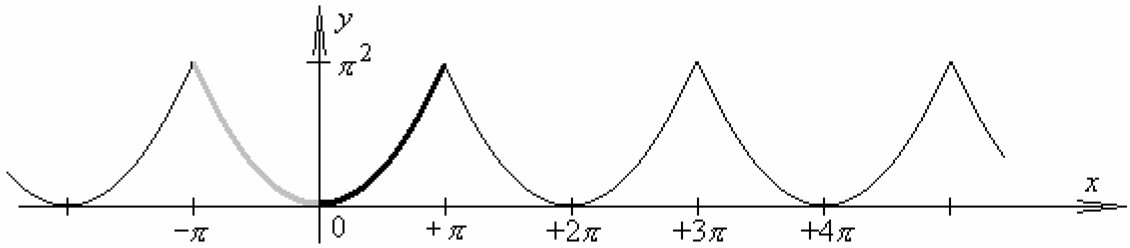
получаем:

$$f(x) = x^2 = \frac{4l^2}{3} + 4\left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\cos n\frac{\pi}{l}x - \pi\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin n\frac{\pi}{l}x\right), \qquad 0 < x < 2l$$

№ 46.3.

$a)\; f(x) = x^2 \qquad 0 \le x \le \pi$.

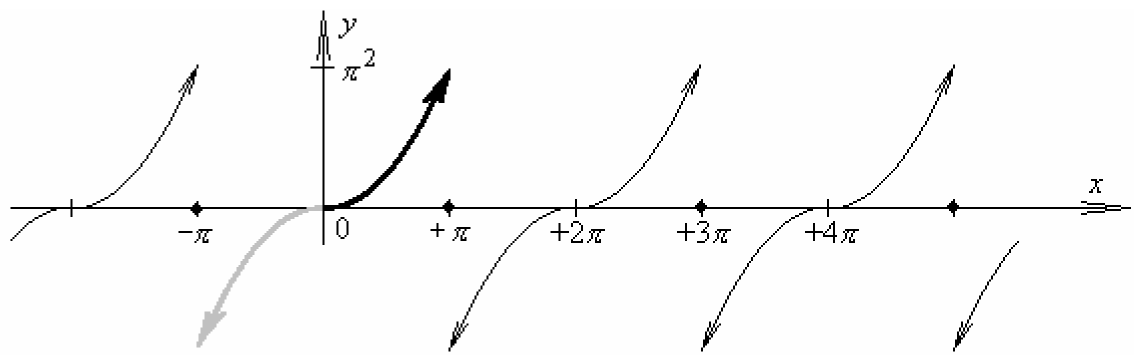
$a.1)$ Разложение функции в ряд по ***Cos*** – это ряд Фурье четного продолжения функции, с интервала $0 \le x \le +\pi$ на интервал $-\pi \le x \le 0$.



В данном случае, четное продолжение совпадает с естественным заданием функции, так что разложение в ряд по ***Cos*** - это разложение, полученное в **№ 46.1.** $a)$.

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx, \qquad 0 \le x \le +\pi$$

$a.2)$ Разложение функции в ряд по ***Sin*** - это ряд Фурье нечетного продолжения функции с интервала $0 \le x \le +\pi$ на интервал $-\pi \le x \le 0$.



Имеем:

$a_n = 0,$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \sin nx dx = -\frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi} x^2 d\cos nx = -\frac{2}{\pi n}\left(x^2 \cdot \cos nx\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\cos nx dx^2 \right) =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\left(\pi^2 \cdot \cos n\pi - 2\int_0^{\pi} x\cos nx dx \right) = -\frac{2}{\pi n}\left(\pi^2 \cdot (-1)^n - \frac{2}{n}\int_0^{\pi} xd\sin nx \right) =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\left(\pi^2 \cdot (-1)^n - \frac{2}{n}\left(x\cdot\sin nx \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin nx dx \right)\right) = -\frac{2}{\pi n}\left(\pi^2 \cdot (-1)^n - \frac{2}{n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi}\right) =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\left(\pi^2 \cdot (-1)^n - \frac{2}{n^2}\left((-1)^n - 1\right)\right) = -\frac{2\pi}{n}(-1)^n + \frac{4}{\pi n^3}\left((-1)^n - 1\right)$$

$$x^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2\pi}{n}(-1)^n + \frac{4}{\pi n^3}\left((-1)^n - 1\right)\right)\sin nx, \qquad 0 \le x < +\pi$$

a.3) Для разложения функции, заданной на интервале $0 \le x \le +\pi$, в ряд Фурье “растянем” интервал в 2 раза:

$$0 \le x \le \pi \quad \Rightarrow \quad 0 \le 2x \le 2\pi \quad \Rightarrow \quad 2x = y \quad \Rightarrow \quad x = \frac{y}{2}$$

$\Rightarrow$

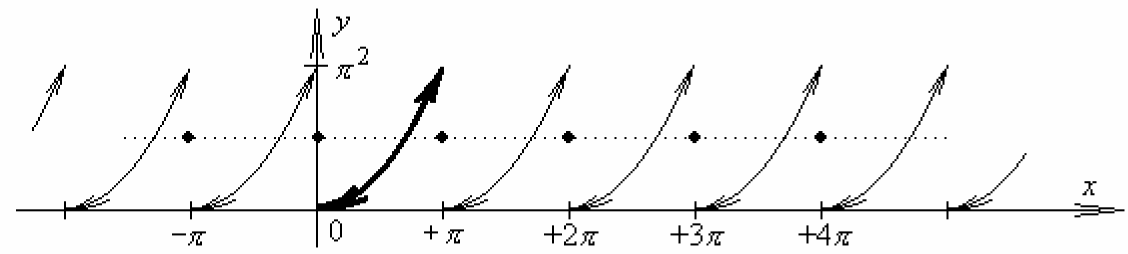
$$g(y) = g(2x) = f(x) = f\left(\frac{1}{2}y\right) = \left(\frac{1}{2}y\right)^2 = \frac{1}{4}y^2.$$

Используя найденное в **№ 46.1.** b) разложение

$$\frac{1}{4}y^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos ny - 4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin ny\right), \qquad 0 < y < 2\pi$$

получим:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos 2nx - \pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin 2nx, \qquad 0 < x < +\pi.$$



47. Интегралы Фурье. *Cos*– и *Sin*- преобразования Фурье

Условия.

Представить функцию интегралом Фурье.	
№ 47.1. $f(x)=\begin{cases}1, & \lvert x\rvert<\alpha\\ 0, & \lvert x\rvert>\alpha\end{cases}$	**№ 47.1.** $f(x)=\begin{cases}\alpha-\lvert x\rvert, & \lvert x\rvert<\alpha\\ 0, & \lvert x\rvert>\alpha\end{cases}$
№ 47.2. $f(x)=\begin{cases}\operatorname{sign}x, & \lvert x\rvert<\alpha\\ 0, & \lvert x\rvert>\alpha\end{cases}$	**№ 47.2.** $f(x)=\begin{cases}\alpha\operatorname{sign}x-x, & \lvert x\rvert<\alpha\\ 0, & \lvert x\rvert>\alpha\end{cases}$
№ 47.3. $f(x)=\begin{cases}\sin x, & \lvert x\rvert\le\pi\\ 0, & \lvert x\rvert>\pi\end{cases}$	**№ 47.3.** $f(x)=\begin{cases}\cos x, & \lvert x\rvert\le\frac{\pi}{2}\\ 0, & \lvert x\rvert>\frac{\pi}{2}\end{cases}$
№ 47.4. $f(x)=\begin{cases}0, & -\infty<x<0\\ e^{-x}, & 0<x<+\infty\end{cases}$	**№ 47.4.** $f(x)=\begin{cases}e^{x}, & -\infty<x<0\\ 0, & 0<x<+\infty\end{cases}$
Найти ***Cos*** - (***Sin*** -) преобразование Фурье функции и восстановить по нему данную функцию.	
№ 47.5. $f(x)=e^{-x}, \quad 0<x<+\infty$	**№ 47.5.** $f(x)=e^{-x}, \quad 0<x<+\infty$
Найти преобразование Фурье функции и восстановить по нему данную функцию.	
№ 47.6. $f(x)=\begin{cases}0, & -\infty<x<0\\ e^{-x}, & 0<x<+\infty\end{cases}$	**№ 47.6** $f(x)=\begin{cases}e^{x}, & -\infty<x<0\\ 0, & 0<x<+\infty\end{cases}$

Теория.

Если функция $y=f(x)$ *кусочно-непрерывно дифференцируемая на любом конечном интервале, причем ее точки разрыва* x_0 *регулярны*

$$f(x_0)=\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2},$$

и абсолютно интегрируема на всей оси, то ее можно представить интегралом Фурье:

$$f(x)=\int_0^{\infty}\left(a(y)\cos xy+b(y)\sin xy\right)dy, \quad -\infty<x<+\infty$$

$$a(y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos yx dx, \quad b(y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin yx dx.$$

Если дополнительно функция $f(x)$ *четная или нечетная, то ее интеграл Фурье имеет соответственно только четную или нечетную составляющую:*

четная

$$f(x)=\int_0^{\infty}a(y)\cos xy dy, \quad -\infty<x<+\infty$$

$$a(y)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f(x)\cos yx dx, \qquad b(y)=0.$$

нечетная

$$f(x)=\int_0^{\infty}b(y)\sin xy dy, \quad -\infty<x<+\infty$$

$$b(y)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f(x)\sin yx dx, \qquad a(y)=0.$$

Отсюда вытекает возможность представить функцию, заданную только на полуоси $[0,+\infty)$, *как* ***Cos***– *или* ***Sin*** - *преобразование Фурье соответственно своего* ***Cos*** - *или* ***Sin*** - *преобразования Фурье:*

Cos *-преобразование Фурье*

$$F_c(y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(x)\cos yx dx$$

$$0\le x, y<+\infty$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}F_c(y)\cos xy dy$$

Sin *-преобразование Фурье*

$$F_s(y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(x)\sin yx dx$$

$$0\le x, y<+\infty$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}F_s(y)\sin xy dy$$

Интегральной формуле Фурье можно придать “симметричный” вид, переходя к комплексной форме:

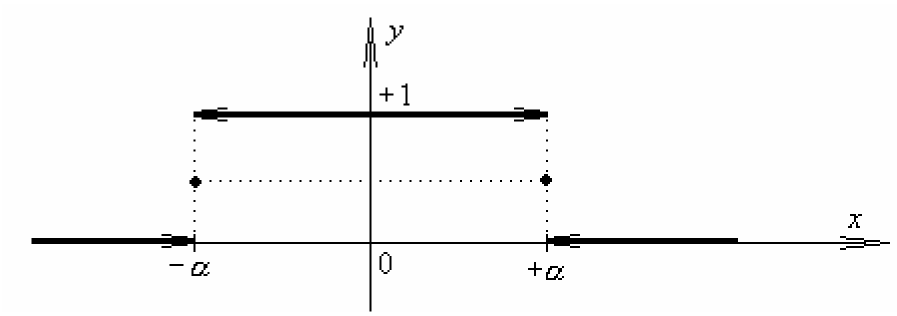
$$F(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-iyx}dx \quad\Leftrightarrow\quad f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(y)e^{+ixy}dy$$

Функция $F(y)$ называется преобразованием Фурье функции $f(x)$, которая восстанавливается по своему преобразованию Фурье как обратное преобразование Фурье.

Решения.

№ 47.1.

Доопределим функцию $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<\alpha\\ 0, & |x|>\alpha\end{cases}$ в точках разрыва $\pm\alpha$ значением $f(\pm\alpha)=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}$:



Учитывая, что данная функция четная, получим $b(y)=0$.

Далее:

$$a(y)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\cos yxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\alpha} 1\cdot\cos yxdx=\frac{2}{\pi}\frac{\sin yx}{y}\Bigg|_0^{\alpha}=\frac{2}{\pi}\frac{\sin\alpha y}{y}$$

$\Rightarrow$

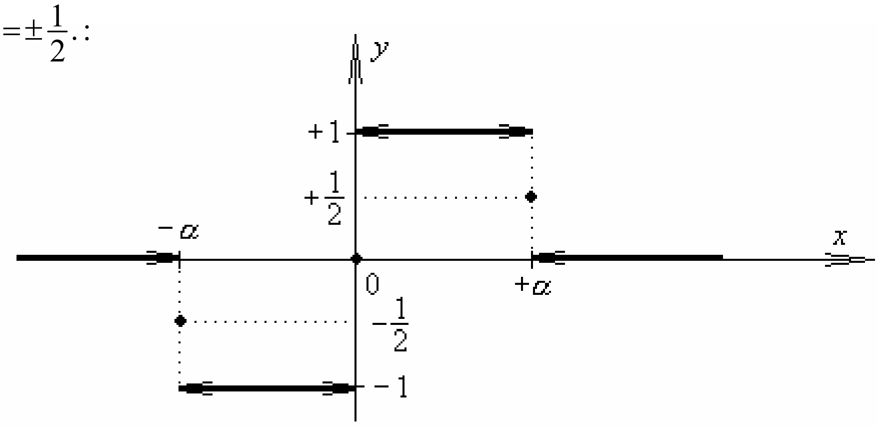
$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin y\alpha}{y}\cos xydy.$$

Замечание. Полагая что $x=0$, получим интеграл Дирихле:

$$\boxed{\int_0^{\infty}\frac{\sin\alpha y}{y}dy=\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}\,\alpha}.$$

№ 47.2.

Доопределим функцию $f(x)=\begin{cases}\operatorname{sign} x, & |x|<\alpha\\ 0, & |x|>\alpha\end{cases}$ в точках разрыва $\pm\alpha$ значением $f(\pm\alpha)=\frac{\pm1+0}{2}=\pm\frac{1}{2}$.:



Учитывая, что данная функция нечетная, получим $a(y)=0$.

Далее:

$$b(y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin yx dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\alpha 1\cdot\sin yx dx=-\frac{2}{\pi}\frac{\cos yx}{y}\Big|_0^\alpha=-\frac{2}{\pi}\frac{\cos y\alpha-1}{y}=\frac{2}{\pi}\frac{1-\cos\alpha y}{y}\Rightarrow$$

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{1-\cos\alpha y}{y}\sin xy dy.$$

№ 47.3.

Учитывая, что данная функция $f(x)=\left[\begin{array}{ll}\sin x, & |x|\le\pi\\ 0, & |x|>\pi\end{array}\right.$ нечетная, получим $a(y)=0$.

Далее:

$$b(y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin yx dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\sin x\cdot\sin yx dx=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\left(\cos(1-y)x-\cos(1+y)x\right)dx=$$

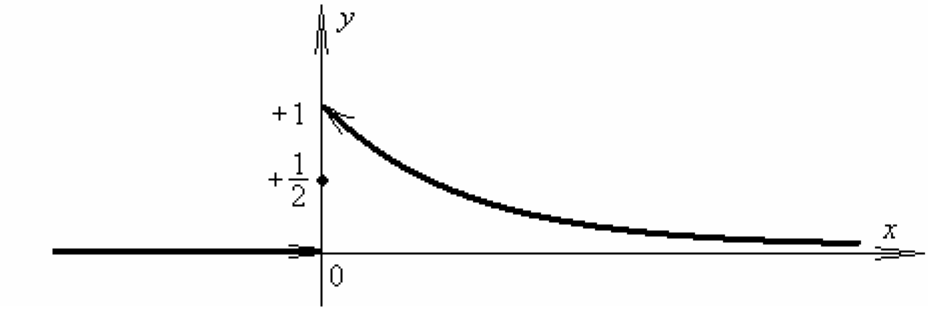
$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(1-y)x}{(1-y)}-\frac{\sin(1+y)x}{(1+y)}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=\pi}=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(1-y)\pi}{(1-y)}-\frac{\sin(1+y)\pi}{(1+y)}\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin\pi y}{(1-y)}+\frac{\sin\pi y}{(1+y)}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\sin\pi y\frac{2}{1-y^2}\quad\Rightarrow$$

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin\pi y}{1-y^2}\sin xy dy.$$

№ 47.4.

Доопределим функцию $f(x)=\left[\begin{array}{ll}0, & -\infty<x<0\\ e^{-x}, & 0<x<+\infty\end{array}\right.$ в точке разрыва значением $f(0)=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$.:



Функция $f(x)$ ни четная, ни нечетная. Функции-коэффициенты $a(y)$, $b(y)$ найдем “одновременно”:

$$\left[\begin{array}{l}a(y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos yx dx\\ b(y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin yx dx\end{array}\right.\Rightarrow\ a(y)-ib(y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\left(\cos yx-i\sin yx\right)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-iyx}dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-x}e^{-iyx}dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-(1+iy)x}dx=\frac{1}{\pi}\frac{e^{-(1+iy)x}}{-(1+iy)}\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{1}{\pi}\frac{e^{-(1+iy)\infty}-e^{-(1+iy)0}}{-(1+iy)}=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+iy}=\frac{1}{\pi}\frac{1-iy}{1+y^2}$$

$$a(y)-ib(y)=\frac{1}{\pi}\frac{1-iy}{1+y^2}\ \Rightarrow\ a(y)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+y^2},\quad b(y)=\frac{1}{\pi}\frac{y}{1+y^2}\ \Rightarrow$$

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left(\frac{1}{1+y^2}\cos xy+\frac{y}{1+y^2}\sin xy\right)dy.$$

Замечание.

$$\left[\begin{array}{l} x>0 \;\Rightarrow\; e^{-x}=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{1+y^2}\cos xy+\frac{y}{1+y^2}\sin xy\right)dy \\ -x<0 \;\Rightarrow 0=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{1+y^2}\cos(-x)\,y+\frac{y}{1+y^2}\sin(-x)\,y\right)dy \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{1+y^2}\cos xydy=\frac{\pi}{2}e^{-x} \\ \displaystyle\int_0^{\infty}\frac{y}{1+y^2}\sin xy\,dy=\frac{\pi}{2}e^{-x} \end{array}\right. \quad 0<x<+\infty$$

№ 47.5.

Найдем ***Cos*** - преобразование Фурье функции $f(x)=e^{-x}\quad(0<x<+\infty)$:

$$F_c(y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}f(x)\cos yxdx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-x}\cos yxdx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\operatorname{Re}\int_0^{+\infty}e^{-x}e^{-iyx}dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\operatorname{Re}\int_0^{+\infty}e^{-(1+iy)x}dx=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\operatorname{Re}\left.\frac{e^{-(1+iy)x}}{-(1+iy)}\right|_0^{+\infty}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\operatorname{Re}\frac{e^{-(1+iy)\infty}-e^{-(1+iy)0}}{-(1+iy)}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\operatorname{Re}\frac{1}{1+iy}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\operatorname{Re}\frac{1-iy}{1+y^2}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+y^2}$$

$\Rightarrow$

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}F_c(y)\cos xydy \;\Rightarrow\; e^{-x}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+y^2}\cos xydy=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+y^2}\cos xydy,\quad 0<x<+\infty$$

Замечание. При нахождении ***Cos*** - преобразования Фурье функции $f(x)=e^{-x}\quad(0<x<+\infty)$ можно было воспользоваться соотношением, полученным в предыдущем примере **№ 47.4.**

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{1+y^2}\cos xydy=\frac{\pi}{2}e^{-x} \quad\Rightarrow\quad \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{1}{1+y^2}\cos xydy=\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-x},$$

которое задает ***Cos*** - преобразование некоторой функции. Учитывая, что функция восстанавливается по своему ***Cos*** - преобразованию в свою очередь, как его ***Cos*** - преобразование, получим:

$$\frac{1}{1+y^2}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-x}\cos yxdx=\int_0^{\infty}e^{-x}\cos yxdx \quad\Rightarrow\quad F_c(y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-x}\cos yxdx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+y^2}.$$

№ 47.6.

Преобразование Фурье функции $f(x)$ определяется как интеграл

$$F(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-iyx}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\left(\cos yx-i\sin yx\right)dx=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(a(y)-ib(y)\right).$$

Воспользуемся решением примера **№ 47.4.**, в котором функции-коэффициенты $a(y)$, $b(y)$ были найдены "одновременно". Теперь видно, что по существу было найдено преобразование Фурье:

$$F(y)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(a(y)-ib(y)\right)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\pi}\frac{1-iy}{1+y^2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1-iy}{1+y^2}.$$

Учитывая, что функция восстанавливается по своему преобразованию Фурье в свою очередь как его обратное преобразование Фурье, получим:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1-iy}{1+y^2}e^{+ixy}dy=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-iy}{1+y^2}e^{+ixy}dy=\left[\begin{array}{ll}0, & -\infty<x<0 \\ e^{-x}, & 0<x<+\infty\end{array}\right.$$

48. Интегралы с параметром

Условия.

Найти интеграл, зависящий от параметра	
№ 48.1. $\int\limits_0^\infty \frac{\ln(1+\alpha x^2)}{x^2}dx, \quad (\alpha>0)$	**№ 48.1.** $\int\limits_0^\infty \frac{\ln(1+\alpha^2 x)}{\sqrt{x^3}}dx$
№ 48.2. $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}dx, \quad (\alpha,\beta>0)$	**№ 48.2.** $\int\limits_0^\infty \frac{\text{arctg }\alpha x-\text{arctg }\beta x}{x}dx, \ (\alpha,\beta>0)$
№ 48.3. $\int\limits_0^\infty \frac{\text{arctg }\alpha x^2-\text{arctg }\beta x^2}{x}dx,(\alpha,\beta>0)$	**№ 48.3.** $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}dx, \quad (\alpha,\beta>0)$
№ 48.4. $\int\limits_0^\infty \left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\right)^2 dx, \quad (\alpha,\beta>0)$	**№48.4.** $\int\limits_0^\infty \left(\frac{\text{arctg }\alpha x-\text{arctg }\beta x}{x}\right)^2 dx,(\alpha,\beta>0)$
№ 48.5. $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin\gamma x dx, \quad (\alpha,\beta>0)$	**№ 48.5.** $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\cos\gamma x dx, \quad (\alpha,\beta>0)$

Теория.

Дифференцирование или интегрирование под знаком интеграла несобственных интегралов, зависящих от параметра

$$F(y)=\int\limits_a^\infty f(x,y)dx, \quad y\in[c,d]$$

$$\frac{d}{dy}F(y)=\frac{d}{dy}\int\limits_a^\infty f(x,y)dx=\int\limits_a^\infty \frac{\partial}{\partial y}f(x,y)dx, \qquad \int\limits_c^d F(y)dy=\int\limits_c^d\left(\int\limits_a^\infty f(x,y)dx\right)dy=\int\limits_a^\infty\left(\int\limits_c^d f(x,y)dy\right)dx,$$

аналогично дифференцированию или интегрированию почленно функционального ряда

$$S(y)=\sum_{n=0}^\infty f_n(y)$$

$$\frac{d}{dy}S(y)=\frac{d}{dy}\sum_{n=0}^\infty f_n(y)=\sum_{n=0}^\infty \frac{d}{dy}f_n(y), \qquad \int\limits_c^d S(y)dy=\int\limits_c^d\sum_{n=0}^\infty f_n(y)dy=\sum_{n=0}^\infty\int\limits_c^d f_n(y)dy,$$

и связано с ***равномерной сходимостью*** *интегралов (рядов).*

Теорема. *(Признак Вейерштрасса).*

Пусть:

1) $|f(x,y)|\le g(x) \qquad (\ |f_n(y)|\le g_n\ ) \quad y\in[c,d],$

2) интеграл $\int\limits_a^\infty g(x)dx<+\infty$ *(ряд* $\sum\limits_{n=0}^\infty g_n<+\infty$*)* ***сходится,***

$\Rightarrow$

1) интеграл $\int\limits_a^\infty f(x,y)dx<+\infty$ *(ряд* $\sum\limits_{n=0}^\infty f_n(y)<+\infty$*)* ***сходится****, причем* ***абсолютно****,*

причем ***равномерно*** *на интервале* $y\in[c,d]$.

Решения.

№ 48.1.

$$F(\alpha)=\int_0^\infty \frac{\ln(1+\alpha x^2)}{x^2}dx \qquad (\alpha>0).$$

Найдем функцию $F(\alpha)$ дифференцированием под знаком интеграла по параметру α :

$$\frac{d}{d\alpha}F(\alpha)=\frac{d}{d\alpha}\int_0^\infty \frac{\ln(1+\alpha x^2)}{x^2}dx=\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{\ln(1+\alpha x^2)}{x^2}dx=\int_0^\infty \frac{1}{x^2(1+\alpha x^2)}x^2dx=$$

$$=\int_0^\infty \frac{1}{(1+\alpha x^2)}dx=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_0^\infty \frac{1}{\left(1+\left(\sqrt{\alpha}x\right)^2\right)}d\sqrt{\alpha}x=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\operatorname{arctg}\sqrt{\alpha}x\Big|_0^\infty=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow$

$$F(\alpha)=\int\frac{d}{d\alpha}F(\alpha)d\alpha=\int\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}d\alpha=\frac{\pi}{2}\int\alpha^{-\frac{1}{2}}d\alpha=\frac{\pi}{2}\frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+c=\pi\sqrt{\alpha}+c.$$

Замечая, что

$$F(0)=\int_0^\infty \frac{\ln(1+0x^2)}{x^2}dx=0,$$

найдем константу c

$0=\pi\sqrt{0}+c \quad\Rightarrow\quad c=0$.

Итак,

$$F(\alpha)=\pi\sqrt{\alpha}\ .$$

Замечание. Полученный интеграл можно найти непосредственно:

$$F(\alpha)=\int_0^\infty \frac{\ln(1+\alpha x^2)}{x^2}dx=-\int_0^\infty \ln(1+\alpha x^2)d\frac{1}{x}=$$

$$=-\left(\ln(1+\alpha x^2)\cdot\frac{1}{x}\Big|_0^\infty-\int_0^\infty\frac{1}{x}d\ln(1+\alpha x^2)\right)=-\left(0-\int_0^\infty\frac{1}{x}\frac{2\alpha x}{1+\alpha x^2}dx\right)=$$

$$=2\alpha\int_0^\infty\frac{1}{1+\alpha x^2}dx=2\alpha\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_0^\infty\frac{1}{1+\left(\sqrt{\alpha}x\right)^2}d\sqrt{\alpha}x=2\sqrt{\alpha}\ \operatorname{arctg}\sqrt{\alpha}x\ \Big|_0^\infty=2\sqrt{\alpha}\frac{\pi}{2}=\pi\sqrt{\alpha}.$$

№ 48.2.

$$F(\alpha,\beta)=\int_0^\infty\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}dx \quad (\alpha,\beta>0).$$

Найдем функцию $F(\alpha,\beta)$ дифференцированием под знаком интеграла по параметру α .

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}F(\alpha,\beta)=\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_0^\infty\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}dx=\int_0^\infty\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}dx=\int_0^\infty\frac{e^{-\alpha x}(-x)}{x}dx=-\int_0^\infty e^{-\alpha x}dx=$$

$$=\frac{1}{\alpha}\int_0^\infty e^{-\alpha x}d(-\alpha x)=\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha x}\Big|_0^\infty=-\frac{1}{\alpha}.$$

$\Rightarrow$

$$F(\alpha,\beta)=\int\frac{\partial}{\partial\alpha}F(\alpha,\beta)d\alpha=-\int\frac{1}{\alpha}d\alpha=-\ln\alpha+c.$$

Замечая, что

$$F(\alpha,\beta)\big|_{\alpha=\beta}=F(\beta,\beta)=\int\limits_0^{\infty}\frac{e^{-\beta x}-e^{-\beta x}}{x}dx=0,$$

найдем константу c:

$0=-\ln\beta+c \quad\Rightarrow\quad c=\ln\beta$.

Итак,

$$F(\alpha,\beta)=\ln\beta-\ln\alpha=\ln\frac{\beta}{\alpha}.$$

Замечание. Учитывая, что

$$\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}=\frac{e^{-yx}}{-x}\Bigg|_{y=\alpha}^{y=\beta}=\int\limits_{\alpha}^{\beta}e^{-yx}dy,$$

рассмотрим интеграл:

$$G(y)=\int\limits_0^{\infty}e^{-xy}dx=\frac{e^{-xy}}{-y}\Bigg|_{x=0}^{x=\infty}=\frac{0-1}{-y}=\frac{1}{y}.$$

Проинтегрируем функцию $G(y)$ под знаком интеграла по параметру y:

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta}G(y)dy=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left(\int\limits_0^{\infty}e^{-yx}dx\right)dy=\int\limits_0^{\infty}\left(\int\limits_{\alpha}^{\beta}e^{-yx}dy\right)dx=\int\limits_0^{\infty}\left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\right)dx=F(\alpha,\beta).$$

С другой стороны

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta}G(y)dy=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{y}dy=\ln y\,\Big|_{\alpha}^{\beta}=\ln\beta-\ln\alpha=\ln\frac{\beta}{\alpha}$$

№ 48.3.

$$F(\alpha,\beta)=\int\limits_0^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}\alpha x^2-\operatorname{arctg}\beta x^2}{x}dx \qquad (\alpha,\beta>0).$$

Найдем функцию $F(\alpha,\beta)$ дифференцированием под знаком интеграла по параметру α:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}F(\alpha,\beta)=\frac{\partial}{\partial\alpha}\int\limits_0^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}\alpha x^2-\operatorname{arctg}\beta x^2}{x}dx=\int\limits_0^{\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{\operatorname{arctg}\alpha x^2-\operatorname{arctg}\beta x^2}{x}dx=$$

$$=\int\limits_0^{\infty}\frac{x^2}{(1+\alpha^2x^4)x}dx=\int\limits_0^{\infty}\frac{x}{(1+\alpha^2x^4)}dx=\frac{1}{2\alpha}\int\limits_0^{\infty}\frac{1}{\left(1+\left(\alpha x^2\right)^2\right)}d\left(\alpha x^2\right)=\frac{1}{2\alpha}\operatorname{arctg}\alpha x^2\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{2\alpha}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4\alpha}.$$

$\Rightarrow$

$$F(\alpha,\beta)=\int\frac{\partial}{\partial\alpha}F(\alpha,\beta)d\alpha=\int\frac{\pi}{4\alpha}d\alpha=\frac{\pi}{4}\ln\alpha+c.$$

Замечая, что

$$F(\alpha,\beta)\big|_{\alpha=\beta}=F(\beta,\beta)=\int\limits_0^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}\beta x^2-\operatorname{arctg}\beta x^2}{x}dx=0,$$

найдем константу c:

$0=\frac{\pi}{4}\ln\beta+c \quad\Rightarrow\quad c=-\frac{\pi}{4}\ln\beta$

Итак,

$$F(\alpha,\beta)=\frac{\pi}{4}\ln\alpha-\frac{\pi}{4}\ln\beta=\frac{\pi}{4}\ln\frac{\alpha}{\beta}.$$

№ 48.4.

$$F(\alpha,\beta)=\int_0^\infty\left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\right)^2 dx \quad (\alpha,\beta>0).$$

Найдем функцию $F(\alpha,\beta)$ дифференцированием под знаком интеграла по параметру α :

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}F(\alpha,\beta)=\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_0^\infty\left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\right)^2 dx=\int_0^\infty\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\right)^2 dx=$$

$$=\int_0^\infty 2\left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\right)\frac{e^{-\alpha x}(-x)}{x}dx=-2\int_0^\infty\left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\right)e^{-\alpha x}dx=G(\alpha,\beta).$$

Функцию $G(\alpha,\beta)$ найдем дифференцированием под знаком интеграла по параметру β :

$$\frac{\partial}{\partial\beta}G(\alpha,\beta)=-2\frac{\partial}{\partial\beta}\int_0^\infty\left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\right)e^{-\alpha x}dx=-2\int_0^\infty\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\right)e^{-\alpha x}dx=-2\int_0^\infty\frac{-e^{-\beta x}}{x}(-x)e^{-\alpha x}dx=$$

$$=-2\int_0^\infty e^{-(\alpha+\beta)x}dx=-2\left.\frac{e^{-(\alpha+\beta)x}}{-(\alpha+\beta)}\right|_0^\infty=-2\frac{1}{(\alpha+\beta)}.$$

$$G(\alpha,\beta)=\int\frac{\partial}{\partial\beta}G(\alpha,\beta)d\beta=-2\int\frac{1}{(\alpha+\beta)}d\beta=-2\ln(\alpha+\beta)+c_1.$$

Замечая, что

$$G(\alpha,\beta)\big|_{\beta=\alpha}=G(\alpha,\alpha)=-2\int_0^\infty\left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\alpha x}}{x}\right)e^{-\alpha x}dx=0,$$

найдем константу c_1:

$$0=-2\ln(\alpha+\alpha)+c_1 \quad\Rightarrow\quad c_1=2\ln 2\alpha.$$

Значит,

$$G(\alpha,\beta)=-2\ln(\alpha+\beta)+2\ln 2\alpha.$$

Далее:

$$F(\alpha,\beta)=\int\frac{\partial}{\partial\alpha}F(\alpha,\beta)d\alpha=\int G(\alpha,\beta)d\alpha=\int\left(-2\ln(\alpha+\beta)+2\ln 2\alpha\right)d\alpha=$$

$$=\left(-2\ln(\alpha+\beta)+2\ln 2\alpha\right)\alpha-\int\alpha d\left(-2\ln(\alpha+\beta)+2\ln 2\alpha\right)=$$

$$=\left(-2\ln(\alpha+\beta)+2\ln 2\alpha\right)\alpha-\int\alpha\left(\frac{-2}{\alpha+\beta}+\frac{2}{2\alpha}2\right)d\alpha=$$

$$=\left(-2\ln(\alpha+\beta)+2\ln 2\alpha\right)\alpha-2\int\left(\frac{-\alpha}{\alpha+\beta}+1\right)d\alpha=\left(-2\ln(\alpha+\beta)+2\ln 2\alpha\right)\alpha-2\int\frac{\beta}{\alpha+\beta}d\alpha=$$

$$=\left(-2\ln(\alpha+\beta)+2\ln 2\alpha\right)\alpha-2\beta\ln(\alpha+\beta)+c_2=-2(\alpha+\beta)\ln(\alpha+\beta)+2\alpha\ln 2\alpha+c_2.$$

Замечая, что

$$F(\alpha,\beta)\big|_{\alpha=\beta}=F(\beta,\beta)=\int_0^\infty\left(\frac{e^{-\beta x}-e^{-\beta x}}{x}\right)^2 dx=0,$$

найдем константу c_2:

$$0=-2(\beta+\beta)\ln(\beta+\beta)+2\beta\ln 2\beta+c_2 \quad\Rightarrow\quad c_2=2\beta\ln 2\beta.$$

Итак,

$$F(\alpha,\beta)=-2(\alpha+\beta)\ln(\alpha+\beta)+2\alpha\ln 2\alpha+2\beta\ln 2\beta=\ln\frac{(2\alpha)^{2\alpha}(2\beta)^{2\beta}}{(\alpha+\beta)^{2(\alpha+\beta)}}.$$

№ 48.5.

$$F(\alpha,\beta)=\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin\gamma x dx \quad (\alpha,\beta>0).$$

Найдем функцию $F(\alpha,\beta)$ дифференцированием под знаком интеграла по параметру α:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}F(\alpha,\beta)=\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin\gamma x dx=\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin\gamma x dx=\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}(-x)}{x}\sin\gamma x dx=$$

$$=-\int_0^\infty e^{-\alpha x}\sin\gamma x dx=-\mathrm{Im}\int_0^\infty e^{-\alpha x}(\cos\gamma x+i\sin\gamma x)dx=-\mathrm{Im}\int_0^\infty e^{-\alpha x}e^{i\gamma x}dx=-\mathrm{Im}\int_0^\infty e^{(-\alpha+i\gamma)x}dx=$$

$$=-\mathrm{Im}\left.\frac{e^{(-\alpha+i\gamma)x}}{(-\alpha+i\gamma)}\right|_0^\infty=\mathrm{Im}\frac{1}{(-\alpha+i\gamma)}=\mathrm{Im}\frac{-\alpha-i\gamma}{\alpha^2+\gamma^2}=\frac{-\gamma}{\alpha^2+\gamma^2}$$

$\Rightarrow$

$$F(\alpha,\beta)=\int\frac{\partial}{\partial\alpha}F(\alpha,\beta)d\alpha=\int\frac{-\gamma}{\alpha^2+\gamma^2}d\alpha=-\int\frac{1}{\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^2+1}d\frac{\alpha}{\gamma}=-\mathrm{arctg}\,\frac{\alpha}{\gamma}+c.$$

Замечая, что

$$F(\alpha,\beta)\big|_{\alpha=\beta}=F(\beta,\beta)=\int_0^\infty \frac{e^{-\beta x}-e^{-\beta x}}{x}\sin\gamma x dx=0,$$

найдем константу c:

$$0=-\mathrm{arctg}\,\frac{\beta}{\gamma}+c \quad\Rightarrow\quad c=\mathrm{arctg}\,\frac{\beta}{\gamma}.$$

Итак,

$$F(\alpha,\beta)=\mathrm{arctg}\,\frac{\beta}{\gamma}-\mathrm{arctg}\,\frac{\alpha}{\gamma}.$$

49. Интеграл Эйлера-Пуассона

Условия.

Пользуясь интегралом Эйлера-Пуассона, найти интегралы, зависящие от параметра.	
№ 49.1. $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}dx \quad (\alpha,\beta>0)$	**№ 49.1.** $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{\sqrt{x^3}}dx \quad (\alpha,\beta>0)$
№ 49.2. $\int\limits_0^\infty e^{-\left(x^2+\frac{\alpha^2}{x^2}\right)}dx$	**№ 49.2.** $\int\limits_0^\infty e^{-\left(x+\frac{a}{x}\right)}\frac{1}{\sqrt{x}}dx \quad (a\geq 0)$
№ 49.3. $\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x^2}\cos\beta x dx \quad (\alpha>0)$	**№ 49.3.** $\int\limits_0^\infty xe^{-\alpha x^2}\sin\beta x dx \quad (\alpha>0)$
№ 49.4. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos\beta x}{1+x^2}dx$	**№ 49.4.** $\int\limits_0^\infty \frac{x\sin\beta x}{1+x^2}dx$

Теория.

Интеграл Эйлера-Пуассона равен:

$$\boxed{\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

Решения.

№ 49.1.

$$F(\alpha,\beta)=\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}dx \quad (\alpha,\beta>0).$$

Найдем функцию $F(\alpha,\beta)$ дифференцированием под знаком интеграла по параметру α.

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}F(\alpha,\beta)=\frac{\partial}{\partial\alpha}\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}dx=\int\limits_0^\infty \frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}dx=\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2}(-x^2)}{x^2}dx=-\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x^2}dx=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int\limits_0^\infty e^{-\left(\sqrt{\alpha}x\right)^2}d(\sqrt{\alpha}x)=-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int\limits_0^\infty e^{-y^2}dy=-\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}}$$

$\Rightarrow$

$$F(\alpha,\beta)=\int\frac{\partial}{\partial\alpha}F(\alpha,\beta)d\alpha=-\int\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}}d\alpha=-\sqrt{\pi}\sqrt{\alpha}+c.$$

Замечая, что

$$F(\alpha,\beta)\big|_{\alpha=\beta}=F(\beta,\beta)=\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\beta x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}dx=0,$$

найдем константу c:

$0=-\sqrt{\pi}\sqrt{\beta}+c \quad\Rightarrow\quad c=\sqrt{\pi}\sqrt{\beta}$.

Итак,

$$\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}dx=\sqrt{\pi}\left(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}\right).$$

№ 49.2.

$$F(\alpha)=\int_0^\infty e^{-\left(x^2+\frac{\alpha^2}{x^2}\right)}dx.$$

Найдем функцию $F(\alpha)$ дифференцированием под знаком интеграла по параметру α. Заметим, что функция $F(\alpha)$ четная, так что достаточно рассмотреть случай $\alpha \geq 0$:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}F(\alpha)=\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_0^\infty e^{-\left(x^2+\frac{\alpha^2}{x^2}\right)}dx=\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial\alpha}e^{-\left(x^2+\frac{\alpha^2}{x^2}\right)}dx=\int_0^\infty e^{-\left(x^2+\frac{\alpha^2}{x^2}\right)}\left(-\frac{2\alpha}{x^2}\right)dx=$$

$$=2\int_0^\infty e^{-\left(x^2+\frac{\alpha^2}{x^2}\right)}d\left(\frac{\alpha}{x}\right)=\begin{bmatrix} y=\dfrac{\alpha}{x}\Rightarrow x=\dfrac{\alpha}{y} \\ 0\xrightarrow{x}\infty\Rightarrow\infty\xrightarrow{y}0\end{bmatrix}=2\int_\infty^0 e^{-\left(\frac{\alpha^2}{y^2}+y^2\right)}dy=-2\int_0^\infty e^{-\left(y^2+\frac{\alpha^2}{y^2}\right)}dy=-2F(\alpha)$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}F(\alpha)=-2F(\alpha)\ \Rightarrow\frac{\frac{\partial}{\partial\alpha}F(\alpha)}{F(\alpha)}=-2\ \Rightarrow\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln F(\alpha)=-2\ \Rightarrow\ln F(\alpha)=-2\alpha+\ln c\ \Rightarrow F(\alpha)=ce^{-2\alpha}.$$

Замечая, что

$$F(\alpha)\big|_{\alpha=0}=F(0)=\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

найдем константу c:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}=ce^{-2\cdot0}\quad\Rightarrow\quad c=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Итак,
$$\int_0^\infty e^{-\left(x^2+\frac{\alpha^2}{x^2}\right)}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2|\alpha|}.$$

№ 49.3.

$$F(\alpha,\beta)=\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\cos\beta x dx.$$

Найдем функцию $F(\alpha,\beta)$ дифференцированием под знаком интеграла по параметру β:

$$\frac{\partial}{\partial\beta}F(\alpha,\beta)=\frac{\partial}{\partial\beta}\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\cos\beta x dx=\int_0^\infty\frac{\partial}{\partial\beta}e^{-\alpha x^2}\cos\beta x dx=-\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\sin\beta x\cdot x\,dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\sin\beta x\,dx^2=\frac{1}{2\alpha}\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\sin\beta x\,d\left(-\alpha x^2\right)=\frac{1}{2\alpha}\int_0^\infty\sin\beta x\,de^{-\alpha x^2}=$$

$$=\frac{1}{2\alpha}\left(\sin\beta x\,e^{-\alpha x^2}\Big|_0^\infty-\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\,d\sin\beta x\right)=\frac{1}{2\alpha}\left(0-\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\cos\beta x\cdot\beta\,dx\right)=$$

$$=-\frac{\beta}{2\alpha}\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\cos\beta x\,dx=-\frac{\beta}{2\alpha}F(\alpha,\beta).$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}F(\alpha,\beta)=-\frac{\beta}{2\alpha}F(\alpha,\beta)\ \Rightarrow\frac{\frac{\partial}{\partial\beta}F(\alpha,\beta)}{F(\alpha,\beta)}=-\frac{\beta}{2\alpha}\ \Rightarrow\frac{\partial}{\partial\beta}\ln F(\alpha,\beta)=-\frac{\beta}{2\alpha}$$

$$\Rightarrow\ln F(\alpha,\beta)=-\frac{\beta^2}{4\alpha}+\ln c\ \Rightarrow F(\alpha,\beta)=ce^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}.$$

Замечая, что

$$F(\alpha,\beta)\big|_{\beta=0}=F(\alpha,0)=\int_0^{\infty}e^{-\alpha x^2}\,dx=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_0^{\infty}e^{-\alpha x^2}\,d\sqrt{\alpha}x=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_0^{\infty}e^{-y^2}\,dy=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}},$$

найдем константу c:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}}=ce^0 \quad\Rightarrow\quad c=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}}.$$

Итак,

$$\int_0^{\infty}e^{-\alpha x^2}\cos\beta x dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}}e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}.$$

Замечание. По существу найдено ***Cos*** - преобразование функции $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$F_c(y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}f(x)\cos yx dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}\cos yx dx=e^{-\frac{y^2}{2}},$$

как видно совпадающее с самой функцией.

№ 49.4.

$$F(\beta)=\int_0^{\infty}\frac{\cos\beta x}{1+x^2}dx$$

Заметим, что функция $F(\beta)$ четная, так что достаточно рассмотреть случай $\beta\ge 0$. Найдем функцию $F(\beta)$ "интегрированием по параметру". Воспользуемся представлением:

$$\frac{1}{1+x^2}=\int_0^{\infty}e^{-\alpha(1+x^2)}d\alpha.$$

Тогда:

$$F(\beta)=\int_0^{\infty}\frac{\cos\beta x}{1+x^2}dx=\int_0^{\infty}\cos\beta x\frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^{\infty}\cos\beta x\left(\int_0^{\infty}e^{-\alpha(1+x^2)}d\alpha\right)dx=\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty}\cos\beta x e^{-\alpha(1+x^2)}dx\right)d\alpha=$$

$$=\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty}\cos\beta x e^{-\alpha-\alpha x^2}dx\right)d\alpha=\int_0^{\infty}e^{-\alpha}\left(\int_0^{\infty}\cos\beta x e^{-\alpha x^2}dx\right)d\alpha=[\text{см. } \textbf{№ 49.3.}]=\int_0^{\infty}e^{-\alpha}\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}}e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}d\alpha=$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^{\infty}e^{-\alpha-\frac{\beta^2}{4\alpha}}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}d\alpha=\sqrt{\pi}\int_0^{\infty}e^{-\alpha-\frac{\beta^2}{4\alpha}}d\sqrt{\alpha}=\sqrt{\pi}\int_0^{\infty}e^{-\left(x^2+\frac{\beta^2}{4x^2}\right)}dx=[\text{см. } \textbf{№ 49.2.}]=\sqrt{\pi}\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2\frac{\beta}{2}}=\frac{\pi}{2}e^{-\beta}.$$

Итак,

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos\beta x}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2}e^{-|\beta|}.$$

Сравнить с **№ 47.5.**

50. Эйлеровы интегралы

Условия.

С помощью Эйлеровых интегралов найти следующие интегралы.	
№ 50.1. $\int_0^\infty e^{-x^5}\sqrt{x^{13}}\,dx$	**№ 50.1.** $\int_0^\infty e^{-x^3}\sqrt{x^{13}}\,dx$
№ 50.2. $\int_0^1 x^4\sqrt{1-x^2}^{\,7}\,dx$	**№ 50.2.** $\int_0^1 x^{13}\sqrt[3]{1-x^3}^{\,4}\,dx$
№ 50.3. $\int_0^1 \sqrt[6]{x}\,\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}^{\,11}\,dx$	**№ 50.3.** $\int_0^1 \sqrt[4]{x^5}\,\sqrt{1-\sqrt{x}}^{\,3}\,dx$
№ 50.4. $\int_0^\infty \frac{\sqrt[4]{x}^{\,7}}{(1+x)^6}\,dx$	**№ 50.4.** $\int_0^\infty \frac{\sqrt[6]{x}^{\,11}}{(1+x)^5}\,dx$
№ 50.5. $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}^{\,11}}{(1+x^3)^6}\,dx$	**№ 50.5.** $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}^{\,13}}{(1+x^2)^6}\,dx$
№ 50.6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 x\cos^6 x\,dx$	**№ 50.6.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x\cos^4 x\,dx$
№ 50.7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^{11} x\cos^9 x}\,dx$	**№ 50.7.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^7 x\cos^{13} x}\,dx$

Теория.

Гамма-функция

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}dx \quad (\alpha>0).$$

Основное свойство

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha).$$

Учитывая, что

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-x}dx=1,$$

из основного свойства вытекает:

$$\Gamma(n+1)=n! \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ldots).$$

Отметим:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty e^{-x}x^{\frac{1}{2}-1}dx=\int_0^\infty e^{-x}x^{-\frac{1}{2}}dx=2\int_0^\infty e^{-x}dx^{\frac{1}{2}}=2\int_0^\infty e^{-y^2}dy=\sqrt{\pi}.$$

Имеет место формула дополнения:

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)=\frac{\pi}{\sin\alpha\pi} \quad (0<\alpha<1).$$

Бета-функция

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx \quad (\alpha,\beta>0)$$

связана с гамма-функцией формулой

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Решения.

№ 50.1.

$$\int_0^{\infty} e^{-x^5}\sqrt{x^{13}}\,dx=\begin{bmatrix} x^5=y\Rightarrow x=y^{\frac15}\Rightarrow dx=\frac15 y^{-\frac45}dy \\ 0\xrightarrow{x}\infty\Rightarrow 0\xrightarrow{y}\infty \end{bmatrix}=\int_0^{\infty} e^{-y}\left(y^{\frac15}\right)^{\frac{13}{2}}\frac15 y^{-\frac45}dy=\frac15\int_0^{\infty} e^{-y}y^{\frac12}dy=$$

$$=\frac15\int_0^{\infty} e^{-y}y^{\frac32-1}dy=\frac15\Gamma\left(\frac32\right)=\frac15\Gamma\left(\frac12+1\right)=\frac15\cdot\frac12\Gamma\left(\frac12\right)=\frac15\cdot\frac12\cdot\sqrt{\pi}=\frac{\sqrt{\pi}}{10}.$$

№ 50.2.

$$\int_0^1 x^4\,\sqrt{1-x^2}^{\,7}dx=\begin{bmatrix} x^2=y\Rightarrow x=y^{\frac12}\Rightarrow dx=\frac12 y^{-\frac12}dy \\ 0\xrightarrow{x}1\Rightarrow 0\xrightarrow{y}1 \end{bmatrix}=\int_0^1 y^2\,\sqrt{1-y}^{\,7}\,\frac12 y^{-\frac12}dy=$$

$$=\frac12\int_0^1 y^{\frac32}\,(1-y)^{\frac72}dy=\frac12\int_0^1 y^{\frac52-1}\,(1-y)^{\frac92-1}dy=\frac12\mathrm{B}\left(\frac52,\ \frac92\right)=\frac12\frac{\Gamma\left(\frac52\right)\Gamma\left(\frac92\right)}{\Gamma\left(\frac52+\frac92\right)}=$$

$$=\frac12\frac{\Gamma\left(\frac52\right)\Gamma\left(\frac72+1\right)}{\Gamma(7)}=\frac12\frac{\Gamma\left(\frac52\right)\frac72\Gamma\left(\frac72\right)}{\Gamma(6+1)}=\frac12\frac{\Gamma\left(\frac52\right)\frac72\Gamma\left(\frac52+1\right)}{6!}=\frac12\frac{\Gamma\left(\frac52\right)\frac72\cdot\frac52\Gamma\left(\frac52\right)}{6!}=$$

$$=\frac12\cdot\frac72\cdot\frac52\cdot\frac1{6!}\left(\Gamma\left(\frac52\right)\right)^2=\frac12\cdot\frac72\cdot\frac52\cdot\frac1{6!}\left(\Gamma\left(\frac32+1\right)\right)^2=\frac12\cdot\frac72\cdot\frac52\cdot\frac1{6!}\left(\frac32\Gamma\left(\frac32\right)\right)^2=$$

$$=\frac12\cdot\frac72\cdot\frac52\cdot\frac1{6!}\left(\frac32\Gamma\left(\frac12+1\right)\right)^2=\frac12\cdot\frac72\cdot\frac52\cdot\frac1{6!}\left(\frac32\cdot\frac12\Gamma\left(\frac12\right)\right)^2=\frac12\cdot\frac72\cdot\frac52\cdot\frac1{6!}\left(\frac32\cdot\frac12\cdot\sqrt{\pi}\right)^2=\frac{7\pi}{2^{11}}.$$

№ 50.3.

$$\int_0^1 \sqrt[6]{x}\,\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}^{\,11}dx=\begin{bmatrix} \sqrt{x}=y\Rightarrow x=y^2\Rightarrow dx=2ydy \\ 0\xrightarrow{x}1\Rightarrow 0\xrightarrow{y}1 \end{bmatrix}=\int_0^1 \sqrt[3]{y}\,\sqrt[3]{1-y}^{\,11}\,2ydy=$$

$$=2\int_0^1 y^{\frac43}\,(1-y)^{\frac{11}{3}}dy=2\int_0^1 y^{\frac73-1}\,(1-y)^{\frac{14}{3}-1}dy=2\mathrm{B}\left(\frac73,\ \frac{14}{3}\right)=2\frac{\Gamma\left(\frac73\right)\Gamma\left(\frac{14}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac73+\frac{14}{3}\right)}=$$

$$=2\frac{\Gamma\left(\frac43+1\right)\Gamma\left(\frac{11}{3}+1\right)}{\Gamma(6+1)}=2\frac{\frac43\Gamma\left(\frac43\right)\frac{11}{3}\Gamma\left(\frac{11}{3}\right)}{6!}=2\frac{\frac43\Gamma\left(\frac13+1\right)\frac{11}{3}\Gamma\left(\frac83+1\right)}{6!}=2\frac{\frac43\cdot\frac13\Gamma\left(\frac13\right)\frac{11}{3}\cdot\frac83\Gamma\left(\frac83\right)}{6!}=$$

$$=2\frac{\frac43\cdot\frac13\Gamma\left(\frac13\right)\frac{11}{3}\cdot\frac83\Gamma\left(\frac53+1\right)}{6!}=2\frac{\frac43\cdot\frac13\Gamma\left(\frac13\right)\frac{11}{3}\cdot\frac83\cdot\frac53\Gamma\left(\frac53\right)}{6!}=2\frac{\frac43\cdot\frac13\Gamma\left(\frac13\right)\frac{11}{3}\cdot\frac83\cdot\frac53\Gamma\left(\frac23+1\right)}{6!}=$$

$$=2\frac{\frac43\cdot\frac13\Gamma\left(\frac13\right)\frac{11}{3}\cdot\frac83\cdot\frac53\cdot\frac23\Gamma\left(\frac23\right)}{6!}=2\frac{4\cdot11\cdot8\cdot5\cdot2}{3^6\cdot6!}\Gamma\left(\frac13\right)\Gamma\left(\frac23\right)=\frac{55\cdot2^7}{3^6\cdot6!}\frac{\pi}{\sin\frac13\pi}=\frac{55\cdot2^7}{3^6\cdot6!}\frac{2\pi}{\sqrt3}=\frac{11\cdot2^4\pi}{3^8\cdot\sqrt3}.$$

№ 50.4.

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt[4]{x}^7}{(1+x)^6}dx=\int_0^\infty \sqrt[4]{x}^7\left(\frac{1}{1+x}\right)^6 dx=\left[\begin{array}{c}\frac{1}{1+x}=y\Rightarrow x=\frac{1-y}{y}\Rightarrow dx=-\frac{1}{y^2}dy\\ 0\xrightarrow{x}\infty\Rightarrow 1\xrightarrow{y}0\end{array}\right]=-\int_1^0 \sqrt[4]{\frac{1-y}{y}}^7\, y^6\,\frac{1}{y^2}dy=$$

$$=\int_0^1 y^{\frac{9}{4}}(1-y)^{\frac{7}{4}}dy=\int_0^1 y^{\frac{13}{4}-1}(1-y)^{\frac{7}{4}-1}dy=\mathrm{B}\left(\frac{13}{4},\ \frac{11}{4}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{13}{4}\right)\Gamma\left(\frac{11}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{13}{4}+\frac{11}{4}\right)}=\frac{\Gamma\left(\frac{9}{4}+1\right)\Gamma\left(\frac{7}{4}+1\right)}{\Gamma(5+1)}=$$

$$=\frac{\frac{9}{4}\Gamma\left(\frac{9}{4}\right)\frac{7}{4}\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)}{5!}=\frac{\frac{9}{4}\Gamma\left(\frac{5}{4}+1\right)\frac{7}{4}\Gamma\left(\frac{3}{4}+1\right)}{5!}=\frac{\frac{9}{4}\cdot\frac{5}{4}\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\frac{7}{4}\cdot\frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{5!}=\frac{\frac{9}{4}\cdot\frac{5}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}+1\right)\frac{7}{4}\cdot\frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{5!}=$$

$$=\frac{\frac{9}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\frac{7}{4}\cdot\frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{5!}=\frac{9\cdot5\cdot7\cdot3}{4^5\cdot5!}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{7\cdot3^2}{2^{13}}\frac{\pi}{\sin\frac{1}{4}\pi}=\frac{7\cdot3^2\sqrt{2}}{2^{13}}\pi.$$

№ 50.5.

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}^{11}}{(1+x^3)^6}dx=\int_0^\infty \sqrt{x}^{11}\left(\frac{1}{1+x^3}\right)^6 dx=\left[\begin{array}{c}\frac{1}{1+x^3}=y\Rightarrow x=\left(\frac{1-y}{y}\right)^{\frac{1}{3}}\Rightarrow dx=-\frac{1}{3}\left(\frac{1-y}{y}\right)^{-\frac{2}{3}}\frac{1}{y^2}dy\\ 0\xrightarrow{x}\infty\Rightarrow 1\xrightarrow{y}0\end{array}\right]=$$

$$=-\frac{1}{3}\int_1^0 \sqrt{\frac{1-y}{y}}^{\frac{11}{3}}\, y^6\left(\frac{1-y}{y}\right)^{-\frac{2}{3}}\frac{1}{y^2}dy=\frac{1}{3}\int_0^1 y^{\frac{17}{6}}(1-y)^{\frac{7}{6}}dy=\frac{1}{3}\int_0^1 y^{\frac{23}{6}-1}(1-y)^{\frac{13}{6}-1}dy=\frac{1}{3}\mathrm{B}\left(\frac{23}{6},\ \frac{13}{6}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\frac{\Gamma\left(\frac{23}{6}\right)\left(\frac{13}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{23}{6}+\frac{13}{6}\right)}=\frac{1}{3}\frac{\Gamma\left(\frac{17}{6}+1\right)\Gamma\left(\frac{7}{6}+1\right)}{\Gamma(5+1)}=\frac{1}{3}\frac{\frac{17}{6}\Gamma\left(\frac{17}{6}\right)\frac{7}{6}\Gamma\left(\frac{7}{6}\right)}{5!}=\frac{1}{3}\frac{\frac{17}{6}\Gamma\left(\frac{11}{6}+1\right)\frac{7}{6}\Gamma\left(\frac{1}{6}+1\right)}{5!}=$$

$$=\frac{1}{3}\frac{\frac{17}{6}\cdot\frac{11}{6}\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)\frac{7}{6}\cdot\frac{1}{6}\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{5!}=\frac{1}{3}\frac{\frac{17}{6}\cdot\frac{11}{6}\Gamma\left(\frac{5}{6}+1\right)\frac{7}{6}\cdot\frac{1}{6}\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{5!}=\frac{1}{3}\frac{\frac{17}{6}\cdot\frac{11}{6}\cdot\frac{5}{6}\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\frac{7}{6}\cdot\frac{1}{6}\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{5!}$$

$$=\frac{1}{3}\frac{17\cdot11\cdot5\cdot7}{6^5 5!}\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(1-\frac{5}{6}\right)=\frac{17\cdot11\cdot7}{3\cdot6^5\cdot4!}\frac{\pi}{\sin\frac{5}{6}\pi}=\frac{17\cdot11\cdot7}{3\cdot6^5\cdot4!}2\pi=\frac{17\cdot11\cdot7}{6^7}\pi$$

№ 50.6.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^8 x\cos^6 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 x\cos^5 x\ \sin x\ \cos x\ dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 x\cos^5 x\ \sin x\ d\sin x=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 x)^{\frac{7}{2}}(1-\sin^2 x)^{\frac{5}{2}}\ d\sin^2 x=\left[\begin{array}{c}\sin^2 x=y\\ 0\xrightarrow{x}\frac{\pi}{2}\Rightarrow 0\xrightarrow{y}1\end{array}\right]=\frac{1}{2}\int_0^1 y^{\frac{7}{2}}(1-y)^{\frac{5}{2}}\ dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 y^{\frac{9}{2}-1}(1-y)^{\frac{7}{2}-1}dy=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{9}{2},\ \frac{7}{2}\right)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{9}{2}+\frac{7}{2}\right)}=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{\Gamma(7+1)}=\frac{1}{2}\frac{\frac{7}{2}\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{7!}=$$

$$=\frac{1}{2^2\cdot6!}\left(\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\right)^2=\frac{1}{2^2\cdot6!}\left(\Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right)\right)^2=\frac{1}{2^2\cdot6!}\left(\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\right)^2=\frac{1}{2^2\cdot6!}\left(\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)\right)^2=\frac{1}{2^2\cdot6!}\left(\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right)^2=$$

$$=\frac{1}{2^2\cdot6!}\left(\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)\right)^2=\frac{1}{2^2\cdot6!}\left(\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2=\frac{5}{2^{12}}\pi.$$

№ 50.7.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^{11} x \cos^9 x}\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{11}{2}} x \; \cos^{\frac{9}{2}} x\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{9}{2}} x \; \cos^{\frac{7}{2}} x \; \sin x \; \cos x \; dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2 x\right)^{\frac{9}{4}} \left(1-\sin^2 x\right)^{\frac{7}{4}} \; d\sin^2 x = \left[\begin{array}{c} \sin^2 x = y \\ 0 \xrightarrow{x} \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \xrightarrow{y} 1 \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 y^{\frac{9}{4}} \left(1-y\right)^{\frac{7}{4}} \; dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 y^{\frac{13}{4}-1} \left(1-y\right)^{\frac{11}{4}-1} \; dy = \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\; \frac{13}{4}, \; \frac{11}{4}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{13}{4}\right)\Gamma\left(\frac{11}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{13}{4}+\frac{11}{4}\right)} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{9}{4}+1\right)\Gamma\left(\frac{7}{4}+1\right)}{\Gamma(5+1)} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\frac{9}{4}\Gamma\left(\frac{9}{4}\right)\frac{7}{4}\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)}{5!} = \frac{1}{2} \frac{\frac{9}{4}\Gamma\left(\frac{5}{4}+1\right)\frac{7}{4}\Gamma\left(\frac{3}{4}+1\right)}{5!} = \frac{1}{2} \frac{\frac{9}{4}\cdot\frac{5}{4}\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\frac{7}{4}\cdot\frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{5!} = \frac{1}{2} \frac{\frac{9}{4}\cdot\frac{5}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}+1\right)\frac{7}{4}\cdot\frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{5!} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\frac{9}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\frac{7}{4}\cdot\frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{5!} = \frac{9\cdot 5\cdot 7\cdot 3}{2\cdot 4^5\cdot 5!}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right) = \frac{9\cdot 7}{4^7}\frac{\pi}{\sin\frac{1}{4}\pi} = \frac{9\cdot 7\cdot\sqrt{2}}{4^7}\pi.$$

<u>Список литературы</u>

[1] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – II, III т.– М. Наука, 1966 и последующие.

[2] Радченко О.М. Математичний аналіз. Ч. 2: Ряди та інтеграли з параметром. Функції декількох змінних.– К.:“ТВіМС”, 2000.

[3] Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу.– М. Наука, 1977 и последующие.

[4] Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа.– М. Наука, 1963 и последующие.