ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.Н. КАРАЗИНА
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Аналитическая геометрия

Волченко Анатолий Павлович

ХАРЬКОВ 2003

Оглавление

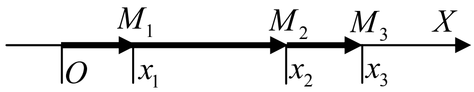
Направленный отрезок

Система координат

Ось – прямая с указанным направлением.

OM – отрезок. Отрезок имеет длину и направление. $OM = x$, x – координата точки М. Между точками оси и вещественными числами оси существует взаимосвязь:

$OM_1 = x_1 \quad OM_2 = x_2 \quad OM_1 + OM_2 = x_1 + x_2 = OM_3 = x_3$.



Сложить отрезки – это значит перенести начало одного в конец другого.

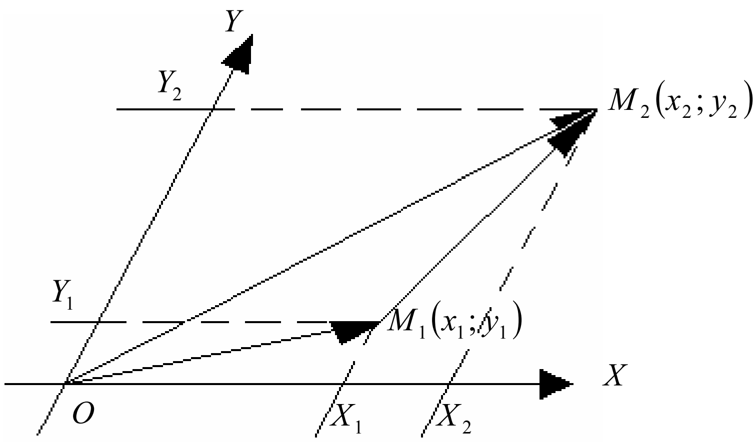
Одинаковые отрезки имеют равные длины и одинаковые направления.

OM_2-OM_1 =x_2-x_1 $\quad |x_2-x_1|$ - длина отрезка.

OM направлен вправо, если $x_2>x_1$;и направлен влево, если $x_2<x_1$;

Декартовы координаты на плоскости

Две пересекающиеся прямые образуют Декартову систему координат, если угол между прямыми $\frac{\pi}{2}$,то это ортогональная система координат.



$M(x;y)$ – точка на Декартовой плоскости. x,y – координаты точки M на плоскости. Каждой точке соответствует пара чисел (координат) и наоборот.

$M_1(x_1;y_1) \qquad M_2(x_2;y_2) \qquad OM_2 - OM_1 = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$.

Декартовы координаты в пространстве

Три оси, пересекающиеся в одной точке – Декартова система координат в пространстве. Если три оси перпендикулярны между собой, то это ортогональная система координат.

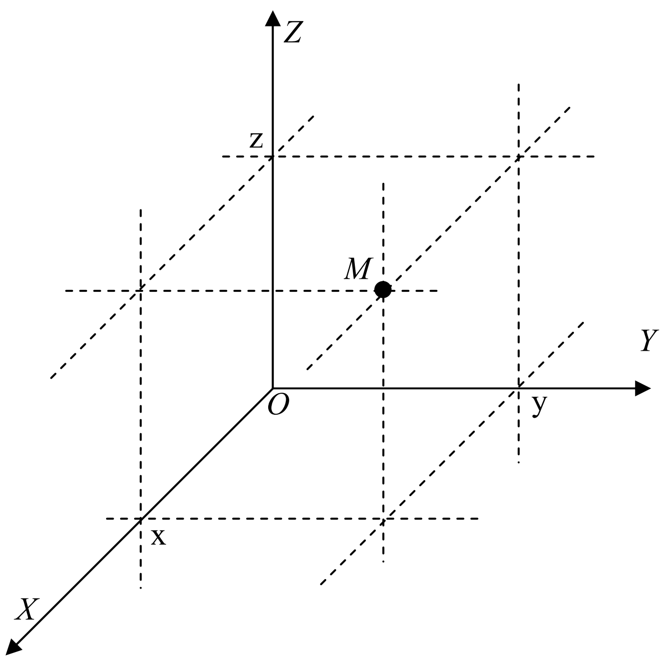
Построение:

M(x;y;z) – точка в пространстве с координатами x,y,z.

Через точку x, параллельно плоскости zoy проводим первую плоскость.

Через точку y параллельно плоскости xoz проводим вторую плоскость.

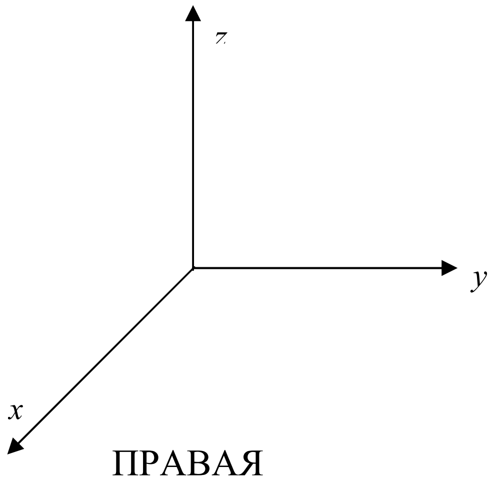
Через точку z параллельно плоскости



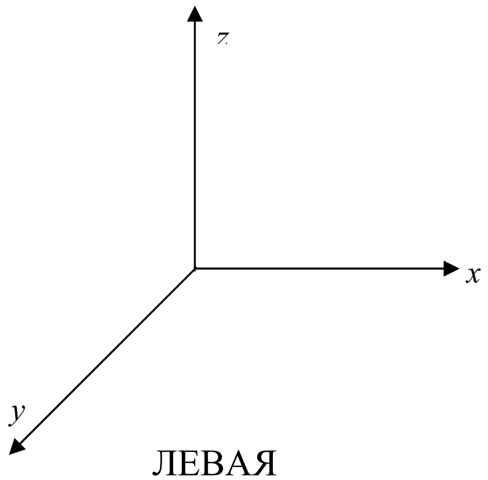
xoy проводим третью плоскость.

Первые две плоскости пересеклись по прямой параллельной оси z. Эта прямая, пересекаясь с третьей плоскостью, образует точку M.

Различают правую и левую систему координат.



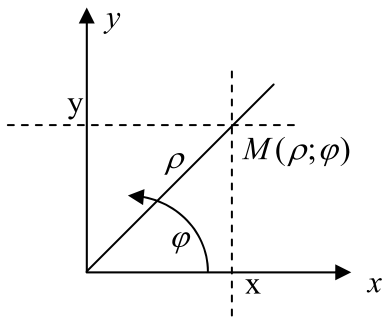
ПРАВАЯ



ЛЕВАЯ

Эти системы несовместимы!

Полярная система координат



$M(\rho;\varphi)$ - точка в полярной системе координат.

$\rho = OM$ - расстояние от начала координат до точки M $\rho \geq 0$. φ - угол, который отсчитывается от положительного направления оси x против часовой стрелки.

O – полюс.

Построение:

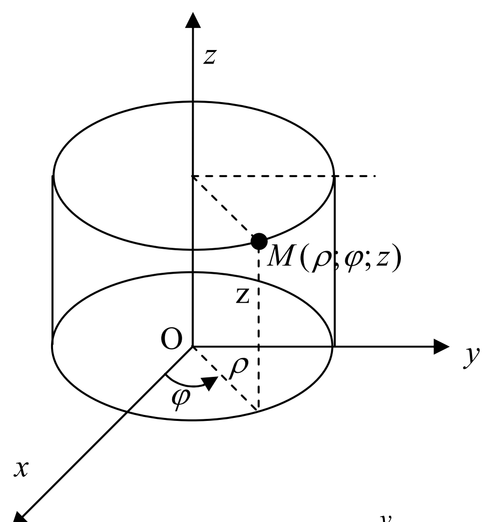
от неподвижного радиуса OX откладываем угол φ и проводим луч. На луче откладываем длину ρ и ставим точку M.

Соотношения между прямоугольными и полярными координатами:

$x = \rho \cdot \cos\varphi \qquad y = \rho \cdot \sin\varphi \qquad tg\varphi = \dfrac{y}{x} \qquad \rho \in [0;\infty) \qquad \varphi \in [0;2\pi]$.

Цилиндрическая система координат

$M(\rho;\varphi;z)$ - точка в цилиндрической системе координат.



$\rho = OM_X$ - радиус цилиндра.

φ- угол, который отсчитывается от положительного направления оси x против часовой стрелки.

$z = OM_Z$ - высота цилиндра.

Построение:

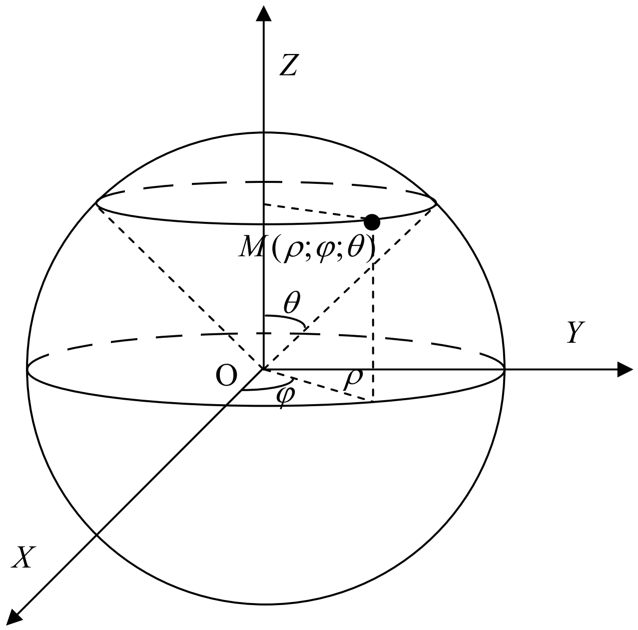
радиусом ρ проводим цилиндр с осью z. Под углом φ - плоскость, содержащую прямую z. Эта плоскость пересечет цилиндр по прямой параллельной оси z. На этой прямой откладываем отрезок , равный z.

Соотношения между прямоугольными и полярными координатами:

$x = \rho \cdot \cos\varphi \qquad y = \rho \cdot \sin\varphi \qquad tg\varphi = \dfrac{y}{x} \qquad \rho \in [0;\infty) \qquad \varphi \in [0;2\pi] \qquad z = z.$

Сферическая система координат

$M(\rho;\varphi;\theta)$ - точка в сферической системе координат.



$\rho = OM_X$ - радиус сферы.

φ- угол, который отсчитывается от положительного направления оси *x*, против часовой стрелки.

θ- угол, который отсчитывается от положительного направления оси *z* против часовой стрелки.

Построение:

радиусом ρ проводим сферу с центром в точке *O*. Конус с углом θ с вершиной в точке *O*. Под углом φ - плоскость, содержащую прямую *z*. На пересечении сферы, конуса и плоскости будет лежать точка *M*.

Соотношения между прямоугольными и полярными координатами:

$x = \rho \cdot \cos\varphi \cdot \sin\theta$ $\quad y = \rho \cdot \sin\varphi \cdot \sin\theta$;

$z = \rho \sin\theta \quad \rho \in [0;\infty) \quad \varphi \in [0;2\pi] \quad \theta \in [0;\pi]$.

Вектор. Линейные операции над вектором

Вектор – направленный отрезок прямой. Вектор характеризуется величиной и направлением.

$\vec{AB} = \vec{b}$

А–начало вектора, В–конец вектора, b - величина, направление от А к В.

Типы векторов:

1. Свободные векторы – имеют длину и направление, но не указано начало.
2. Привязанные векторы - имеют длину, направление и указано общее начало.
3. Скользящие векторы – векторы лежащие на одной прямой.

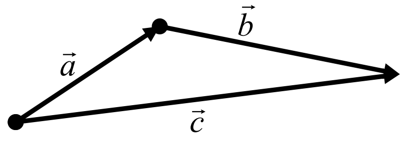
Если путем параллельного переноса векторы можно совместить, то они равны.

Существует нулевой вектор - $\bar{0}$: у него длина равна нулю, а направление не определено.

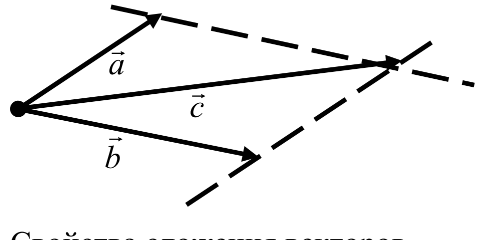
Линейные операции над векторами

1.Сложение векторов.

а).Сумма двух векторов $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$, определяемая по правилу треугольника. Начало вектора $\vec{b}$ совместить с концом вектора $\vec{a}$. Отрезок, соединяющий начало $\vec{a}$ с концом $\vec{b}$, и есть искомый вектор $\vec{c}$. Его направление от $\vec{a}$ к $\vec{b}$.



в).Сумма двух векторов, определяемая по правилу параллелограмма.



Начало вектора $\vec{a}$ совместить с началом вектора $\vec{b}$. Провести прямые через конец вектора $\vec{a}$ параллельно вектору $\vec{b}$, а через конец вектора $\vec{b}$ параллельно вектору $\vec{a}$. Соединить н;ачала векторов и точку пересечения прямых отрезком - это искомый вектор $\vec{c}$. Его направление от начала векторов к точке пересечения.

Свойства сложения векторов.

а). $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;

в). $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$;

с). $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.

d). $\forall \vec{a} \exists \vec{a}'$ для любого вектора $\vec{a}$ существует вектор $\vec{a}'$ такой, что $\vec{a} + \vec{a}' = \vec{0}$

2.Умножение вектора на вещественное число.

$\vec{a}$ - вектор, λ - вещественное число.

Произведением вектора $\vec{a}$ на число λ называется вектор $\vec{b}$, образованный по правилу: длина вектора $|\vec{b}| = b = a \cdot |\lambda|$, где a и b длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Вектор $\vec{b}$ коллинеарный и сонаправленный с вектором $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно направленный, если $\lambda < 0$.

Свойства умножения:

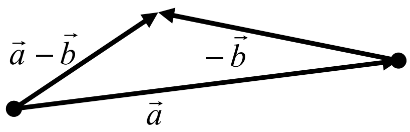
а). $\lambda\vec{a} + \lambda\vec{b} = \lambda(\vec{a} + \vec{b})$;

в). $\lambda\vec{a} + \beta\vec{a} = \vec{a}(\lambda + \beta)$;

с). $\lambda \cdot (\beta\vec{a}) = (\lambda\beta) \cdot \vec{a}$.

3.Разность векторов.

Если нам нужно от вектора $\vec{a}$ отнять вектор $\vec{b}$, мы представляем вектор $\vec{b}$ как вектор $-\vec{b}$. У векторов $\vec{b}$ и $-\vec{b}$ одинаковая длина, но противоположные направления. А дальше складываем векторы $\vec{a}$ и $-\vec{b}$.



Свойства разности:

а). $\vec{a} - \vec{b} = \vec{d}$;

в). $\vec{a} - \vec{b} + \vec{b} = \vec{d}$;

с). $\vec{a} = \vec{d} + \vec{b}$.

Линейная зависимость и независимость векторов

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \ldots$ - векторы.

$\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \ldots$ - вещественные числа.

α

- линейная комбинация.

Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \ldots$ линейно независимы, если данная линейная комбинация равна $\vec{0}$, лишь при условии ,что $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0, \lambda = 0, \ldots$.

α

$\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0, \lambda = 0, \ldots$

Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \ldots$ линейно зависимы, если данная линейная комбинация равна $\vec{0}$, при условии, что $\alpha \neq 0$, или $\beta \neq 0$, или $\gamma \neq 0$,или $\lambda \neq 0$

α

$\alpha \neq 0$, или $\beta \neq 0$, или $\gamma \neq 0$,или $\lambda \neq 0$

Теорема 1

Если среди векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \ldots$ хотя бы один нулевой, то эти векторы линейно зависимы.

α

Доказательство.

Допустим $\vec{a} = \vec{0}$. Тогда коэффициент α перед ним может равняться любому числу, и линейная комбинация при этом будет равна $\vec{0}$.

Теорема 2.

Если в данной системе n-векторов существует (n-1)-векторов линейно зависимых, то линейно зависимы и n-векторов.

Доказательство.

Допустим, коэффициент β не равен нулю, остальные равны, а линейная комбинация при этом равна нулевому вектору.

$+$ b

Мы имеем право записать $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} + \lambda\vec{d} + = \vec{0}$, если $\lambda = 0$,

и

$\alpha = d$

, если $\lambda \neq 0$. Но
тогда

$\vec{a} = \frac{-\lambda}{\alpha}\vec{b} = \delta$

, то есть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

<u>Теорема 3.</u>

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно зависимы, то они коллинеарные.

И на оборот, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то они линейно зависимы.

Три коллинеарных вектора лежат либо в двух параллельных плоскостях (компланарны), либо в одной плоскости.

<u>Теорема 4.</u>

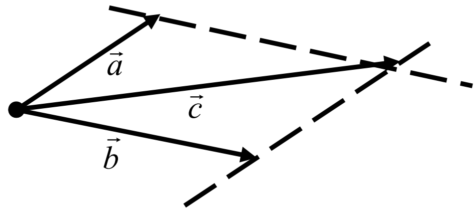
Три вектора линейно зависимы, если они компланарны.

Доказательство.

Пусть векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ - компланарны. Тогда:

$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$,так как любой вектор на плоскости можно представить суммой двух неколлинеарных векторов.

Следовательно $\vec{c} + (-\alpha)\vec{a} + (-\beta)\vec{b} = 0$, т.е. они линейно зависимы.



Базис координат. Линейный базис координат

Рассмотрим множество коллинеарных векторов. Любые два вектора будут линейно зависимы.

Выберем любой вектор $\vec{a}$ и любой вектор $\vec{b}$, так как эти векторы коллинеарны, то $\vec{b} = \lambda \ \vec{a}$.

$\vec{a}$ – базисный вектор. Это значит, что любой вектор из данного множества можно представить как произведение числа λ на базисный вектор $\vec{a}$.

Длина векторов: $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=\lambda|\ \vec{a}|$, а направление вектора $\vec{b}$ определяется числом λ. Сонаправлен с $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно направлен, если $\lambda < 0$.

λ – координата вектора $\vec{b}$ в базисе вектора $\vec{a}$.

Базис координат на плоскости

Рассмотрим множество всех векторов на плоскости. Возьмем два любых не коллинеарных и не нулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Тогда любой вектор $\vec{c}$ можно представить их линейной комбинацией $\alpha \ \vec{a} + \beta \ \vec{b} = \vec{c}$.

$\vec{a},\ \vec{b}$ – базис множества.

$\alpha,\ \beta$ – координаты вектора $\vec{c}$ в базисе $\vec{a},\ \vec{b}$.

Докажем, что существует только один вектор $\vec{c}$ в базисе $\vec{a}, \vec{b}$ с координатами $\alpha,\ \beta$. Предположим, что существует другой вектор $\vec{c}'$ в базисе $\vec{a}, \vec{b}$ с координатами $\alpha',\ \beta''$, равными координатам $\alpha,\ \beta$ соответственно. Вычтем из вектора $\vec{c}$ вектор $\vec{c}'$.

$$\begin{array}{c} \vec{c} = \alpha\,\vec{a} + \overline{\overline{\beta}}\,\vec{b} \\ -\ \vec{c}' = \alpha'\,\vec{a} + \beta'\,\vec{b} \\ \hline \vec{0} = (\alpha - \alpha')\vec{a} + (\beta - \beta')\vec{b} \\ \quad\ \| \qquad\qquad \| \\ \quad\ 0 \qquad\qquad 0 \end{array} \Rightarrow \alpha = \alpha';\ \beta = \beta''$$

Мы видим, что их разность равна нулю, а следовательно, и вектор $\vec{c}$ един.

Пространственный базис

Рассмотрим множество всех векторов пространства. Возьмем три некомпланарных не нулевых вектора $\vec{a},\ \vec{b}, \vec{c}$. Тогда любой вектор $\vec{d}$ можно представить их линейной комбинацией $\alpha\ \ \vec{a}+\beta\ \ \vec{b}+\gamma\ \ \vec{c}=\vec{d}$.

$\vec{a},\ \vec{b}, \vec{c}$ – базис множества.

$\alpha,\ \beta, \gamma$ – координаты вектора $\vec{d}$ в базисе $\vec{a},\ \vec{b}, \vec{c}$.

Итог:

Одномерное пространство – базис состоит из одного вектора в пространстве.

Двумерное пространство – базис состоит из двух векторов в пространстве.

Трехмерное пространство– базис состоит из трех не компланарных векторов в пространстве.

Ортонормированный базис

Ортонормированный базис состоит из трех перпендикулярных единичных векторов, составляющих правую тройку.

$\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ – вектор в ортонормированном базисе.

$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ – единичные векторы (орты).

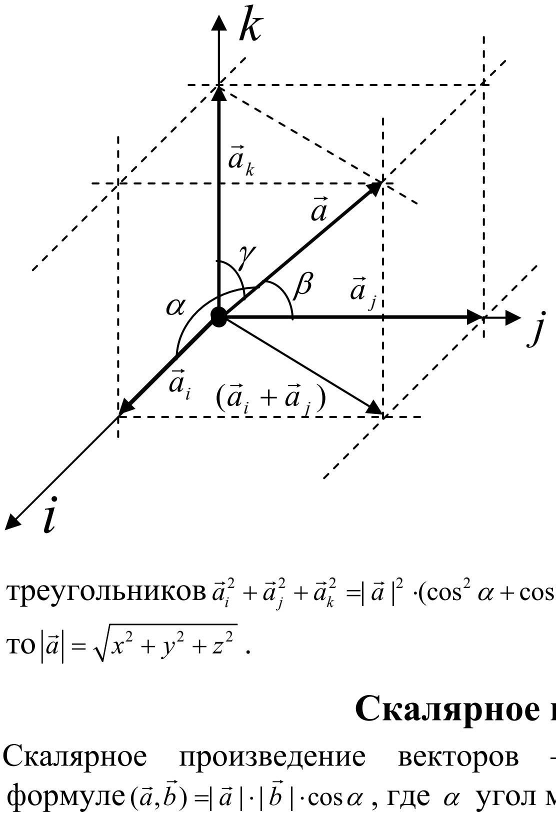
x,y,z – координаты вектора $\vec{a}$.

При умножении вектора на число умножаются координаты, при сложении векторов – складываются координаты.

Длина вектора определяется формулой $|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Доказательство.

Рассмотрим ортонормированный базис $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ с вектором $\vec{a}$.



$\vec{a}_i$ – проекция вектора $\vec{a}$ на орт $\vec{i}$. $\vec{a}_i=|\vec{a}|\cdot\cos\alpha$, где α – угол между вектором $\vec{a}$ и направлением вектора $\vec{i}$.

$\vec{a}_j$ – проекция вектора $\vec{a}$ на орт $\vec{j}$. $\vec{a}_j=|\vec{a}|\cdot\cos\beta$, где β – угол между вектором $\vec{a}$ и направлением вектора $\vec{j}$.

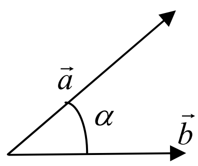
$\vec{a}_k$ – проекция вектора $\vec{a}$ на орт k. $\vec{a}_i=|\vec{a}|\cdot\cos\gamma$, где γ – угол между вектором $\vec{a}$ и направлением вектора k.

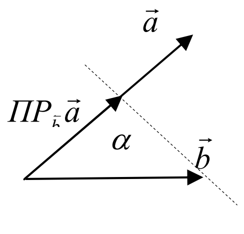
$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы.

Сложим по правилу параллелограмма векторы $\vec{a}_i$ и $\vec{a}_j$, полученный вектор $(\vec{a}_i+\vec{a}_j)$ сложим с вектором $\vec{a}_k$ и получим исходный вектор $\vec{a}$. С другой стороны, из треугольников $\vec{a}_i^2+\vec{a}_j^2+\vec{a}_k^2=|\vec{a}|^2\cdot(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma\ )=\vec{a}^2$. Так как $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$, то $|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Скалярное произведение векторов

Скалярное произведение векторов – это число, определяемое по формуле $(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$, где α угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



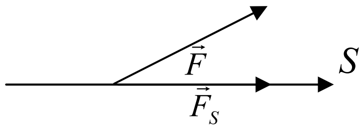


Скалярное произведение – это модуль вектора $\vec{a}$, умноженный на проекцию вектора $\vec{b}$ на направление вектора $\vec{a}$.

Из скалярного произведения векторов можно найти угол между ними: $\cos\alpha=\dfrac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$.

Физический смысл скалярного произведения

Физический смысл скалярного произведения – работа, выполняемая силой $\vec{F}$ на



перемещение *S*.

Алгебраические свойства скалярного произведения

1. $(\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{a})$.

Доказательство.

$(\vec{b},\vec{a})=|\vec{b}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos\alpha=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$

2. $(\lambda\ \ \vec{a},\vec{b})=\alpha(\vec{a},\vec{b})$

Доказательств.

$(\lambda\ \ \vec{a},\vec{b})=|\lambda\ \ \vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha=|\lambda|\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$

$(\lambda\ \ \vec{a},\vec{b})=\lambda(\vec{a},\vec{b})$

3. $((\vec{a}+\vec{b}),\vec{c})=(\vec{a},\vec{c})+(\vec{b},\vec{c})$

Доказательство.

Из определения $(\vec{c},(\vec{a}+\vec{b}))=|\vec{c}|\,ПР_{\vec{C}}(\vec{a}+\vec{b})$, но $ПР_{\vec{C}}(\vec{a}+\vec{b})=ПР_{\vec{C}}(\vec{a})+ПР_{\vec{C}}(\vec{b})$, тогда:

$(\vec{c},(\vec{a}+\vec{b}))=|\vec{c}|\cdot ПР_{\vec{C}}(\vec{a})+|\vec{c}|\cdot ПР_{\vec{C}}(\vec{b})=(\vec{c},\vec{a})+(\vec{c},\vec{b})=(\vec{a},\vec{c})+(\vec{b},\vec{c})$

4. $(\vec{a},\vec{a})=\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^2>0$ ($\vec{a}^2$ – скалярный квадрат).

Доказательство.

Так как угол α между векторами равен нулю, то $\cos\alpha=1$, следовательно, $(\vec{a},\vec{a})=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos 0=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot 1=|\vec{a}|^2=\vec{a}^2$.

Геометрические свойства

Теорема 1.

Необходимым и достаточным условием ортогональности векторов является то, что их скалярное произведение равно нулю.

Доказательство.

Пусть у нас имеется два не нулевых вектора $\vec{a},\vec{b}$.

Необходимость: $(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha=0$ – необходимо, чтобы хотя бы один из множителей был равен нулю, это возможно только при $\cos\alpha=0$, то есть $\alpha=90^\circ$.

Достаточность: $\alpha=90^\circ$, то есть $\cos\alpha=0$, а этого достаточно, чтобы $(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}||\vec{b}|\cdot\cos\alpha=0$.

Переход к алгебре осуществляется путем перехода к базису.

Если $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ – ортогональный базис, то:

$\vec{a}=a_X\vec{i}+a_Y\vec{j}+a_Z\vec{k}$

$\vec{b}=b_X\vec{i}+b_Y\vec{j}+b_Z\vec{k}$

по третьему свойству

$$(\vec{a},\vec{b})=\left((a_X\vec{i}+a_Y\vec{j}+a_Z\vec{k}\ \ ),(b_X\vec{i}+b_Y\vec{j}+b_Z\vec{k})\right)=\left((a_X\vec{i}+a_Y\vec{j}+a_Z\vec{k}\ \ ),b_X\vec{i}\right)+\left((a_X\vec{i}+a_Y\vec{j}+a_Z\vec{k}\ \ ),b_Y\vec{j}\right)+$$

$$+\left((a_X\vec{i}+a_Y\vec{j}+a_Z\vec{k}\ \ ),b_Z\vec{k}\right)$$

Рассмотрим скалярное произведение $\left((a_X\vec{i}+a_Y\vec{j}+a_Z\vec{k}\ \ ),b_X\vec{i}\right)$:

$\left((a_X\vec{i}+a_Y\vec{j}+a_Z\vec{k}\ \ ),b_X\vec{i}\right)=(a_X\vec{i},b_X\vec{i})+(a_Y\vec{j},b_X\vec{i})+(a_Z\vec{k}\ \ ,b_X\vec{i})=(a_X\vec{i},b_X\vec{i})=a_Xb_X(\vec{i},\vec{i})=a_Xb_X$.

Так как угол между векторами $\vec{i}\ \ \vec{j},\vec{i}\ \ \vec{k}$ и $\vec{j}\ \ \vec{k}$ равен 90°, то соответствующие скалярные произведения равны нулю.

Тогда скалярное произведение запишется в виде:

$(\vec a,\vec b)=a_X b_X+a_Y b_Y+a_Z b_Z$. Отсюда, так как $|\vec a|=\sqrt{a_X^2+a_Y^2+a_Z^2}$ и $|\vec b|=\sqrt{b_X^2+b_Y^2+b_Z^2}$, то $\cos\alpha=\dfrac{(a_X b_X+a_Y b_Y+a_Z b_Z)}{\sqrt{a_X^2+a_Y^2+a_Z^2}\cdot\sqrt{b_X^2+b_Y^2+b_Z^2}}$.

Векторное произведение

Векторное произведение $[\vec a,\vec b]=\vec c$ – это вектор, определяемый по правилу: где правило?

Длина определяется по формуле:

$|[\vec a,\vec b]|=|\vec a|\cdot|\vec b|\cdot\sin\alpha$, где $\alpha\le\pi$ – угол между векторами $\vec a$ и $\vec b$.

Направление: этот вектор перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $\vec a$ и $\vec b$, и образует с ними правую тройку.

Механический смысл векторного произведения

$[\vec a,\vec F]=\vec M$ – это момент силы, приложенный к телу. $\vec a$ – плечо, $\vec F$ – сила, приложенная к концу $\vec a$.

Геометрический смысл векторного произведения

$\vec c=[\vec a,\vec b]=|\vec a|\cdot|\vec b|\cdot\sin\alpha=\vec e S$ – это площадь параллелограмма со сторонами $\vec a$ и $\vec b$.

$\vec e$ – единичный вектор, S – площадь параллелограмма.

Алгебраические свойства векторного произведения

1. $[\vec a,\vec b]=-[\vec a,\vec b]$**,** векторы $\vec a$ и $\vec b$ не коммутируют, то есть не перестановочные.
2. $[\lambda\ \ \vec a,\vec b]=\lambda\ \ [\vec a,\vec b]$

Доказательство.

$[\lambda\ \ \vec a,\vec b]=|\lambda\ \ \vec a|\cdot|\vec b|\cdot\sin\alpha=|\lambda|\cdot|\vec a|\cdot|\vec b|\cdot\sin\alpha=\lambda\,|\vec a|\cdot|\vec b|\cdot\sin\alpha=\lambda\ \ [\vec a,\vec b]$

3. $[\vec a,(\vec b+\vec c)]=[\vec a,\vec b]+[\vec a,\vec c]$.
4. $[\vec a,\vec a]=0$.

Векторное произведение в координатной форме

Если $\vec i,\vec j,\vec k$ – ортогональный базис, то:

$\vec a=a_X\vec i+a_Y\vec j+a_Z\vec k$

$\vec b=b_X\vec i+b_Y\vec j+b_Z\vec k$

$$[\vec a,\vec b]=\Big[(a_X\vec i+a_Y\vec j+a_Z\vec k\ \ ),(b_X\vec i+b_Y\vec j+b_Z\vec k)\Big]=\underline{\Big[(a_X\vec i+a_Y\vec j+a_Z\vec k\ \ ),b_X\vec i\Big]}+\underline{\underline{\Big[(a_X\vec i+a_Y\vec j+a_Z\vec k\ \ ),b_Y\vec j\Big]}}+$$

$$+\underline{\underline{\underline{\Big[(a_X\vec i+a_Y\vec j+a_Z\vec k\ \ ),b_Z\vec k\Big]}}}=\underline{[\underline{a_X\vec i,b_X\vec i}]+[a_Y\vec j,b_X\vec i]+[a_Z\vec k\ \ ,b_X\vec i]}+\underline{\underline{[a_X\vec i,b_Y\vec j]+[\underline{a_Y\vec j,b_Y\vec j}]+[a_Z\vec k\ \ ,b_Y\vec j]}}+$$

Как мы

$$+\underline{\underline{\underline{[a_X\vec i,b_Z\vec k]+[a_Y\vec j,b_Z\vec k]+[\underline{a_Z\vec k\ \ ,b_Z\vec k}]}}}=a_Y b_X[\vec j,\vec i]+a_Z b_X[k,i]+a_X b_Y[i,j]+a_Z b_Y[k,j]+a_X b_Z[i,k]+$$

$$+a_Y b_Z[j,k]$$

видим, наше векторное произведение распадается на сумму трех (они соответственно подчеркнуты одной, двумя и тремя линиями), каждое из которых распадается еще на три. Но здесь уже одно из слагаемых равняется нулю (оно подчеркнуто) по четвертому свойству. В итоге у нас осталось шесть слагаемых, распишем в них векторные произведения ортов:

$[\vec i,\vec j]=\vec k,\ [\vec j,\vec i]=-\vec k$

$[\vec j,\vec k]=\vec i,\ [\vec k,\vec j]=-\vec i$

$[\vec k,\vec i]=\vec j,\ [\vec i,\vec k]=-\vec j$

Используя полученные результаты, перепишем эти шесть слагаемых и сгруппируем их:

$[\vec a,\vec b]=a_Y b_X(-\vec k)+a_Z b_X\vec j+a_X b_Y\vec k+a_Z b_Y(-\vec i)+a_X b_Z(-\vec j)+a_Y b_Z\vec i=$

$(a_Y b_Z-a_Z b_Y)\vec i+(a_Z b_X-a_X b_Z)\vec j+(a_X b_Y-a_Y b_X)\vec k$

Но это не что иное, как решение матрицы:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_X & a_Y & a_Z \\ b_X & b_Y & b_Z \end{vmatrix}$$

Если определитель такой матрицы будет равен нулю, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – коллинеарны.

Смешанное векторное произведение

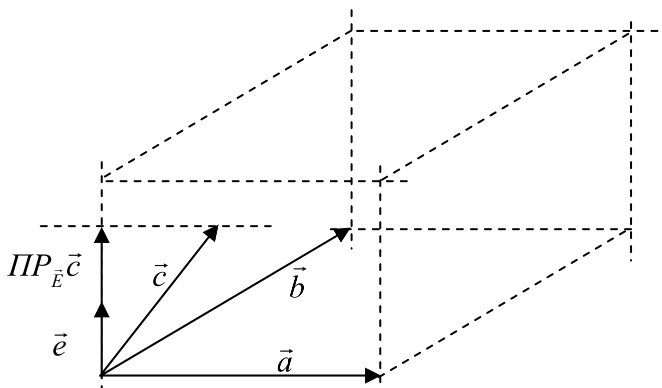
$([\vec{a},\vec{b}],\vec{c})$– смешанное произведение векторов $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$. Векторы $\vec{a},\vec{b}$ перемножаются векторно, а вектор $\vec{c}$ – скалярно.

Теорема 1.

Смешанное произведение трех векторов – это объем параллелепипеда, построенного на этих вектора, х со знаком «+», если тройка правая, и со знаком «–», если тройка левая.

Доказательство.

$\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$ –не компланарны, вектор $\vec{e}$ – единичный перпендикулярный плоскости векторов $\vec{a},\vec{b}$; S – площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a},\vec{b}$.



$([\vec{a},\vec{b}],\vec{c}) = (\vec{e}S,\vec{c}) = S(\vec{e},\vec{c}) = S\,|\,\vec{e}\,|\cdot|\,\vec{c}\,|\cdot\cos\alpha = S\cdot|\,\vec{c}\,|\cdot\cos\alpha = S\cdot ПР_{\vec{E}}\vec{c} = S\cdot h = \pm V$

Свойства смешанного произведения векторов

1. Если вектор $\vec{c}$ ортогонален плоскости векторов $\vec{a},\vec{b}$, то векторное произведение равно нулю.
2. Если из трех векторов хотя бы два коллинеарны, то смешанное произведение равно нулю.
3. Свойство циклической перестановки:

$(\ \vec{c},[\vec{a},\vec{b}]\ ) = (\ \vec{a},[\vec{b},\vec{c}]\ ) = (\vec{b}\ \ [\vec{c},\vec{a}]\ ) = (\ \vec{c},[\vec{a},\vec{b}]\ )$

Смешанное векторное произведение в координатной форме

Если $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ – ортогональный базис, то:

$\vec{a} = a_X\vec{i} + a_Y\vec{j} + a_Z\vec{k}$

$\vec{b} = b_X\vec{i} + b_Y\vec{j} + b_Z\vec{k}$

$\vec{c} = c_X\vec{i} + c_Y\vec{j} + c_Z\vec{k}$

Из выведенных нами ранее формул распишем смешанное произведение:

$$\left(\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_X & a_Y & a_Z \\ b_X & b_Y & b_Z \end{vmatrix},\ \vec{c} \right) = \Big(((a_Yb_Z - a_Zb_Y)\vec{i} + (a_Zb_X - a_Xb_Z)\vec{j} + (a_Xb_Y - a_Yb_X)\vec{k}), (c_X\vec{i} + c_Y\vec{j} + c_Z\vec{k}) \Big) =$$

Но это не что

$$= (a_Yb_Z - a_Zb_Y)\cdot c_X + (a_Zb_X - a_Xb_Z)\cdot c_Y + (a_Xb_Y - a_Yb_X)\cdot c_Z$$

иное, как решение матрицы:

$$\begin{vmatrix} c_X & c_Y & c_Z \\ a_X & a_Y & a_Z \\ b_X & b_Y & b_Z \end{vmatrix}$$

Если определитель данной матрицы будет равен нулю, то векторы $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.

Двойное векторное произведение.

$\left[\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]\right]$ – двойное векторное произведение.

Свойства двойного векторного произведения векторов

$$\left[\vec{c},[\vec{a},\vec{b}]\right] \neq \left[[\vec{c},\vec{a}],\vec{b}\right]$$

$$\left[\vec{c},[\vec{a},\vec{b}]\right] = -\left[[\vec{c},\vec{a}],\vec{b}\right] = -\left(\vec{a},(\vec{c},\vec{b}) - \vec{b},(\vec{c},\vec{a})\right)$$

Двойное векторное произведение в координатной форме

Если $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ – ортогональный базис. Расположим нашу тройку векторов таким образом, чтобы направление вектора $\vec{c}$ совпадало с вектором $\vec{k}$, а вектор $\vec{b}$ лежал в плоскости $\vec{j}\vec{k}$, тогда:

$$\vec{a} = a_X\vec{i} + a_Y\vec{j} + a_Z\vec{k}$$

$$\vec{b} = 0\vec{i} + b_Y\vec{j} + b_Z\vec{k}$$

$$\vec{c} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + c_Z\vec{k}$$

Тогда векторное произведение $[\vec{b},\vec{c}]$ запишется в виде:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & b_Y & b_Z \\ 0 & 0 & c_Z \end{vmatrix} = \vec{i}b_Yc_Z$$, то есть вектор $[\vec{b},\vec{c}] = \vec{i}b_Yc_Z + 0\vec{j} + 0\vec{k}$.

Таким образом, двойное векторное произведение запишется в виде:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_X & a_Y & a_Z \\ b_Yc_Z & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{j}a_Zb_yc_Z - \vec{k}a_Yb_Yc_Z = b_Yc_Z(\vec{j}a_Z - \vec{k}a_Y)$$

То есть $\left[\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]\right] = b_Yc_Z(\vec{j}a_Z - \vec{k}a_Y)$.

Линейные образы на плоскости

Плоская линия. Линия на плоскости

$\vec{i}, \vec{j}$ – ортонормированный базис.

Любые значения x, y, удовлетворяющие условию $\Phi(x, y) = 0$, представляют или не представляют геометрический образ.

$x^2 + y^2 + 1 = 0$ – не представляет никакого образа (x, y не удовлетворяют условию).

$x^2 + y^2 = 0$ – представляет геометрический образ – точку(0;0).

$x^2 + y^2 - 25 = 0$ – представляет геометрический образ – окружность с радиусом в точке (0;0) и радиусом 5.

Существует два вида уравнений:

1.Алгебраические – представлены в виде полинома относительно x,y;

2.Трансцендентные – все остальные;

Полином – сумма слагаемых, каждое из которых представлено в виде $x^k\left(k \ge 0\right)$ и $y^l\left(l \ge 0\right)$, $k + l = n$ – самое большое значение – степень полинома. (а – постоянный коэффициент полинома).

$a_{kl}x^k y^l$ – полином.

Линейные геометрические образы

Уравнение алгебраического вида первого порядка

Выясним геометрический образ алгебраического уравнения первого порядка:

$Ax + By + C = 0$

Данное уравнение определяет множество точек прямой, проходящей через M_0 и перпендикулярной $\vec{N}$, называется общим уравнением:

$Ax + By + (-Ax_0 - By_0) = 0$, где $-Ax_0 - By_0 = C$.

Неполное уравнение прямой

Полное уравнение – общее уравнение прямой, у которого все коэффициенты отличны от нуля.

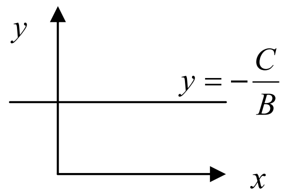
Неполное уравнение – общее уравнение прямой, у которого один или два коэффициента равны нулю.

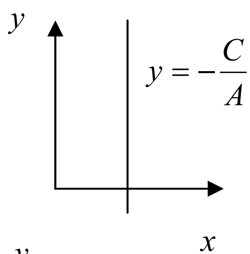
Рассмотрим неполные уравнения.

$Ax + By + C = 0$

1. Пусть *A=0, By+C=0* $\Rightarrow y = -\dfrac{C}{B}$.

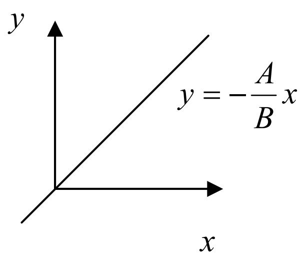
Представляет прямую, у которой любому значению x соответствует один и тот же y. Если в уравнении первой степени x не содержится, то прямая параллельна оси x.

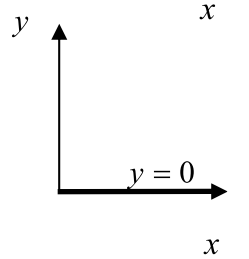




2. Пусть *B=0,Ax+C=0* $\Rightarrow x = -\dfrac{C}{A}$.

Представляет прямую, *у* которой одному значению x соответствует множество значений *y*. Если в уравнении первой степени *y* не содержится, то прямая параллельна оси *y.*





3. Пусть *C=0,Ax+By=0* $\Rightarrow y = -\dfrac{A}{B} \cdot x$.

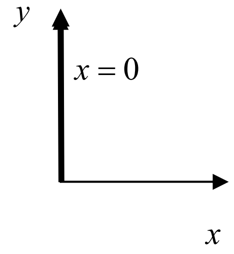
Представляет прямую, проходящую через начало координат.

4. Пусть $A=0, C=0: By=0 => y=0$.

Прямая совпадает с осью *x,* уравнение оси $x-y=0$.

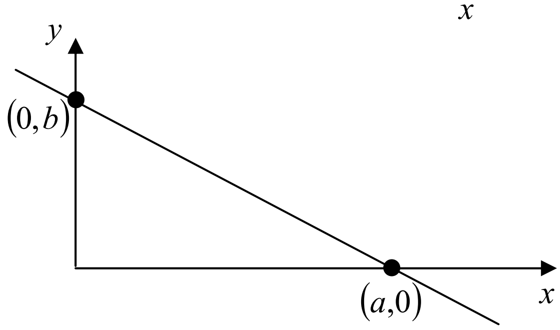
5. Пусть $B=0, C=0: Ax=0 => x=0$.

Прямая совпадает с осью *y*, уравнение оси $y-x=0$.



Уравнение прямой в отрезках на осях

Пусть все три коэффициента отличны от нуля ($A\neq 0; B\neq 0; C\neq 0$) $-Ax+By+C=0$. Перенесем С в правую сторону уравнения и разделим на (-С) – $-\frac{A}{C}x-\frac{B}{C}y=1$, где $-\frac{C}{A}=a$, а $-\frac{C}{B}=b$ $\Rightarrow \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ – уравнение прямой в отрезках на осях, где точки $(a;0)$ и $(0;b)$ – точки пересечения прямой с осями Ox и Oy соответственно.



Каноническое уравнение прямой

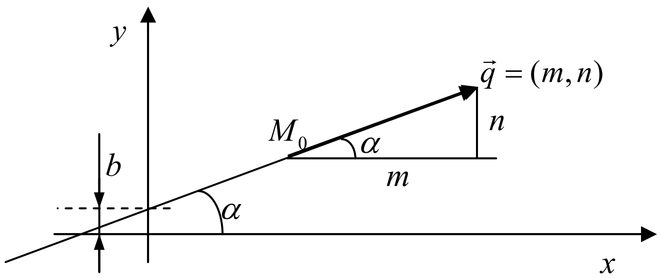
Возьмем на прямой точки $M_0(x_0;y_0)$ и $M(x;y)$ и вектор $\vec{q}=\{m,n\}$, параллельный прямой. Векторы $\overrightarrow{MM_0}=\{x-x_0;y-y_0\}$ и $\vec{q}$ коллинеарные, следовательно, из условия коллинеарности $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}$.

Уравнение прямой, проходящей через две точки

Пусть прямая проходит через две точки $(x_0;y_0)$ и $(x_1;y_1)$, тогда направляющий вектор будет определяться формулой: $\vec{q}=\{\underbrace{x_1-x_0}_{m},\underbrace{y_1-y_0}_{n}\}$ следовательно, уравнение прямой примет вид: $\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}$.

Параметрическое уравнение прямой

Из канонического вида: $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=t$, где t не является постоянной величиной. Тогда прямую можно описать парой уравнений вида: $x=mt+x_0$ и $y=nt+y_0$, где t – параметр.



Уравнение прямой с угловым коэффициентом

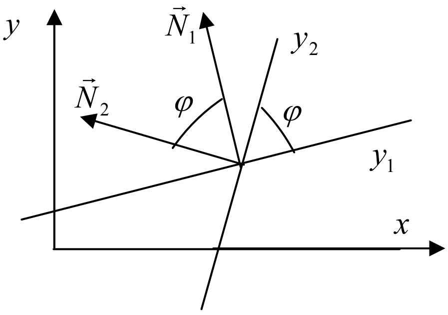
Из канонического вида: $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}$ получим зависимость y от x:

$y=\frac{m}{n}(x-x_0)+y_0=\frac{m}{n}x-\frac{m}{n}x_0+y_0$, пусть $\frac{m}{n}=k$, а $(-\frac{m}{n}x_0+y_0)=b$, тогда уравнение примет вид: $y=kx+b$. Из рисунка видно, что $k=\frac{m}{n}=tg\,\alpha$, где $\alpha\neq\pm\frac{\pi}{2}$ – угол наклона прямой к оси Ox.

Уравнением прямой с угловым коэффициентом можно задать все прямые, кроме прямых, параллельных оси Oy, уравнения с угловым коэффициентом – ограниченные уравнения, или ущербные.

Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности

Пусть нам даны две прямые $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$ и ортогональные к ним векторы $\overrightarrow{N_1}=\{A_1,B_1\}$ и $\overrightarrow{N_2}=\{A_2,B_2\}$. Углом между двумя прямыми называется угол между двумя



векторами, перпендикулярными к данным прямым. Из формулы скалярного произведения получаем: $\cos\varphi = \dfrac{(\overrightarrow{N_1}, \overrightarrow{N_2})}{\left|\overrightarrow{N_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{N_2}\right|} = \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$.

Из данной формулы легко получить условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.

При параллельности.

$\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$ – общего уравнения.

$\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2}$ – в каноническом виде.

$k_1 = k_2$ – с угловым коэффициентом.

При перпендикулярности.

$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ – общего уравнения

$m_1m_2 + n_1n_2 = 0$ –- в каноническом виде.

$k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$ – с угловым коэффициентом.

Нормированное уравнение прямой на плоскости

Пусть нам дана прямая, вектор $|\vec{n}| = 1$ единичный, угол θ – угол между положительным направлением оси Ox и вектором $\vec{n}$ и точка на прямой $M(x; y)$.

Вектор $\vec{n}$ определим как $\vec{n} = \vec{i}\cos\theta + \vec{j}\sin\theta = \{\cos\theta, \sin\theta\}$, а вектор $\overrightarrow{OM}$ как $\overrightarrow{OM} = \vec{i}x + \vec{j}y = \{x; y\}$, а проекцию вектора $\overrightarrow{OM}$ на вектор $\vec{n}$ через $p: Пр_{\vec{n}}\overrightarrow{OM} = p$. Запишем теперь скалярное произведение векторов $\vec{n}$ и $\overrightarrow{OM}$: $(\vec{n}, \overrightarrow{OM}) = |\vec{n}| \cdot Пр_{\vec{n}}\overrightarrow{OM} = x\cos\theta + y\sin\theta = p$.

$x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0$ – нормированное уравнение прямой.

Переход от общего уравнения прямой к нормированному.

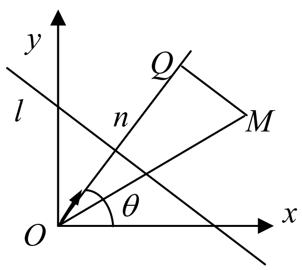
$\begin{array}{l} xA \quad + \quad yB \quad + C = 0 \\ x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0 \end{array}$ мы можем представить $\cos\theta$ как At, $\sin\theta$ как Bt, а p как $-Ct$, таким образом мы имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} At = \cos\theta \\ Bt = \sin\theta \\ Ct = -p \end{cases} \Bigg\| \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

знак t противоположен C

Отклонение от точки до прямой и расстояние

Рассмотрим любую прямую l. Проведем через начало координат прямую n перпендикулярно l, точку пересечения обозначим как $P(x, y)$. На прямой n обозначим единичный вектор $\vec{n}$, его координаты $\vec{n} = \{\cos\theta, \sin\theta\}$. Возьмем какую-то точку $M(x_0, y_0)$, не лежащую на прямой l. Спроектируем точку $M(x_0, y_0)$ на прямую n, это будет точка Q. Тогда отклонение точки Q от прямой l равно $\delta = PQ = OQ - OP = OQ - p$. Мы можем записать: $OQ = ПР_{\vec{n}}\overrightarrow{OM} = x_0\cos\theta + y_0\sin\theta$, то есть $\delta = x_0\cos\theta + y_0\sin\theta - p$.



Расстояние тогда равно: $d = |\delta|$. Если $\delta < 0$, то точка $M(x_0, y_0)$ и начало координат лежат по одну сторону прямой l, если $\delta > 0$, то по разные.

Пучок прямых на плоскости

Пучок прямых на плоскости – это множество всех прямых, проходящих через указанную на плоскости точку.

Указывают две прямые, пересекающиеся в указанной точке.

$A_1x + B_1y + C_1 = 0$
$A_2x + B_2y + C_2 = 0$

Две непараллельные прямые $\left(\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}\right)$, их пересечение и есть точка S.

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \\ \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \end{cases}$$

$\alpha\left(A_1x + B_1y + C_1\right) + \beta\left(A_2x + B_2y + C_2\right) = 0$.

$\alpha, \beta \neq 0$, произвольные числа.

Какую бы прямую мы не взяли, проходящую через первую и вторую прямые, можно подобрать α и β из уравнения.

$(\alpha A_1 + \beta A_2)x + (\alpha B_1 + \beta B_2)y + (\alpha C_1 + \beta C_2) = 0$.

При этом x, y $\neq 0$ одновременно.

При x=0: $\frac{A_1}{A_2} = -\frac{\beta}{\alpha}$.

При x=0: $\frac{B_1}{B_2} = -\frac{\beta}{\alpha}$.

Данным уравнением представлена прямая неопределенная, проходящая через обе прямые и точку S.

Плоскость

Плоскость – это геометрическое место точек, где любой вектор перпендикулярен какому-то вектору $\vec{N}$.

Общее уравнение плоскости: $Ax + By + Cz + D = 0$. Если хотя бы один из коэффициентов не равен нулю, то уравнение представляет собой плоскость.

Возьмём точки $M_0(x_0, y_0, z_0), M(x, y, z)$ и вектор $\vec{N} = \vec{i}A + \vec{j}B + \vec{k}C = \{A, B, C\}$. Определим вектор $\overrightarrow{MM_0} = \vec{i}(x - x_0) + \vec{j}(y - y_0) + \vec{k}(z - z_0) = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$, дальше получим скалярное произведение $(\vec{N}, \overrightarrow{MM_0}) = A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. Уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, где $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$.

Неполное уравнение плоскости

I. Когда один из коэффициентов равен нулю.

1. Пусть $D = 0 \Rightarrow Ax + By + Cz = 0$ – это уравнение плоскости, проходящей через начало координат.
2. Пусть $A = 0 \Rightarrow By + Cz + D = 0$ –это значит, что нормальный вектор $\vec{N} = \{0, B, C\}$ перпендикулярен оси OX, следовательно, плоскость параллельна этой оси.
3. Пусть $B = 0 \Rightarrow Ax + Cz + D = 0$ – это уравнение плоскости, параллельной оси OY.
4. Пусть $C = 0 \Rightarrow Ax + By + D = 0$ – это уравнение плоскости, параллельной оси OZ.

II. Когда два коэффициента равны нулю.

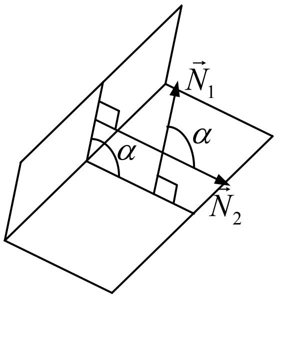
1. Пусть $A = 0, D = 0 \Rightarrow By + Cz = 0$ – это уравнение плоскости, проходящей через начало координат и содержащей ось OX.
2. Пусть $B = 0, D = 0 \Rightarrow Ax + Cz = 0$ – это уравнение плоскости, проходящей через начало координат и содержащей ось OY.
3. Пусть $C = 0, D = 0 \Rightarrow Ax + By = 0$ – это уравнение плоскости, проходящей через начало координат и содержащей ось OZ.
4. Пусть $A = 0, B = 0 \Rightarrow Cz + D = 0$ – это уравнение плоскости, параллельной плоскости XOY и пересекающей ось OZ в точке $z = -\dfrac{D}{C}$.
5. Пусть $A = 0, C = 0 \Rightarrow By + D = 0$ – это уравнение плоскости, параллельной плоскости XOZ и пересекающей ось OY в точке $y = -\dfrac{D}{B}$.
6. Пусть $B = 0, C = 0 \Rightarrow Ax + D = 0$ – это уравнение плоскости, параллельной плоскости YOZ и пересекающей ось OX в точке $x = -\dfrac{D}{A}$.

III. Когда три коэффициента равны нулю.

1. Пусть $A = 0, B = 0, D = 0 \Rightarrow Cz = 0$ – это уравнение плоскости XOY.
2. Пусть $A = 0, C = 0, D = 0 \Rightarrow By = 0$ – это уравнение плоскости XOZ.
3. Пусть $B = 0, C = 0, D = 0 \Rightarrow Ax = 0$ – это уравнение плоскости YOZ.

Угол между двумя плоскостями

Углом между плоскостями называется угол между нормальними векторами этих плоскостей.



Пусть у нас есть две плоскости $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ с соответствующими нормальными векторами $\overrightarrow{N_1} = \{A_1, B_1, C_1\}$ и $\overrightarrow{N_2} = \{A_2, B_2, C_2\}$. Тогда угол равен $\cos\alpha = \dfrac{(\vec{N}_1, \vec{N}_2)}{|\vec{N}_1| \cdot |\vec{N}_2|} = \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$.

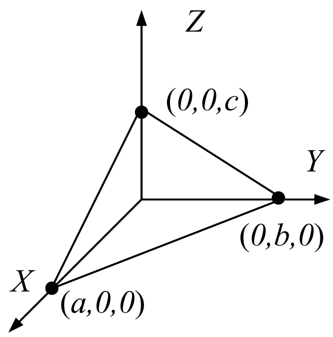
Откуда вытекают условия перпендикулярности и параллельности.

1. Когда $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$, плоскости перпендикулярны.

2. Когда $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\lambda$, плоскости параллельны.

Другие уравнения плоскости

Уравнение плоскости в отрезках на осях



Предположим, что $A,B,C,D\neq 0$, перенесём D в правую часть и разделим на $-D$. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, где $a=\frac{-D}{A}$, $b=\frac{-D}{B}$, $c=\frac{-D}{C}$. В данном случае наша плоскость пересекает плоскость XOY по прямой ab, YOZ – по cb,а XOZ – по ac.

Нормальное уравнение плоскости

Пусть у нас есть плоскость ε, прямая OP, перпендикулярная ей, и точка $M(x,y,z)$ данной плоскости. Пусть единичный вектор $\vec{n}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ перпендикулярен плоскости ε, где α – угол между вектором $\vec{n}$ и осью OX, β – угол между вектором $\vec{n}$ и осью OY, γ – угол между вектором $\vec{n}$ и осью OZ. И есть вектор $\overrightarrow{OM}=\{x,y,z\}$, тогда: $(\vec{n},\overrightarrow{OM})=x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=p$.

$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$ – это нормированное уравнение плоскости.

Отклонение точки от плоскости

По аналоги с прямой отклонение $\delta=x\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-p$, а расстояние $d=|\delta|$.

Пучок плоскостей

Пучок плоскостей – это множество плоскостей, проходящих через одну и туже прямую.

$\alpha(Ax+By+Cz+D)+\beta(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)=0$ –

это уравнение описывает все плоскости, проходящие через одну прямую.

Связка плоскостей

Связка плоскостей – это множество плоскостей, проходящих через одну точку.

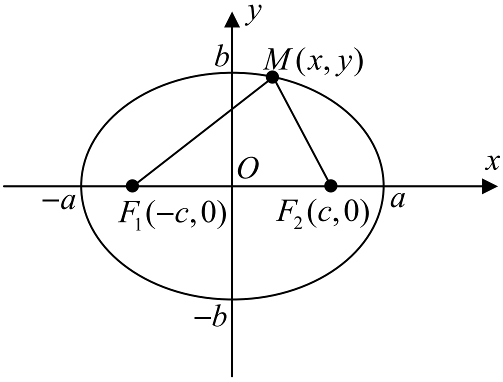
$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ – уравнение связки.

A,B,C – любые коэффициенты.

Линии второго порядка на плоскости

Каноническое уравнение эллипса

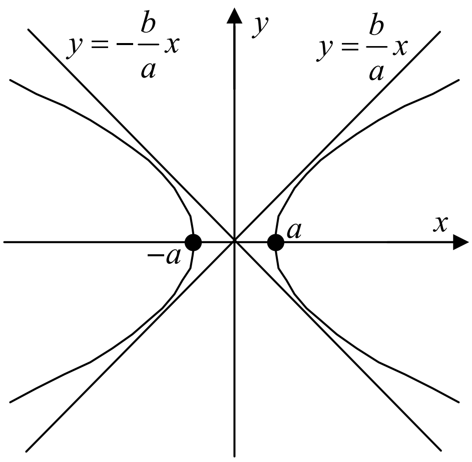
Эллипс – это геометрическое место точек на плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух фиксированных точек плоскости постоянна.



$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, $r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, $r_1 + r_2 = 2a$, подставляя значения, получим: $\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 = 4a^2$, избавляясь от радикалов, получим: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, где $b^2 = a^2 - c^2$. a и b называются полуосями эллипса. Отношение $e = \dfrac{c}{a}$ называется эксцентриситетом эллипса и выражает сплюснутость эллипса. Стоит отметить, что окружность – это частный случай эллипса, когда у него полуоси равны.

Каноническое уравнение гиперболы

Гипербола – это геометрическое место точек на плоскости, разность расстояний от которых до двух фиксированных точек плоскости, взятых по модулю, есть величина постоянная.

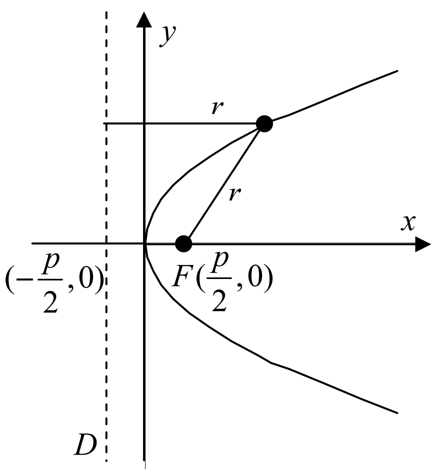


$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, $r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, $|r_1 - r_2| = 2a$, подставляя значения, получим: $\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a$, избавляясь от радикалов, получим: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, где $b^2 = c^2 - a^2$.

a называется полуосью гиперболы. Отношение $e = \dfrac{c}{a}$ называется эксцентриситетом гиперболы. $y = \dfrac{b}{a}x$ и $y = -\dfrac{b}{a}x$ – это асимптоты гиперболы.

Парабола

Парабола – это геометрическое место точек на плоскости, расстояние от каждой из которых до фиксированной точки плоскости равно расстоянию от этой же точки до фиксированной прямой этой плоскости. Фиксированная точка – это фокус параболы F, а фиксированная прямая – это директриса параболы D.



$$r = x + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} \quad r^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = x^2 + px + p^2$$

$$\cancel{x^2} - px + \cancel{\frac{p^2}{4}} + y^2 = \cancel{x^2} + px + \cancel{\frac{p^2}{4}}$$

$y^2 = 2px$ – каноническое уравнение параболы.

Директориальные свойства кривых второго порядка

Директрисами эллипса называются прямые $x = \frac{a}{e}$ и $x = -\frac{a}{e}$, где $e = \frac{c}{a}$. Отношение расстояния от любой точки эллипса до фокуса к расстоянию от этой точки к директрисе есть величина постоянная и меньшая единицы.

Директрисами гиперболы называются прямые $x = \frac{a}{e}$ и $x = -\frac{a}{e}$, где $e = \frac{c}{a}$. Отношение расстояния от любой точки гиперболы до фокуса к расстоянию от этой точки к директрисе этого фокуса есть величина постоянная и большая единицы.

Эллипс, гипербола и парабола – это геометрическое место точек, для которых выполняются условия:

$\frac{r}{d} = e < 1$ – это эллипс;

$\frac{r}{d} = e > 1$ – это гипербола;

– это парабола.