

К 200-летию Харьковского национального университета
имени В. Н. Каразина

А. А. Минаков, О. Ф. Тырнов

СТАТИСТИЧЕСКАЯ РАДИОФИЗИКА

2003

К 200-летию Харьковского национального университета
имени В. Н. Каразина

А. А. Минаков, О. Ф. Тырнов

СТАТИСТИЧЕСКАЯ РАДИОФИЗИКА

Утверждено Министерством образования
и науки Украины как учебник для
студентов высших учебных заведений

2003

УДК 538.56

Минаков А. А., Тырнов О. Ф. **Статистическая радиофизика.** — Харьков: ХНУ имени В. Н. Каразина, 2003. — 457 с.

Гриф предоставлен Министерством образования и науки Украины. Письмо № 1/11-271 от 28.01.03.

Редактор по специальности: заведующий отделом Радиоастрономического института НАН Украины, член корреспондент НАН Украины, доктор физико-математических наук, профессор, лауреат Государственной премии Украины В. М. Шульга.

Рецензенты: Кафедра приема, обработки и передачи сигналов Национального аэрокосмического университета им. М. Е. Жуковского “Харьковский авиационный институт” (заведующий кафедрой — доктор технических наук, профессор А. А. Зеленский), заведующий отделом Института радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины, доктор технических наук, профессор, лауреат премии АН Украины им. акад. К. Д. Синельникова Б. В. Разказовский.

Основной целью учебника является строгое, сжатое и логически связанное изложение вопросов, относящихся к статистической радиофизике, в соответствии с современными стандартами образования. Книга написана в самодостаточной форме, позволяющей в процессе изучения курса не обращаться к дополнительным литературным источникам. На примерах простых физических моделей получены формулы и выведены законы, носящие общий характер и имеющие широкую область применимости. Разделы учебника сопровождаются типовыми задачами, облегчающими понимание и усвоение пройденного материала.

Для студентов старших курсов, аспирантов и научных сотрудников радиофизических и радиотехнических специальностей университетов.

Головною метою підручника є строге, стисле та логічно ув'язане представлення питань, що відносяться до статистичної радіофізики, у відповідності до сучасних стандартів освіти. Книгу написано в замкнутій формі, що не потребує використання додаткової літератури при вивченні курсу. На прикладах простих фізичних моделей отримано формули та виведено закони, що мають загальний характер та широку сферу використання. Розділи підручника супроводжуються типовими прикладами, які полегшують порозуміння та освоєння пройденого матеріалу.

Для студентів старших курсів, аспірантів та наукових співробітників радіофізичних та радіотехнічних спеціальностей університетів.

Statistical Radio Physics provides a rigorous, condensed, and logical treatment of the subject and meets high education standards. The textbook is written in a self-consistent manner, and no additional literature is required to have the subject studied. Simple physical models are used to derive the formulae and laws that are general in nature and of much practical use. There are examples that illustrate the theory and others that apply the theory to actual problems of current interest in order to facilitate the assimilation of the material.

The book has been planned for MS and Ph.D. students and as a reference book for researchers.

Печатается по решению Ученого совета Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина. Протокол № 6 от 27 июня 2002 года.

ISBN 966-623-182-4

© Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, 2003

Оглавление

	Стр.
Предисловие.....	6
Введение	7
<i>Глава I. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ</i>	12
§ 1. Случайные события	12
Задачи.....	18
§ 2. Случайные величины	20
2.1. Непрерывные случайные величины.....	20
2.2. Дискретные случайные величины.....	23
2.3. Моменты случайных величин.....	26
2.4. Характеристическая функция.....	29
Задачи.....	31
§ 3. Законы распределения случайных величин	34
3.1. Равномерное распределение.....	34
3.2. Биномиальное распределение. Схема Бернулли	36
3.3. Распределения Пуассона и Лапласа.....	41
Задачи.....	44
§ 4. Совокупность случайных величин и функции случайных аргументов	47
4.1. Свойства интегральной функции и плотности распределения вероятностей....	48
4.2. Начальные и центральные моменты совокупности случайных величин.....	50
4.3. Функциональные преобразования случайных величин.....	53
4.4. Центральная предельная теорема теории вероятности.....	58
4.5. Нормальное распределение.....	63
Задачи.....	67
<i>Глава II. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ</i>	71
§ 5. Случайные функции	71
5.1. Интегральная функция и плотность распределения вероятностей.....	72
5.2. Моменты случайного процесса.....	75
5.3. Стационарные случайные процессы.....	77
5.4. Процессы со стационарными приращениями.....	81
5.5. Эргодические процессы.....	84
Задачи.....	87
§ 6. Спектральный анализ случайных процессов	91
6.1. Энергетический спектр стационарного процесса. Формула Винера-Хинчина	91
6.2. Аналитический сигнал.....	100
6.3. Корреляционные функции и энергетические спектры аналитического сигнала.....	105
6.4. Примеры спектральных распределений.....	108
6.5. Комплексная огибающая аналитического сигнала.....	114
Задачи.....	117
§ 7. Линейные преобразования случайных процессов	120
7.1. Математическое описание линейных систем.....	120
7.2. Связь между моментами в линейных системах.....	123
7.3. Спектральный анализ линейных систем с постоянными параметрами.....	126
7.4. Примеры простейших линейных преобразований.....	128
7.5. Преобразование случайных процессов в радиотехнических цепях.....	131
Задачи.....	143
§ 8. Совместное воздействие сигнала и шума на линейную систему	154

8.1. Обобщенный гармонический анализ детерминированных процессов.....	154
8.2. Прохождение гармонического сигнала и шума через линейную систему с постоянными параметрами.....	157
8.3. Оптимальный линейный фильтр для сигналов конечной длительности	162
8.4. Выделение сигнала из шума. Уравнение Винера-Хопфа.....	165
8.5. Оптимальные фильтры и корреляторы.....	172
Задачи.....	174
<i>Глава III. ФЛУКТУАЦИОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ В РАДИОТЕХНИКЕ</i>	179
§ 9. Броуновское движение	179
9.1. Оценки скорости движения броуновской частицы.....	179
9.2. Аналогия между движением броуновской частицы и флуктуациями тока в электрической цепи.....	182
9.3. Анализ уравнения движения броуновской частицы.....	184
9.4. Определение статистических моментов флуктуаций скорости	186
9.5. Статистические характеристики смещения частицы	189
9.6. Плотности распределения вероятностей скорости и смещения частицы.....	191
9.7. Энергетический спектр флуктуаций скорости броуновской частицы.....	193
Задачи.....	197
§ 10. Тепловые флуктуации в радиотехнических цепях	200
10.1. Формула Найквиста.....	200
10.2. Спектральный анализ процессов со стационарным приращением.....	205
10.3. Анализ тепловых флуктуаций в колебательном контуре.....	208
10.4. Эквивалентная шумовая температура.....	210
10.5. Область применимости формулы Найквиста.....	211
10.6. Флуктуационно-диссипационная теорема	213
Задачи.....	218
§ 11. Дробовый шум	220
11.1. Определение статистических характеристик силы тока.....	223
11.2. Энергетический спектр дробового шума.....	225
11.3. Эквивалентное шумовое сопротивление.....	229
Задачи.....	230
§ 12. Флуктуации в автоколебательных системах	234
12.1. Построение замкнутого уравнения для силы тока.....	234
12.2. Укороченные уравнения Ван-дер-Поля.....	239
12.3. Анализ решения уравнений Ван-дер-Поля.....	244
12.4. Учет случайных факторов.....	246
<i>Глава IV. ОСНОВЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ И РАССЕЯНИЯ ВОЛН</i>	253
§ 13. Случайные поля и волны	253
13.1. Статистическое описание случайных полей.....	253
13.2. Моменты случайного поля.....	254
13.3. Статистически однородные поля.....	256
13.4. Спектральные представления для однородных случайных полей.....	258
13.5. Случайные волновые поля.....	264
Задачи.....	265
§ 14. Метод малых возмущений	268
14.1. Построение решения. Борновское приближение.....	269
14.2. Среднее поле и средняя интенсивность.....	279
14.3. Индикатриса рассеяния.....	283
14.4. Границы применимости борновского приближения.....	287
14.5. Спектр рассеянного сигнала.....	290

Задачи.....	298
§ 15. Методы геометрической оптики и плавных возмущений	301
15.1. Метод геометрической оптики.....	302
15.2. Приближение малых возмущений в методе геометрической оптики.....	306
15.3. Метод плавных возмущений (метод Рытова).....	310
15.4. Приближение малых возмущений в методе Рытова.....	312
15.5. Определение статистических характеристик.....	318
15.6. Область применимости метода геометрической оптики	323
Задачи.....	326
§ 16. Флуктуации показателя преломления в турбулентной атмосфере	329
16.1. Уравнение Навье – Стокса.....	330
16.2. Структурная функция скорости. Закон Обухова – Колмогорова.....	332
16.3. Структурная функция и пространственный энергетический спектр показателя преломления.....	335
§ 17. Метод фазового экрана	341
17.1. Формула Грина.....	342
17.2. Определение поля за фазовым экраном. Принцип Гюйгенса.....	344
17.3. Решение задачи в рамках метода геометрической оптики	349
17.4. Дифракционное решение задачи.....	353
17.5. Дифракция флуктуирующих волн.....	362
17.6. Статистические моменты поля. Принцип Гюйгенса для интенсивности.....	364
Задачи.....	375
§ 18. Диаграмма направленности зеркальной антенны со случайными искажениями фазы на апертуре	387
18.1. Вычисление среднего поля.....	389
18.2. Определение средней интенсивности.....	392
Задачи.....	399
§ 19. Рассеяние волн на слабошероховатой поверхности	401
19.1. Граничные условия.....	402
19.2. Построение приближенного решения.....	403
19.3. Среднее поле и средняя интенсивность.....	409
19.4. Индикатриса рассеяния.....	414
19.5. Область применимости “борновского” приближения.....	418
Задачи.....	421
§ 20. Рассеяние на поверхности с большими неровностями (метод Кирхгофа)	432
20.1. Граничные условия.....	432
20.2. Построение приближенного динамического решения.....	435
20.3. Среднее рассеянное поле.....	443
20.4. Средняя интенсивность.....	444
20.5. Индикатриса рассеяния.....	448
Задачи.....	451
Литература	456

Предисловие

Основой учебника стал курс лекций по статистической радиофизике, который читается в Харьковском национальном университете имени В.Н. Каразина студентам-радиофизикам. Впервые этот курс был поставлен более тридцати лет назад профессором кафедры космической радиофизики П.В.Блиохом. В 80-е годы профессором этой же кафедры И.М.Фуксом лекции были дополнены разделами по рассеянию электромагнитных волн на случайных поверхностях. Начиная с 1998 г. существенно переработанный и дополненный курс читается авторами учебника.

Несомненно, данный курс не может охватить обширный круг вопросов, относящихся к статистической радиофизике. Основной целью авторов было строгое, сжатое и логически связанное изложение материала в соответствии с современными стандартами образования. Книга написана в самодостаточной форме так, чтобы при изучении курса у студента не возникала необходимость обращения к дополнительным литературным источникам. Кроме того, на примерах простых физических моделей были получены формулы и выведены законы, носящие общий характер и имеющие более широкую область применимости.

Авторы выражают благодарность рецензентам: член-корр. НАН Украины, проф. В.М.Шульге; проф. В.Б.Рассказовскому; коллективу кафедры приема, обработки и передачи сигналов Национального аэрокосмического университета им. Н.Е.Жуковского "Харьковский авиационный институт", возглавляемой докт. техн. наук А.А.Зеленским, за внимательное прочтение рукописи и высказанные полезные замечания. Кроме того, авторы признательны В.Л.Дорохову за помощь, оказанную при подготовке рукописи к печати.

Введение

В последние десятилетия отмечалось бурное развитие радиофизики и широкое внедрение её методов в астрофизику, биофизику, технику и т.д. При решении многих технических задач, связанных с генерацией, излучением, распространением и приемом радиоволн, возникает необходимость создания источников электромагнитных колебаний большой мощности и высокой стабильности в широком диапазоне длин волн (от долей микрона до десятков километров), антенн с предельно узкими диаграммами направленности, высокочувствительных приемников. Создание таких устройств невозможно без перехода к принципиально новым методам генерации, приема, регистрации и обработки сигналов. Однако улучшение характеристик радиотехнических устройств не всегда приводит к желаемому эффекту: на каком-то этапе количественные изменения приводят к той грани, за которой возникают качественно новые явления и начинают играть определяющую роль качественно новые факторы и закономерности - статистические.

Общим требованием, предъявляемым к любой радиотехнической системе, является достоверное и своевременное получение большого объема информации из излучения с ограниченной энергетикой. Этому препятствуют, во-первых, случайные искажения сигналов при их распространении в реальных средах, во-вторых, собственные шумы радиотехнических устройств и, наконец, техническое несовершенство устройств. Если искажение сигнала за счет несовершенства радиотехнического устройства может быть снижено, то влияние случайных помех полностью исключить невозможно, так как помехи обусловлены физическими процессами, не подвластными нам. В результате оказывается, что наилучшее восстановление полезной информации по искаженному сигналу невозможно без привлечения методов статистической радиофизики.

Точно так же более точное определение угловых координат источника излучения возможно с помощью антенны с более узкой диаграммой направленности. Как правило, сужение диаграммы достигается увеличением линейных размеров антенны. Однако эта зависимость справедлива до тех пор, пока не начинают проявляться различные случайные факторы: неточности в изготовлении самой антенны, ее температурные и ветровые деформации, пространственные неоднородности показателя преломления окружающей среды и подстилающей поверхности. В результате мы снова приходим к ситуации, когда дальнейшее

увеличение углового разрешения антенны невозможно без привлечения статистической теории.

Особенно наглядно проявляется влияние случайных факторов на распространение радиоволн в реальных условиях. Здесь мы практически никогда не имеем дела с теми простыми закономерностями, которые следуют из строгих решений задач дифракции методами математической физики в традиционных курсах теории поля или классической электродинамики (распространение волн над импедансной плоскостью или сферой, дифракция на клине или цилиндре, преломление в плоскослоистых или сферически слоистых средах и т.д.). Реальные среды, в которых распространяются радиоволны, неизмеримо сложнее: пространственные и временные вариации их показателя преломления и формы границ раздела носят случайный характер. Это приводит к тому, что случайным образом изменяется в пространстве и во времени направление распространения и поляризация радиоволн, возникают случайные изменения амплитуды и фазы принимаемых радиосигналов. Анализ влияния на полезный сигнал перечисленных факторов невозможен без привлечения методов статистической радиофизики.

После сказанного выше может создаться впечатление, что применение статистических методов в радиофизике оправдано только в некоторых экстремальных, экзотических ситуациях (сверхнаправленные антенны, сильно неоднородные среды, сверхчувствительные приемники и т.д.), а в остальных случаях, не рискуя впасть в серьезную ошибку, можно пользоваться методами и результатами классической (нестатистической, детерминированной) радиофизики. На самом же деле эта грань довольно расплывчата и в значительной мере условна: элемент случайности или статистической неопределенности присутствует во всех без исключения явлениях и законах физики вообще и радиофизики в частности. Вопрос лишь в том, с какого уровня эту неопределенность следует принимать во внимание и учитывать при решении конкретных задач.

В качестве примера рассмотрим простой опыт, демонстрирующий справедливость закона Ома: в цепи с сопротивлением R измеряется ток I , возникающий под действием напряжения U (рис.1). Если для измерения пользоваться довольно грубым и достаточно инерционным прибором, то при каждом фиксированном значении U мы зарегистрируем силу тока $I = U/R$.

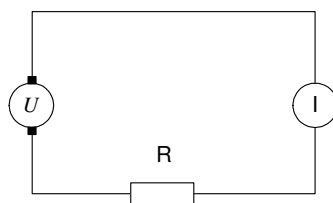


Рис. 1.

Заменим теперь амперметр на более чувствительный (и менее инерционный). Мы обнаружим, что при постоянном напряжении U ток I причудливым образом изменяется во времени (верхняя кривая на рис.2).

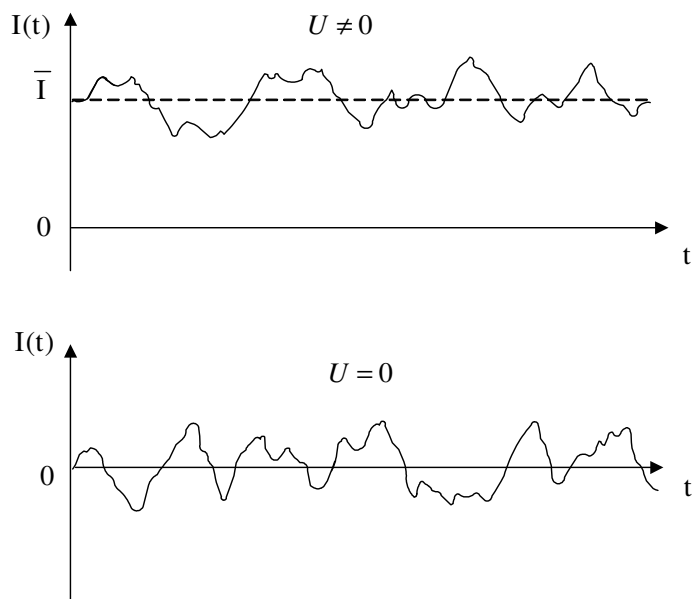


Рис. 2.

Более того, мы увидим, что ток течет в цепи и тогда, когда $U = 0$ (нижняя кривая на рис.2). Значит ли это, что закон Ома неверен? Конечно, нет. В результате опыта мы убеждаемся в том, что он справедлив лишь для средних значений тока I при каждом значении U (на рис.2 напряжению $U \neq 0$ соответствует средний ток $I = \bar{I}$). Отклонения мгновенных значений тока I от значения \bar{I} называются флуктуациями. Своим появлением они обязаны тому факту, что микроскопическое значение тока I является результатом суммирования большого числа микроскопических токов, переносимых каждым элементарным зарядом. В свою очередь, заряды движутся

хаотически и неравномерно, сталкиваются друг с другом, рассеиваются на примесях и колебаниях кристаллической решетки (если речь идет о движении электронов проводимости в твердом теле), а их плотность изменяется в пространстве и во времени случайным образом. Неудивительно поэтому, что и суммарный ток I оказывается не постоянным, а подвержен случайным изменениям - флуктуациям. Однако самым замечательным и на первый взгляд неожиданным является то, что эти флуктуации могут быть с исчерпывающей полнотой описаны и проанализированы, причем не только на качественном уровне, но и в рамках строгой теории - и этим также занимается статистическая радиофизика.

На рис.3 схематически представлены искажения волнового фронта волны, проходящей через неоднородную среду.

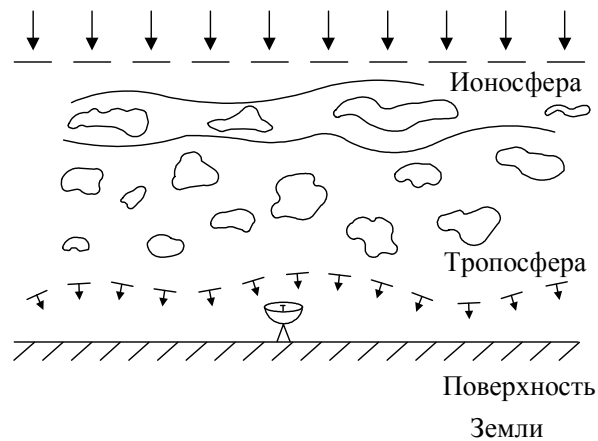


Рис. 3.

Для достаточно удаленных радиоисточников (либо искусственных - спутники и космические корабли, либо естественных - пульсары, квазары и т.д.) волновой фронт приходящей волны с высокой точностью может считаться плоским (верхняя штриховая линия на рис. 3). Однако, попадая в ионосферу Земли, а затем в тропосферу, волновой фронт искажается как за счет преломления на крупномасштабных неоднородностях, так и за счет дифракции на мелкомасштабных флуктуациях показателя преломления. В результате у поверхности Земли волновой фронт приобретает сложную структуру (нижняя штриховая линия на рис.3), направления прихода сигнала (нормали к волновому фронту - стрелки) оказываются отличными от направления на источник - возникают флуктуации угла прихода радиоволн, а наряду с ними - флуктуации и других

параметров сигнала (например, поляризации, амплитуды, фазы). Исследование связи между флуктуациями параметров сигналов и характеристиками неоднородностей среды, в которой происходит распространение радиоволн, также является предметом статистической радиофизики.

Приведенные примеры, конечно, далеко не исчерпывают широкого круга задач, для решения которых привлекаются методы статистической радиофизики, однако они должны дать правильное представление о самом характере этих задач. Во-первых, речь всегда идет о поведении макроскопических систем, т.е. систем с большим числом степеней свободы: в примере с током - это большое число зарядов, в последнем примере - значения показателя преломления в большом числе точек пространства в различные моменты времени. Во-вторых, целью исследования является не точное предсказание значений той или иной макроскопической величины (силы тока в цепи или угла прихода радиоволн), а расчет только тех параметров флуктуаций этих величин, которые являются устойчивыми (повторяющимися) при заданных внешних условиях: в первом примере - при постоянных параметрах и температуре цепи, во втором - при одинаковых состояниях ионосферы и тропосферы (степени ионизации, скорости и направлении ветра, давлении, влажности, температуры и т.д.).

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ I. Случайные события

Объектом изучения теории вероятностей являются случайные события. В качестве простейшей модели случайного события можно рассматривать, например, выпадение “герба” или “решки”, при бросании монеты (выпадение заданного числа очков при бросании игральной кости, образование определенных совокупностей игральных карт и т.д.). Изучение закономерностей, связанных даже с этими простейшими моделями, позволяет решать довольно сложные задачи радиофизики и радиотехники, где в качестве случайных событий можно рассматривать, например: превышение шумовым сигналом $I(t)$ заданного порогового значения I_0 ; прохождение $I(t)$ через нуль (случайное событие заключается в перемене знака I); попадание значения $I(t)$ в заданный интервал dI (см. рис. 1.1); вылет заданного количества электронов из катода за определенное время; отказ какого-либо элемента системы или целой группы элементов в течение заданного промежутка времени и т.д.

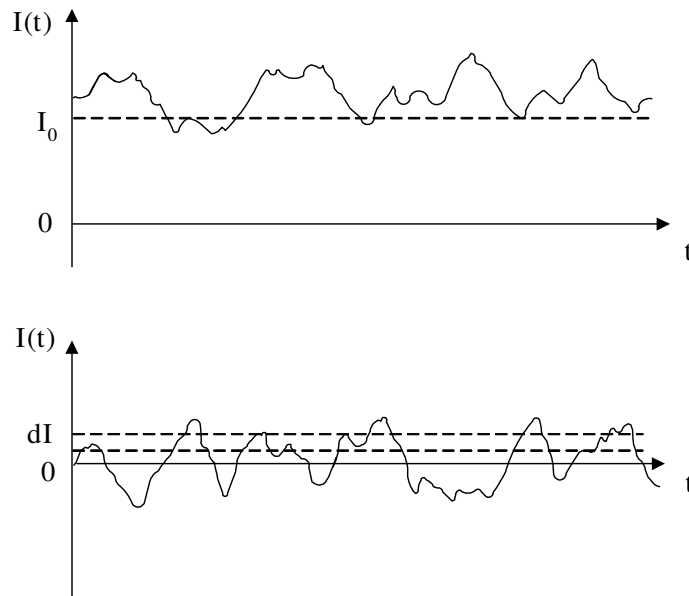


Рис. 1.1.

В отличие от неслучайного (детерминированного) события, которое в результате проведенного опыта обязательно происходит или обязательно не происходит, случайное событие A (события в дальнейшем обозначаем большими буквами латинского алфавита) в

данном опыте может произойти, а может и не произойти. Это означает, что, если мы проводим в одинаковых условиях серию из N опытов, то число опытов N_A , в которых событие A произошло, может принимать, вообще говоря, любое значение из интервала

$$0 \leq N_A \leq N. \quad (1.1)$$

Для детерминированного события A при сколь угодно большом числе опытов N обязательно реализуется одна из двух возможностей: либо $N_A = 0$ (невозможное событие), либо $N_A = N$ (достоверное событие). Отношение

$$N_A/N = \nu_A \quad (1.2)$$

называется **частотой** появления события A , а последовательно проводимые опыты называют испытаниями. Для случайных событий частота ν_A при большом числе опытов ($N \gg 1$) оказывается устойчивой величиной: чем больше опытов мы проводим (чем длиннее серия испытаний), тем все плотнее измеренные значения ν_A группируются около какого-то вполне определенного значения, которое обозначается $P\{A\}$ и называется **вероятностью** события A . Следует подчеркнуть, что $P\{A\}$ - не есть предел ν_A при $N \rightarrow \infty$: ведь ν_A - это эмпирически определенная (измеренная в опыте) величина, в то время как понятие “предел” относится только к объектам математического анализа, т.е. к абстрактным понятиям. Поэтому измерение частоты ν_A можно рассматривать только как эмпирический способ определения некоторой абстрактной математической величины $P\{A\}$. Устойчивость ν_A при $N \gg 1$ свидетельствует о том, что мы действительно имеем дело со случайным событием A , частота появления которого определяется его вероятностью $P\{A\}$ тем точнее, чем длиннее серия испытаний N . В этом смысле можно говорить о случайных событиях как о предсказуемых событиях, в отличие от непредсказуемых событий, частота появления которых при больших N не является устойчивой и для которых, следовательно, нельзя ввести понятие вероятности.

Обратимся к приведенному во Введении примеру с измерением тока в цепи. Грубый прибор дает совершенно определенные значения тока $I = \bar{I}$ при заданном U - никаких случайностей нет, все события детерминированы. Очень точный прибор, обладающий высокой чувствительностью, фиксирует отклонения тока от того среднего

значения, которое показывает грубый прибор, - эти отклонения можно рассматривать как случайные события (флуктуации). Показания же неисправного прибора (с плохим контактом в электрической цепи гальванометра либо с механическими неисправностями - большим трением в подвеске, "заедающей" стрелкой в т.д.) являются непредсказуемыми - они никак не связаны с истинными флуктуациями тока в цепи (имеющими, как мы увидим, вполне определенную физическую природу), а определяются только неисправностями прибора.

Из формулы (1.2) следует, что $0 \leq \nu_A \leq 1$, и, значит, вероятность $P\{A\}$ - есть неотрицательная (вещественная) величина, не превосходящая единицу:

$$0 \leq P\{A\} \leq 1. \quad (1.3)$$

Вероятность невозможного события $P\{A\} = 0$ (так как $N_A = 0$ при любом N и, следовательно, $\nu_A = 0$); вероятность достоверного события $P\{A\} = 1$ (так как $N_A = N$ и $\nu_A = 1$). Обратные утверждения, вообще говоря, неверны: если $P\{A\} = 0$, то это еще не означает, что $N_A = 0$! То есть, событие A , вероятность $P\{A\}$ которого равна нулю, может иногда происходить, но так редко, что при $N \rightarrow \infty$ $\nu_A \rightarrow 0$. О таких событиях говорят как о событиях с "вероятностной мерой нуль" в отличие от невозможных событий, которые действительно никогда не происходят.

Если в результате опыта может произойти не одно, а несколько событий A_1, A_2, \dots, A_k , то говорят о совокупности или группе случайных событий (выпадение определенных совокупностей очков при одновременном бросании нескольких игральных костей; цвет и старшинство игральной карты, наугад взятой из колоды и т.д.). В радиофизике в качестве такой совокупности событий может выступать, например, прием сигнала фиксированной амплитуды A_1 определенной поляризации A_2 с заданного направления A_3 и т.д. Это примеры совокупности совместных (или совместимых) событий - в результате опыта они могут происходить одновременно в отличие от несовместных (взаимно исключающих) событий, которые одновременно происходить не могут. Примерами несовместных событий могут служить выпадение "орла" или "решки" при одном бросании, попадание или промах при одном выстреле, вылет или невылет электрона за малый промежуток времени и т.д.

Определения

1. **Суммой** двух событий A_1 и A_2 называют событие $S = A_1 + A_2$, состоящее в том, что в результате опыта происходит хотя бы одно (независимо какое) из событий A_1 или A_2 или A_1 и A_2 . Если события A_1 и A_2 несовместны, то $S = A_1 + A_2$ - событие, состоящее в появлении одного из событий A_1 или A_2 (безразлично какого). Отсюда следует, что вероятность появления одного из двух несовместных событий A_1 и A_2 равна сумме вероятностей этих событий:

$$P\{S\} = P\{A_1 \text{ или } A_2\} = P\{A_1\} + P\{A_2\}$$

Обобщая эту формулу на случай k попарно несовместных событий A_i ($i=1,2,\dots,k$) получим

$$P\{S\} = P\{A_1 \text{ или } A_2 \dots \text{ или } A_k\} = \sum_{i=1}^k P\{A_i\}. \quad (1.4)$$

Совокупность несовместных событий A_i ($i=1 \div k$) образует **полную группу**, если в результате опыта обязательно происходит одно из них, т.е. если их сумма S есть достоверное событие:

$$P\{S\} = \sum_{i=1}^k P\{A_i\} = 1. \quad (1.5)$$

Если два события A_1 и A_2 образуют полную группу, то они называются **дополнительными** (или **противоположными**) событиями. Событие, дополнительное к A_1 , обозначается как $A_2 = \bar{A}_1$. Следовательно, $S = A_1 + \bar{A}_1$ - есть достоверное событие, т.е.

$$P\{S\} = P\{A_1\} + P\{\bar{A}_1\} = 1. \quad (1.6)$$

Рассмотрим теперь два совместных события A и B , и пусть нам даны вероятности самих событий $P\{A\}$ и $P\{B\}$, а также вероятность их совместного появления $P\{AB\}$. Ставится вопрос: как найти вероятность суммы событий $S = A + B$?

Теорема. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления.

$$P\{S\} = P\{A + B\} = P\{A\} + P\{B\} - P\{AB\}. \quad (1.7)$$

Доказательство. Событие $A + B$ наступит, если наступит одно из следующих трех несовместных событий: $A\bar{B}$, $\bar{A}B$ или AB . По правилу сложения вероятностей несовместных событий (1.4) можно записать:

$$P\{A + B\} = P\{A\bar{B}\} + P\{\bar{A}B\} + P\{AB\}. \quad (1.8)$$

С другой стороны, событие A произойдет, если наступит одно из двух несовместных событий: $A\bar{B}$ или AB . По правилу сложения вероятностей несовместных событий (1.4) имеем

$$P\{A\} = P\{A\bar{B}\} + P\{AB\}. \quad (1.9)$$

Отсюда находим

$$P\{A\bar{B}\} = P\{A\} - P\{AB\}. \quad (1.10)$$

Аналогичные рассуждения позволяют определить и вероятность появления события B :

$$P\{B\} = P\{\bar{A}B\} + P\{AB\}, \quad (1.11)$$

откуда получаем

$$P\{\bar{A}B\} = P\{B\} - P\{AB\}. \quad (1.12)$$

Подставив (1.10) и (1.12) в (1.8) получим искомую формулу (1.7).

2. **Произведением** событий A и B называется событие $M = AB$, заключающееся в том, что в результате опыта происходит как событие A , так и событие B . Очевидно, что если A и B являются несовместными, то M - невозможное событие.

Пусть при N испытаниях событие A произошло N_A раз, событие B - N_B раз, а в N_{AB} случаях из N имели место сразу оба события A и B . Тогда, при $N, N_A, N_B, N_{AB} \rightarrow \infty$, можно написать выражения для вероятностей:

$$\begin{aligned} \nu_A &= N_A/N \rightarrow P\{A\}, \\ \nu_B &= N_B/N \rightarrow P\{B\}, \\ \nu_{AB} &= N_{AB}/N \rightarrow P\{AB\}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Последнее выражение в (1.13) определяет вероятность совместной реализации событий A и B .

Отношение N_{AB}/N_A при $N, N_A, N_B, N_{AB} \rightarrow \infty$ будет группироваться вблизи некоторого числа, которое также можно трактовать как вероятность, а именно как **условную вероятность** осуществления события B при условии, что событие A обязательно имеет место:

$$N_{AB}/N_A \rightarrow P\{B|A\} \text{ или } P_A\{B\}. \tag{1.14}$$

Аналогично можно написать и условную вероятность осуществления события A при условии, что событие B обязательно имеет место:

$$N_{AB}/N_B \rightarrow P\{A|B\} \text{ или } P_B\{A\}. \tag{1.15}$$

Поскольку

$$\frac{N_{AB}}{N} = \frac{N_{AB}}{N_A} \frac{N_A}{N} = \frac{N_{AB}}{N_B} \frac{N_B}{N},$$

то между условными и обычными (или безусловными) вероятностями имеет место следующее соотношение:

$$P\{M\} = P\{AB\} = P\{A|B\}P\{B\} = P\{B|A\}P\{A\}. \quad (1.16)$$

Условную вероятность $P\{A|B\}$ называют еще апостериорной (или “послеопытной” вероятностью), а $P\{A\}$ - априорной (“доопытной”). Из (1.16) получим

$$P\{A|B\} = P\{AB\}/P\{B\} \text{ или } P\{B|A\} = P\{AB\}/P\{A\}. \quad (1.17)$$

Два события A и B называются **независимыми**, если условная вероятность события $P\{A|B\}$ совпадает с “безусловной” $P\{A\}$, т.е. вероятность появления события A не зависит от того, произошло или нет событие B (или, наоборот, вероятность появления события B не зависит от того, произошло или нет событие A). При этом из (1.16) следует, что вероятность произведения независимых событий – есть произведение вероятностей этих событий

$$P\{M\} = P\{A B\} = P\{A\}P\{B\}. \quad (1.18)$$

В общем случае для произвольного числа независимых событий имеем формулу умножения вероятностей:

$$P\{M\} = P\{A_1 A_2 \dots A_k\} = P\{A_1\} \cdot P\{A_2\} \cdot \dots \cdot P\{A_k\} = \prod_{i=1}^k P\{A_i\}. \quad (1.19)$$

ЗАДАЧИ

1. Производится прием кодовых комбинаций, состоящих из пяти цифр от 1 до 5, причем каждая из цифр в отдельной комбинации появляется один единственный раз, например: 1, 2, 3, 4, 5 или 5, 4, 3, 2, 1 и т.д. Какова вероятность $P\{A\}$ того, что в принятой комбинации цифры образуют последовательность 1 2 3 4 5 ?

Решение. Из пяти элементов (цифр 1, 2, 3, 4, 5) путем перестановок можно составить $N = 5!$ различных равновероятных комбинаций. Нас интересует только один исход $n = 1$: комбинация 1, 2, 3, 4, 5. Его вероятность равна

$$P\{A\} = n / N = 1/120.$$

2. По линии связи в случайном порядке с равной вероятностью передаются 30 знаков русского алфавита. Найти вероятность $P\{A\}$ того, что появится последовательность букв, образующих слово “радио”.

Решение. Число всех равновозможных случаев N (число выборов из 30 букв алфавита по 5) равно числу размещений из 30 по 5, т.е.

$$N = A_{30}^5 = 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 .$$

Из этих случаев благоприятствующим событию A является только один исход, т.е. $n = 1$. Следовательно,

$$P\{A\} = n / N = 1 / A_{30}^5 \approx 5,9 \cdot 10^{-8} .$$

3. Обнаружение воздушной цели производится независимо двумя радиолокационными станциями. Вероятность обнаружения цели первой станцией равна 0,7. Вероятность обнаружения цели второй станцией равна 0,8. Определить вероятность $P\{S\}$ того, что цель будет обнаружена хотя бы одной станцией.

Решение. Событие S , состоящее в обнаружении цели, произойдет, если цель будет обнаружена первым локатором (событие A), либо вторым (событие B), либо одновременно двумя локаторами (событие AB). Видно, что S является суммой совместных событий $S = A+B$ и вероятность его появления определяется формулой (1.8)

$$P\{S\} = P\{A\} + P\{B\} - P\{AB\}.$$

Так как события A и B независимы, то $P\{AB\} = P\{A\} \cdot P\{B\}$. Следовательно,

$$P\{S\} = 0,7 + 0,8 - 0,7 \cdot 0,8 = 0,94 .$$

§ 2. Случайные величины

Случайное событие, может рассматриваться только как качественный результат эксперимента, проводимого в определённых условиях. Например, если ток в цепи имеет форму импульсов, следующих друг за другом со случайными интервалами, то факты наличия или отсутствия тока в данный момент времени являются случайными событиями. Для количественной характеристики результата эксперимента вводится понятие случайной величины. Для указанной выше последовательности импульсов такой характеристикой может служить, например, число импульсов в заданном интервале времени или число превышений током заданного порога за счёт флуктуаций, в частности, число переходов через нулевой уровень (число перемен знака) и т.д. Это примеры **дискретных** случайных величин - они принимают счётное множество значений (их буквально можно пересчитать); это множество может быть и бесконечным. К классу **непрерывных** случайных величин относятся, например, длительность интервалов времени между импульсами, мгновенные значения флуктуирующих токов и напряжений в радиотехнической цепи, скорости электронов в плазме, скорость и координаты броуновской частицы (аналогию с движением которой мы в дальнейшем будем использовать для наглядности) и т.д.

2.1. Непрерывные случайные величины

Пусть непрерывная случайная величина ξ может принимать значения в интервале $(a, b]$. Вероятность того, что случайная величина ξ не превышает любое наперед заданное значение x , называется **функцией распределения вероятностей** (или **интегральной функцией распределения вероятностей**) $F_{\xi}(x)$ случайной величины ξ :

$$F_{\xi}(x) = P\{\xi \leq x\}. \quad (2.1)$$

Из рис. 2.1 видно, что $F_{\xi}(x)$ - есть вероятность случайного события, заключающегося в попадании измеренной величины ξ в заштрихованную двойной штриховкой область.

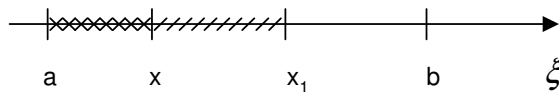


Рис. 2.1.

Свойства $F_{\xi}(x)$

1. Событие $\xi \leq a$ является невозможным событием, а событие $\xi \leq b$ - достоверным. Следовательно,

$$\begin{aligned} P\{\xi \leq a\} &= F_{\xi}(a) = 0, \\ P\{\xi \leq b\} &= F_{\xi}(b) = 1. \end{aligned} \quad (2.2)$$

2. Докажем, что в интервале $a < x \leq b$ функция $F_{\xi}(x)$ есть монотонная неубывающая функция. Выберем на оси ξ значение $x_1 > x$ (см. рис. 2.1). Случайное событие $\xi \leq x_1$ можно рассматривать как сумму двух несовместных событий $\xi \leq x$ (двойная штриховка) и $x < \xi \leq x_1$ (одинарная штриховка). Это обстоятельство позволяет применить формулу сложения вероятностей (1.4):

$$P\{\xi \leq x_1\} = P\{\xi \leq x\} + P\{x < \xi \leq x_1\}. \quad (2.3)$$

Учитывая определение (2.1) и тот факт, что вероятность P любого события неотрицательна, имеем

$$F_{\xi}(x_1) - F_{\xi}(x) = P\{x < \xi \leq x_1\} \geq 0. \quad (2.4)$$

Таким образом, с увеличением x функция распределения $F_{\xi}(x)$, во всяком случае, не убывает. Из (2.2) и (2.4) следует: $F_{\xi}(x) = 0$ при $-\infty < x \leq a$, $F_{\xi}(x) = 1$ при $b < x \leq \infty$, а в области $a < x \leq b$ монотонно возрастает от нуля (при $x = a$) до единицы (при $x = b$).

3. Пусть x_1 отличается от x на бесконечно малую величину dx ($x_1 = x + dx$). Тогда из (2.4) следует:

$$P\{x < \xi \leq x + dx\} = F_{\xi}(x + dx) - F_{\xi}(x) \equiv W_{\xi}(x) dx, \quad (2.5)$$

где мы ввели **плотность распределения вероятности** $W_{\xi}(x)$ случайной величины ξ :

$$W_{\xi}(x) = \frac{dF_{\xi}(x)}{dx}. \quad (2.6)$$

4. Из определения (2.5) видно, что $W_{\xi}(x)dx$ есть вероятность того, что случайная величина ξ принимает значения на интервале $x < \xi \leq x + dx$. Интегрируя (2.6) с учетом условия $F_{\xi}(-\infty) = 0$, имеем

$$F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x W_{\xi}(x') dx'. \quad (2.7)$$

5. Вероятность попадания ξ в конечный интервал $x_1 < \xi \leq x_2$, согласно (2.4) и (2.7), равна

$$P\{x_1 < \xi \leq x_2\} = F_{\xi}(x_2) - F_{\xi}(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} W_{\xi}(x) dx. \quad (2.8)$$

Свойства $W_{\xi}(x)$

Из приведенных выше свойств $F_{\xi}(x)$ и формул (2.6) и (2.7) следует, что

- 1) $W_{\xi}(x)$ - **финитная функция**, тождественно обращаясь в нуль вне интервала $a < x \leq b$;
- 2) неотрицательная функция внутри указанного интервала ($W_{\xi}(x) \geq 0$);
- 3) площадь под ней равна единице (**условие нормировки**):

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_{\xi}(x) dx = F_{\xi}(\infty) = 1. \quad (2.9)$$

На рис. 2.2 схематически изображены графики функций $F_{\xi}(x)$ и $W_{\xi}(x)$. Вероятность того, что случайная величина ξ принимает значение из интервала $x_1 < \xi \leq x_2$, равна заштрихованной площади.

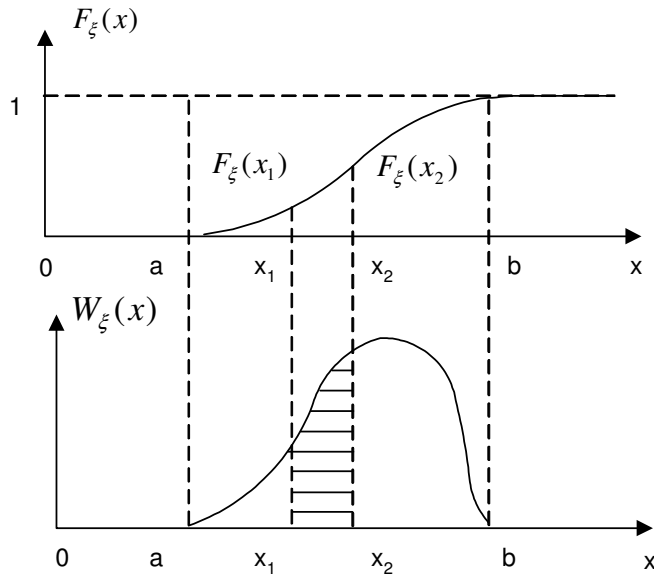


Рис. 2.2.

2.2. Дискретные случайные величины

Пусть теперь случайная величина ξ может принимать только дискретные значения $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_N$ с вероятностями $P\{\xi = x_i\} = p_i$. Пусть события $\xi = x_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$) несовместны. Для любого наперед заданного значения x сложное событие $\xi \leq x$ наступает тогда и только тогда, когда ξ принимает одно из значений $\xi = x_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$), где значение k определяется из следующего неравенства:

$$x_k \leq x < x_{k+1}. \quad (2.10)$$

Воспользовавшись формулой суммирования вероятностей для несовместных событий, получаем для функции распределения вероятностей следующую формулу:

$$F_\xi(x) = P\left\{\xi = x_1 \text{ или } \xi = x_2 \text{ или...или } \xi = x_k\right\} = \sum_{i=1}^k p_i. \quad (2.11)$$

Введем в рассмотрение единичную ступенчатую функцию (**функцию Хевисайда**):

$$h(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \geq 0; \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases} \quad (2.12)$$

Тогда формулу (2.11) можно переписать в виде

$$F_{\xi}(x) = \sum_{i=1}^N p_i h(x - x_i). \quad (2.13)$$

Слагаемые с $i > k$ выпадают из суммы (2.13) ввиду условий (2.10) и (2.12).

Определив плотность распределения вероятностей $W_{\xi}(x)$ как производную от $F_{\xi}(x)$ (см. (2.6)), из (2.13) получаем

$$W_{\xi}(x) = \sum_{i=1}^N p_i \delta(x - x_i), \quad (2.14)$$

где введена $\delta(x - a)$ - дельта-функция Дирака

$$\delta(x - a) = \frac{d}{dx} h(x - a). \quad (2.15)$$

Основные свойства δ - функции:

1. Она равна нулю всюду, кроме точки $x = a$ (где ее аргумент равен нулю), а в точке $x = a$ принимает бесконечное значение:

$$\delta(x - a) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \neq a; \\ \infty, & \text{если } x = a. \end{cases} \quad (2.16)$$

2. “Площадь” под δ - функцией конечна и равна единице:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) dx = 1. \quad (2.17)$$

3. Правило интегрирования:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x-a) dx = f(a). \quad (2.18)$$

Формула (2.17) есть частный случай (2.18) при $f(x) = 1$.

Приведем здесь несколько наиболее употребляемых представлений для δ -функции:

$$\delta(x-a) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + (x-a)^2}; \quad (2.19-a)$$

$$\delta(x-a) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\varepsilon}}, \quad (2.19-b)$$

$$\delta(x-a) = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon \sin[\varepsilon(x-a)]}{\pi \varepsilon(x-a)}. \quad (2.19-в)$$

$$\delta(x-a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(x-a)} d\omega. \quad (2.19-г)$$

Из последнего соотношения легко показать, что

$$\delta[b(x-a)] = \frac{1}{b} \delta(x-a). \quad (2.20)$$

Так как события $\xi = x_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$) составляют полную группу (в результате опыта обязательно происходит одно и только одно из них), то сумма событий (2.11) при $k = N$ есть достоверное событие и должно выполняться условие нормировки

$$\sum_{i=1}^N p_i = 1 \quad (2.21)$$

Используя формулу (2.14) для $W_\xi(x)$, перепишем (2.21) в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_\xi(x) dx = \sum_{i=1}^N p_i \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_i) dx = \sum_{i=1}^N p_i = 1. \quad (2.22)$$

Схематически графики функций $F_{\xi}(x)$ и $W_{\xi}(x)$ приведены на рис. 2.3.

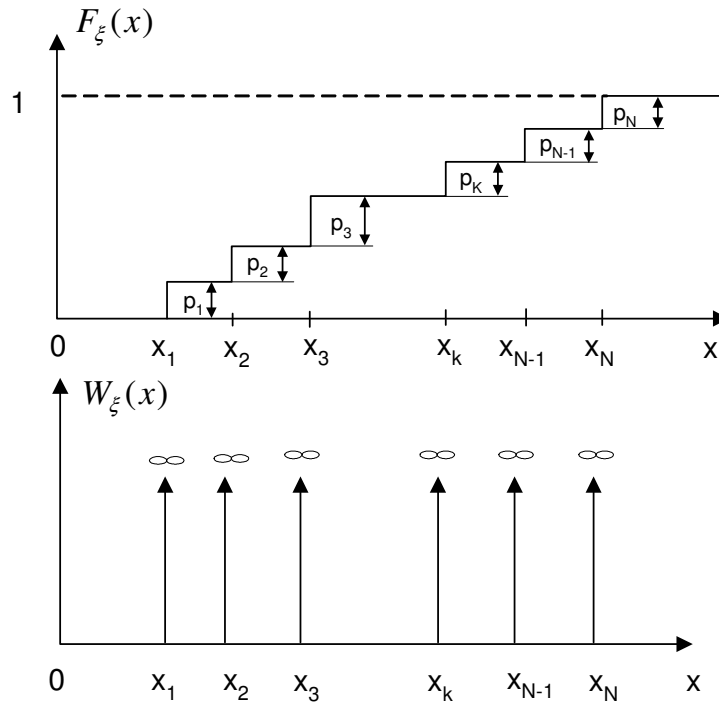


Рис. 2.3.

2.3. Моменты случайных величин

Функция распределения $F_{\xi}(x)$ или плотность распределения вероятности $W_{\xi}(x)$ дают полное статистическое описание случайной величины ξ . Зная их, можно рассчитать по формуле (2.8) вероятность того, попадет (или не попадет) случайная величина ξ в любой интервал $(x_1, x_2]$. Однако иногда такая полная информация бывает либо излишней, либо недоступной, и мы вынуждены ограничиваться более грубым описанием вероятностных свойств случайной величины ξ с помощью не функций $F_{\xi}(x)$ и $W_{\xi}(x)$, а некоторой совокупности числовых параметров, которые называются моментами случайной величины.

В качестве простейшего параметра выступает **среднее значение** (или **математическое ожидание**) случайной величины ξ , которое в дальнейшем будем обозначать либо чертой $\bar{\xi}$, либо косыми скобками $\langle \xi \rangle$. Если в результате проведенных M испытаний дискретная величина ξ приняла n_1 раз значение x_1 , n_2 раз значение x_2 и n_N раз значение x_N , то эмпирическая оценка среднего значения ξ проводится по очевидной формуле (обобщающей обычное понятие арифметического среднего):

$$\bar{\xi} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_N n_N}{M} = \sum_{i=1}^N x_i v_i, \quad (2.23)$$

где $v_i = n_i/M$ - частота появления события $\xi = x_i$. При достаточно большом числе испытаний ($M \gg 1$) частоты v_i в (2.23) можно заменить на вероятности p_i , и мы получим

$$\bar{\xi} = \sum_{i=1}^N x_i p_i = \int_{-\infty}^{\infty} x W_{\xi}(x) dx, \quad (2.24)$$

где $W_{\xi}(x)$ определяется формулой (2.14). Для непрерывной случайной величины ξ можно провести аналогичные вычисления, и мы придем к этой же формуле. По аналогии с механикой можно сказать, что $\bar{\xi}$ - есть координата “центра тяжести” функции $W_{\xi}(x)$. Действительно, если рассмотреть стержень с линейной плотностью массы (масса на единицу длины), зависящей от координаты x по закону $W_{\xi}(x)$, то $\bar{\xi}$ - есть координата центра масс этого стержня. Отсюда, кстати, и произошло название $W_{\xi}(x)$ - плотность вероятности (аналог плотности массы). Знание среднего значения $\bar{\xi}$ позволяет указать величину, около которой группируются значения, принимаемые случайной величиной ξ , однако ничего не говорит об отклонениях ξ относительно $\bar{\xi}$, т.е. о величине **флуктуаций** $\delta\xi = \xi - \bar{\xi}$.

Более полную информацию о случайной величине ξ дают **начальные и центральные моменты**. Средние значения целых степеней ξ^k носят название начальных моментов k -го порядка:

$$m_k = \langle \xi^k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^k W_{\xi}(x) dx = \overline{\xi^k}. \quad (2.25)$$

Аналогично, средние значения целых степеней флуктуаций $(\delta\xi)^k$ носят название центральных моментов k -го порядка:

$$M_k = \langle \delta\xi^k \rangle = \langle (\xi - \bar{\xi})^k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{\xi})^k W_{\xi}(x) dx = \overline{\delta\xi^k}. \quad (2.26)$$

Центральный момент 2-го порядка M_2 называется **дисперсией** флуктуаций и обычно обозначается как σ_ξ^2 . Величину же $\sigma_\xi = \sqrt{\sigma_\xi^2}$ называют еще **среднеквадратичным отклонением** или **стандартом** величины ξ .

Из определений m_k (2.25) и M_k (2.26), а также условия нормировки (2.9) следует, что

$$\begin{aligned} m_0 &= M_0 = 1, \\ m_1 &= \bar{\xi}, \quad M_1 = 0, \\ M_2 &= \sigma_\xi^2 = m_2 - m_1^2. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Возвращаясь к аналогии с неоднородным стержнем, имеющем распределение плотности масс $W_\xi(x)$, можно показать, что дисперсия $\sigma_\xi^2 = \langle (\xi - \bar{\xi})^2 \rangle$ - есть момент инерции стержня относительно центра масс. С другой стороны величина σ_ξ может служить для грубой оценки ширины функции $W_\xi(x)$, “центр тяжести” которой сосредоточен около $x = \bar{\xi}$ (рис. 2.4).

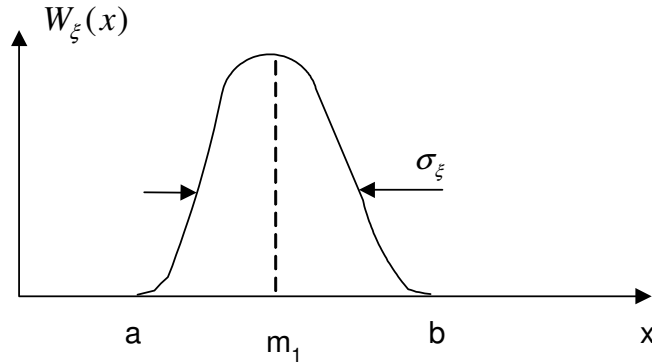


Рис. 2.4.

Моменты более высоких порядков содержат более детальную информацию о форме функции $W_\xi(x)$ - степени ее асимметрии, остроте максимума и т.д.

Рассмотрим теперь детерминированную функцию $\eta = \varphi(\xi)$ дискретной случайной величины ξ . Если в результате проведенных M испытаний дискретная величина ξ приняла n_1 раз значение x_1 , n_2 раз значение x_2 и n_N раз значение x_N , то аналогично (2.23) эмпирическая оценка среднего значения $\eta = \varphi(\xi)$ проводится как

$$\langle \eta \rangle = \langle \varphi(\xi) \rangle = \frac{\varphi(x_1)n_1 + \varphi(x_2)n_2 + \dots + \varphi(x_N)n_N}{M} = \sum_{i=1}^N \varphi(x_i)v_i. \quad (2.28)$$

Здесь $v_i = n_i/M$ - частота появления события $\xi = x_i$. При достаточно большом числе испытаний ($M \gg 1$) частоты v_i в (2.28) можно заменить на вероятности p_i , и мы получаем следующее выражение:

$$\langle \varphi(\xi) \rangle = \sum_{i=1}^N \varphi(x_i) p_i = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) W_{\xi}(x) dx, \quad (2.29)$$

где плотность вероятности где $W_{\xi}(x)$ определяется формулой (2.14).

Не составляет труда показать, что среднее значение детерминированной функции $\eta = \varphi(\xi)$ непрерывной случайной величины ξ определяется также, как и в (2.29):

$$\langle \varphi(\xi) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) W_{\xi}(x) dx. \quad (2.30)$$

2.4. Характеристическая функция

Характеристической функцией $f(v)$ случайной величины ξ называется среднее от функции $\varphi(\xi) = \exp(iv\xi)$, где v - произвольный вещественный параметр:

$$f(v) = \langle e^{iv\xi} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ivx} W_{\xi}(x) dx \quad (2.31)$$

Видно, что $f(v)$ - есть ни что иное, как преобразование Фурье от плотности распределения вероятностей $W_{\xi}(x)$. В свою очередь можно записать и обратное преобразование:

$$W_{\xi}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ivx} f(v) dv. \quad (2.32)$$

Таким образом, характеристическая функция $f(v)$ и плотность распределения вероятностей $W_\xi(x)$ являются парой преобразований Фурье.

Из определения (2.31) вытекают следующие **свойства характеристической функции**. Во-первых,

$$|f(v)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{ivx} W_\xi(x) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{ivx} W_\xi(x)| dx = \int_{-\infty}^{\infty} |e^{ivx}| W_\xi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} W_\xi(x) dx = 1, \quad (2.33)$$

откуда следует, что характеристическая функция может быть определена для каждой случайной величины. Во-вторых,

$$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} W_\xi(x) dx = 1. \quad (2.34)$$

Кроме того, для симметричных (четных) функций $W_\xi(x)$ характеристическая функция $f(v)$ вещественна.

Одним из полезных применений характеристической функции является упрощенное вычисление моментов m_k случайной величины ξ . Если существует k -й начальный момент m_k случайной величины ξ , то её характеристическая функция имеет производную k -го порядка, причем

$$\frac{d^k f(v)}{dv^k} = i^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k W_\xi(x) e^{ivx} dx. \quad (2.35)$$

Из (2.35) следует, что

$$\left. \frac{d^k f(v)}{dv^k} \right|_{v=0} = i^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k W_\xi(x) dx = i^k m_k. \quad (2.36)$$

Следовательно, начальные моменты m_k случайной величины ξ отличаются от значения производной характеристической функции при $v=0$ только множителем i^k :

$$m_k = \frac{1}{i^k} \left. \frac{d^k f(v)}{dv^k} \right|_{v=0}. \quad (2.37)$$

ЗАДАЧИ

1. Случайная величина ξ может принимать только два значения $x : x_1 = A$ с вероятностью $p_1 = 3/4$ и $x_2 = -A$ с вероятностью $p_2 = 1/4$. Найти $W_\xi(x)$, $\bar{\xi}$ и σ_ξ^2 .

Решение. Случайная величина ξ дискретна, поэтому плотность распределения вероятностей для неё определяется формулой (2.14)

$$W_\xi(x) = \sum_{i=1}^2 p_i \delta(x - x_i) = p_1 \delta(x - x_1) + p_2 \delta(x - x_2) = p_1 \delta(x - A) + p_2 \delta(x + A).$$

Воспользовавшись данным представлением, согласно формулам (2.25) и (2.26) находим математическое ожидание $\bar{\xi}$ и дисперсию σ_ξ^2 случайной величины ξ

$$\bar{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} x W_\xi(x) dx = x_1 p_1 + x_2 p_2 = \frac{3}{4} A - \frac{1}{4} A = \frac{A}{2}.$$

$$\begin{aligned} \sigma_\xi^2 &= \overline{(\xi - \bar{\xi})^2} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{\xi})^2 W_\xi(x) dx = (x_1 - \bar{\xi})^2 p_1 + (x_2 - \bar{\xi})^2 p_2 = \\ &= \left(A - \frac{A}{2}\right)^2 p_1 + \left(-A - \frac{A}{2}\right)^2 p_2 = \frac{A^2}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{9}{4} A^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4} A^2. \end{aligned}$$

2. Функция распределения случайной величины ξ имеет вид

$$F_\xi(x) = c + b \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{a}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Необходимо:

- а) определить коэффициенты b и c ;
- б) найти выражение для $W_\xi(x)$;
- в) определить вероятность $P\{\alpha < \xi \leq \beta\}$ попадания величины ξ в интервал $(\alpha, \beta]$.

Решение. а) Воспользуемся свойствами функции $F_\xi(x)$:

$$F_{\xi}(-\infty) = 0, \quad c + b\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0;$$

$$F_{\xi}(\infty) = 1, \quad c + b\frac{\pi}{2} = 1.$$

Отсюда находим коэффициенты b и c : $b = \frac{1}{\pi}$, $c = \frac{1}{2}$.

б) Из связи между $W_{\xi}(x)$ и $F_{\xi}(x)$ получим следующее соотношение:

$$W_{\xi}(x) = \frac{dF_{\xi}}{dx} = \frac{d}{dx}\left(c + b \operatorname{arctg} \frac{x}{a}\right) = b \frac{1}{1 + \frac{x^2}{a^2}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{ab}{a^2 + x^2} = \frac{a}{\pi(a^2 + x^2)}.$$

в) По известной плотности распределения вероятности $W_{\xi}(x)$ находим вероятность попадания случайной величины в заданный интервал

$$\begin{aligned} P\{\alpha < \xi \leq \beta\} &= F_{\xi}(\beta) - F_{\xi}(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} W_{\xi}(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{a}{\pi(a^2 + x^2)} dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d(x/a)}{1 + (x/a)^2} = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha/a}^{\beta/a} \frac{dy}{1 + y^2} = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} y \Big|_{\alpha/a}^{\beta/a} = \frac{1}{\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{\beta}{a} - \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{a} \right). \end{aligned}$$

3. Случайная величина ξ распределена по закону, представленному на рис. 2.5. Необходимо записать выражение для $F_{\xi}(x)$ и определить вероятность попадания случайной величины в интервал $(a/2, a]$. Вычислить значения $\bar{\xi}$ и σ_{ξ}^2 .

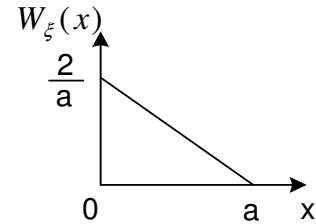


Рис. 2.5

Решение. Из рис. 2.5 видно, что $W_{\xi}(x)$ представляет собой прямую линию, уравнение которой имеет вид

$$W_{\xi}(x) = -k(x - a) = k(a - x).$$

Значение коэффициента k находим из условия: при $x = 0$ $W_{\xi}(x) = \frac{2}{a} = ka$.

Следовательно, $k = \frac{2}{a^2}$. Таким образом, имеем

$$W_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{2}{a} \left(1 - \frac{x}{a}\right), & 0 < x \leq a; \\ 0, & x \leq 0; x > a. \end{cases}$$

На интервале $0 < x \leq a$ выражение для $F_{\xi}(x)$ имеет вид (см. (2.8))

$$F_{\xi}(x) = \int_0^x W_{\xi}(x') dx' = \int_0^x \frac{2}{a} \left(1 - \frac{x'}{a}\right) dx' = \frac{2}{a} x - \frac{x^2}{a^2} = \frac{x}{a} \left(2 - \frac{x}{a}\right).$$

Следовательно,

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{x}{a} \left(2 - \frac{x}{a}\right), & 0 < x \leq a; \\ 1, & x > a. \end{cases}$$

Вероятность попадания величины ξ в интервал $(a/2, a]$ находится как

$$P\left\{\frac{a}{2} < \xi \leq a\right\} = F_{\xi}(a) - F_{\xi}\left(\frac{a}{2}\right) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

Среднее значение $\bar{\xi}$ и средний квадрат $\overline{\xi^2}$ случайной величины ξ равны

$$m_1 = \bar{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} x W_{\xi}(x) dx = \int_0^a x \frac{2}{a} \left(1 - \frac{x}{a}\right) dx = \frac{2}{a} \left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{3}\right) = \frac{2}{a} \cdot \frac{a^2}{6} = \frac{a}{3}.$$

$$m_2 = \overline{\xi^2} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 W_{\xi}(x) dx = \frac{2}{a} \left(\int_0^a x^2 dx - \int_0^a \frac{x^3}{a} dx\right) = \frac{2}{a} \left(\frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4a}\right) = \frac{2}{a} \cdot \frac{a^3}{12} = \frac{a^2}{6}.$$

По найденным первым и вторым начальным моментам по формуле (2.27) находим дисперсию

$$\sigma_{\xi}^2 = M_2 = m_2 - m_1^2 = \frac{a^2}{6} - \frac{a^2}{9} = \frac{a^2}{18}$$

§ 3. Законы распределения случайных величин

Любая функция $W_\xi(x)$, удовлетворяющая сформулированным в §2 условиям, может выступать в роли плотности распределения вероятностей какой-то случайной величины. Однако в физических задачах мы, как правило, встречаемся с довольно ограниченным набором функций $W_\xi(x)$. Рассмотрим некоторые из них.

3.1. Равномерное распределение

Для непрерывной случайной величины ξ , изменяющейся в интервале $(a, b]$, простейшим распределением является **равномерное**:

$$W_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a; \\ W_0, & a < x \leq b; \\ 0, & b < x. \end{cases} \quad (3.1)$$

Значение постоянной $W_0 = Const$ определяется из условия нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_\xi(x) dx = W_0 \int_a^b dx = W_0(b-a) = 1, \quad (3.2)$$

т.е. $W_0 = 1/(b-a)$. Вероятность P того, что случайная величина ξ попадет в интервал значений $(x, x+l]$, где $a < x < x+l \leq b$, не зависит от x а определяется только длиной интервала l :

$$P = \{x < \xi \leq x+l\} = \int_x^{x+l} W_\xi(x') dx' = W_0 l = \frac{l}{b-a}. \quad (3.3)$$

График плотности вероятностей $W_\xi(x)$ и соответствующей ей функции распределения $F_\xi(x)$ приведен на рис. 3.1.

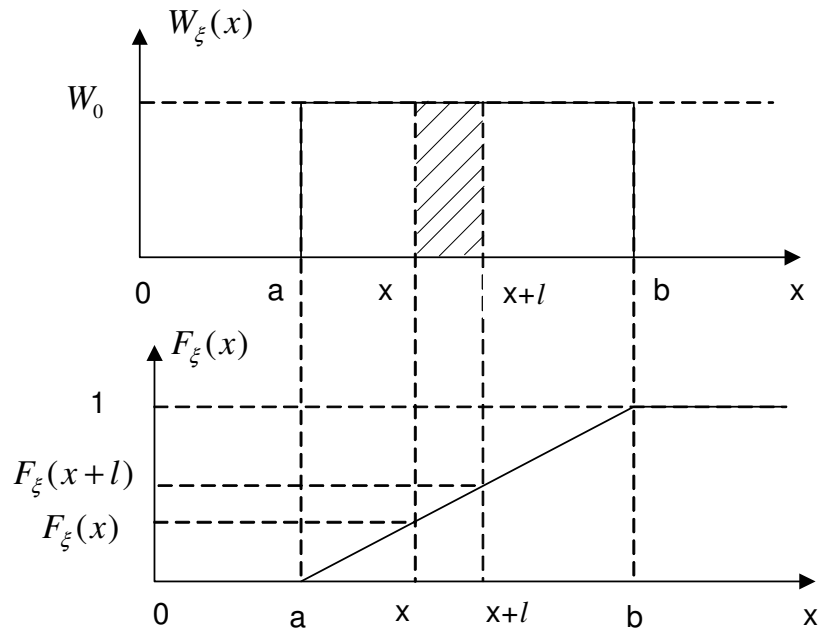


Рис. 3.1.

Для дискретной случайной величины, принимающей с одинаковой вероятностью $p_i = p = Const$ одно из N возможных значений x_i ($i = 1, 2, \dots, N$) соответствующее распределение называется **равновероятным**. Для данного распределения, согласно (2.14), имеем

$$W_\xi(x) = p \sum_{i=1}^N \delta(x - x_i). \quad (3.4)$$

Из условия нормировки следует:

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_\xi(x) dx = p \sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_i) dx = pN = 1, \quad \text{т.е.} \quad p = \frac{1}{N}. \quad (3.5)$$

Например, при бросании игральной кости выпадение любого числа очков от $x_1 = 1$ до $x_6 = 6$ происходит с равной вероятностью $p = 1/6$.

3.2. Биномиальное распределение. Схема Бернулли (1713 г.).

Среди множества возможных законов распределения вероятностей особую роль играют распределения, возникающие в результате решения простейших вероятностных задач, и обладающих поэтому достаточно большой общностью и широкой областью применения. Наиболее важным из них является **биномиальное распределение**, возникающее в задачах, которые сводятся к схеме независимых последовательных испытаний.

Пусть производится N независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться либо не появиться. Условимся считать, что вероятность появления события A в каждом испытании одна и та же, а именно равна p . Следовательно, вероятность непоявления события A (дополнительное событие \bar{A}) так же постоянна и равна $q = 1 - p$. Таким образом, событие \bar{A} имеет вероятность $q = 1 - p$. Поставим перед собой задачу вычислить вероятность того, что при N испытаниях событие A осуществится ровно n раз.

Результат серии из N испытаний может быть записан, например, в виде

$$\underbrace{A\bar{A}\bar{A}\bar{A}\bar{A}\bar{A}\dots A\bar{A}}_N. \quad (3.6)$$

Эта запись означает, что в первом и втором опытах A произошло, в третьем - не произошло, в четвёртом - произошло, в пятом – нет и т.д. Нас интересует событие M , состоящее в том, что A в цепочке (3.6) произойдет ровно n раз. Событие M можно рассматривать как сложное событие, равное произведению независимых указанных выше элементарных событий A и \bar{A} . В этом случае вероятность события M – есть произведение вероятностей появления событий A и \bar{A} соответственно (см. формулу умножения вероятностей (1.19)):

$$P\{M\} = \overbrace{ppq\bar{p}q\bar{q}\dots pq}^N = p^n q^{N-n}. \quad (3.7-a)$$

Интересующее нас событие M происходит всякий раз, когда в цепочке типа (3.6) A повторяется n раз, независимо от последовательности A и \bar{A} :

$$\left. \begin{aligned} P\{M\} &= prqrqq\dots pq = p^n q^{N-n}, \\ P\{M\} &= pqqrqq\dots qp = p^n q^{N-n}, \\ &\text{-----}, \\ &\text{-----}, \\ P\{M\} &= qppqpp\dots qq = p^n q^{N-n}. \end{aligned} \right\} C_N^n. \quad (3.7-б)$$

При этом сложные события типа (3.7-б), отличающиеся только перестановками A и \bar{A} , несовместны, так что вероятность их суммы есть сумма вероятностей каждого из них. Видно, что эти события равновероятны, а их число равно числу способов выбора n элементов из N , т.е. числу сочетаний C_N^n . Следовательно, сумма вероятностей (3.7-б) всех событий типа (3.6), в которых событие A произошло n раз, равна

$$P\{S\} = P_N(n) = \sum_{\substack{\text{по всем частным} \\ \text{случаям } M}} p^n q^{N-n} = C_N^n p^n q^{N-n}, \quad (3.8)$$

где $C_N^n = \frac{N!}{n!(N-n)!}$ - биномиальные коэффициенты (число сочетаний).

Формулой (3.8) выражается **биномиальный закон распределения вероятностей**. Проверим, что (3.8) удовлетворяет условию нормировки. Полная группа событий состоит, очевидно, в том, что n может принимать все значения от $n=0$ до $n=N$. Следовательно, должно выполняться условие нормировки:

$$\sum_{n=0}^N P_N(n) = 1. \quad (3.9)$$

Подставим в (3.9) найденное распределение (3.8) и воспользуемся формулой бинома Ньютона (отсюда и название распределения):

$$\sum_{n=0}^N C_N^n p^n q^{N-n} = (p+q)^N = 1^N = 1. \quad (3.10)$$

Мы учли, что вероятность дополнительного события \bar{A} равна $q = 1 - p$.

Моменты биномиального распределения

Легко показать, что начальный момент k -го порядка:

$$\langle n^k \rangle = \sum_{n=0}^N n^k P_N(n) \quad (3.11)$$

удобно вычислять, пользуясь формулой

$$\langle n^k \rangle = \left(p \frac{\partial}{\partial p} \right)^k (p+q)^N \Big|_{p+q=1}. \quad (3.12)$$

В частности, первые два момента равны

$$\langle n \rangle = \left(p \frac{\partial}{\partial p} \right) (p+q)^N \Big|_{p+q=1} = Np(p+q)^{N-1} \Big|_{p+q=1} = Np, \quad (3.13)$$

$$\langle n^2 \rangle = \left(p \frac{\partial}{\partial p} \right) \left[p \frac{\partial}{\partial p} (p+q)^N \right] \Big|_{p+q=1} = Np[1 + p(N-1)] = Np[q + Np]. \quad (3.14)$$

Дисперсия случайной величины при этом имеет следующий вид:

$$\sigma_n^2 = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = Npq. \quad (3.15)$$

Примеры

Приведем ряд конкретных примеров, в которых задача сводится непосредственно к схеме Бернули.

1. **Урновая задача.** В урне лежат белые и чёрные шары. Вероятность том, что взятый наугад шар будет белым (событие A) равна p . Какова вероятность того, что из взятых N шаров белыми окажутся n (для того чтобы обеспечить независимость испытаний, взятый шар нужно обязательно возвращать обратно и содержимое урны перемешивать).

2. **Бросание монеты.** Какова вероятность того, что при N бросаниях n раз выпадет “орел”, если при одном бросании $p = 1/2$?

3. **Флуктуации плотности.** В объеме V находится N молекул газа. Вероятность попадания молекулы в выделенный из V объем v (событие A) равна p . Какова вероятность того, что в V находится n каких-то молекул?

4. **Случайные блуждания** (броуновской частицы, человека и т.д.). Какова вероятность того, что за N «шагов» частица (человек) уйдет на n шагов влево (или вправо), если вероятность шага влево равна p ?

5. **Телефонные вызовы.** Телефонистка дежурит в течение времени T . Вероятность того, что за очень малый интервал τ произойдет вызов есть p . Какова вероятность того, что за время дежурства произойдет n вызовов?

Более детально рассмотрим две задачи.

6. **Задача о надежности сложной системы,** состоящей из большого числа N одинаковых элементов (сопротивлений, реле и т.д.). Пусть вероятность выхода из строя или отказа (событие A) каждого из них в течение заданного интервала времени T равна p . Какова вероятность того, что система откажет за время T ? Сложное событие, вероятность P которого нас интересует, происходит, если откажет либо один элемент, либо два, либо все N элементов. Эти события несовместимые и, следовательно, вероятность P их суммы равна сумме вероятностей:

$$P = \sum_{n=1}^N P_N(n). \quad (3.16)$$

Прибавим и вычтем из (3.16) $P_N(0)$ и воспользуемся условием нормировки (3.9):

$$P = \sum_{n=1}^N P_N(n) + P_N(0) - P_N(0) = \sum_{n=0}^N P_N(n) - P_N(0) = 1 - C_N^0 p^0 q^N = 1 - (1-p)^N. \quad (3.17)$$

Этот результат, конечно, можно было бы получить значительно более простым способом, рассмотрев вероятность \bar{P} дополнительного события, заключающегося в том, что ни один элемент не выйдет из строя (т.е. A - не произойдет ни разу, а \bar{A} - все N раз):

$$\bar{P} = P_N(0) = q^N. \quad (3.18)$$

Отсюда, из соотношения $P + \bar{P} = 1$ следует формула (3.17).

7. Ещё один пример, который полезно рассмотреть, - это **дробовый шум** в электровакуумных приборах. Рассмотрим ток, протекающий через двухэлектродную лампу. Пусть за время T из катода вылетело n электронов, которые перенесли заряд $q_T = ne$ и, следовательно, создали в цепи ток:

$$I = \frac{q_T}{T} = \frac{ne}{T}. \quad (3.19)$$

Число n вылетевших электронов, конечно, является случайной величиной. Поэтому и ток I - случайная величина, флуктуирующая около какого-то среднего значения:

$$\bar{I} = \frac{\bar{n}e}{T} = n_1 e, \quad (3.20)$$

где $n_1 = \bar{n}/T$ - среднее число электронов, вылетающее с катода в единицу времени. Из (3.19) и (3.20) видно, что распределение вероятностей для флуктуаций тока $\delta I = I - \bar{I}$ (эти флуктуации тока, вызванные дискретным характером переноса заряда, и носят название дробового шума) определяется распределением числа n . Для того чтобы применить биномиальное распределение, мы должны свести эту задачу к схеме Бернулли - последовательности независимых испытаний. Для этого разобьём весь интервал T на N интервалов длительностью $\tau = T/N$. Будем считать, что вылет каждого электрона с катода в течение промежутка времени $0 < t \leq T$ является равновероятным событием. В этом случае вероятность p вылета одного электрона за время τ пропорциональна $p \sim \tau/T$ (см. формулу (3.3)). Вылеты отдельных электронов можно считать независимыми событиями (если, конечно, не учитывать пространственный заряд). Поэтому вероятность вылета двух электронов за то же время $\sim (\tau/T)^2, \dots, k$ электронов $\sim (\tau/T)^k$. Будем предполагать, что τ/T - настолько мало (т.е. N - настолько велико), что вероятностью вылета за время τ более чем одного электрона можно пренебречь. Таким образом, за время τ может произойти только два события: вылет одного электрона (событие A с вероятностью p) и отсутствие вылета (событие \bar{A} с вероятностью $q = 1 - p$). Задача сведена к схеме Бернулли и, следовательно, распределение n - биномиальное:

$$P_N(n) = C_N^n p^n q^{N-n}. \quad (3.21)$$

3.3. Распределения Пуассона и Лапласа

Найденное распределение (3.21) не может нас полностью удовлетворить: в него входит неизвестная вероятность p и неопределенное число N , предполагающееся очень большим. Для определения p , с одной стороны, воспользуемся определением $\bar{n} = Np$, откуда следует

$$p = \frac{\bar{n}}{N}. \quad (3.22)$$

С другой стороны, из определения среднего тока \bar{I} по формуле (3.20), находим

$$\bar{n} = \frac{T}{e} \bar{I}. \quad (3.23)$$

Учитывая, что для фиксированного промежутка времени T величина \bar{I} определяется только конструктивными особенностями лампы, температурой катода, разностью потенциалов между катодом и анодом и т.д., можно считать $\bar{I} = Const$. Отсюда получаем, что и $\bar{n} = Const$ и не зависит от числа разбиений N .

Будем теперь увеличивать число разбиений ($N \rightarrow \infty$). С ростом N среднее количество электронов, вылетевших с катода за фиксированное время T , не изменяется ($\bar{n} = Const$), следовательно, $p = \bar{n}/N \rightarrow 0$. Таким образом, нам необходимо отыскать предел распределения (3.21) при условии, что $N \rightarrow \infty$ и $p = \bar{n}/N \rightarrow 0$. Для этого подставим $p = \bar{n}/N$ и $q = 1 - p = 1 - \bar{n}/N$ в (3.21), запишем в явном виде выражение для C_N^n и перейдем к пределу $\bar{n}/N \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} P_N(n) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N(N-1)\dots(N-n+1)(N-n)!}{n!(N-n)!} \left(\frac{\bar{n}}{N}\right)^n \left(1 - \frac{\bar{n}}{N}\right)^{N-n} = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\bar{n}^n}{n!} \left(1 - \frac{\bar{n}}{N}\right)^{-n} \left(1 - \frac{\bar{n}}{N}\right)^N = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}} \equiv P(n). \end{aligned}$$

При этом мы воспользовались формулой

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\bar{n}}{N}\right)^N = e^{-\bar{n}}.$$

Распределение

$$P(n) = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}} \quad (3.24)$$

называется **распределением Пуассона**. Проверим, что $P(n)$ удовлетворяет условию нормировки:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n) = e^{-\bar{n}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^n}{n!} = e^{-\bar{n}} \cdot e^{\bar{n}} = 1. \quad (3.25)$$

Убедимся, что первый начальный момент m_1 совпадает со средним значением \bar{n} :

$$\begin{aligned} m_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} nP(n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} \bar{n}^n e^{-\bar{n}} = \\ &= e^{-\bar{n}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{n}^n}{(n-1)!} = \bar{n} e^{-\bar{n}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{n}^{n-1}}{(n-1)!} = \bar{n} e^{-\bar{n}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^k}{k!} = \bar{n}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Второй начальный момент m_2 находим с помощью аналогичных вычислений:

$$\begin{aligned} m_2 &= \langle n^2 \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 P(n) = e^{-\bar{n}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n!} \bar{n}^n = \\ &= e^{-\bar{n}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} \bar{n}^n = e^{-\bar{n}} \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\bar{n}^n}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{n}^n}{(n-1)!} \right\} = \bar{n}^2 + \bar{n}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Следовательно,

$$\sigma_n^2 = \langle (n - \bar{n})^2 \rangle = \langle n^2 \rangle - \bar{n}^2 = \bar{n}. \quad (3.28)$$

Другой предельный случай биномиального закона при $N \rightarrow \infty$ получается, когда p не стремится к нулю, а имеет определенное значение, отличное от нуля и единицы. Тем самым с ростом N растет также и \bar{n} . Из формулы (3.28) видно, что при $\bar{n} \gg 1$

среднеквадратичное отклонение $\sigma_n = \sqrt{\bar{n}}$ значительно меньше среднего значения \bar{n} : $\sigma_n/\bar{n} \sim 1/\sqrt{\bar{n}} \ll 1$, т.е. распределение $P(n)$ оказывается сосредоточенным в основном около значений $n \approx \bar{n} \gg 1$. Учитывая это обстоятельство, введем в рассмотрение $\delta n = n - \bar{n}$ и в формуле (3.24) в области значений $\bar{n} \gg 1$ и $|\delta n|/\bar{n} \ll 1$ произведем следующие упрощения:

1. Для больших значений n ($n \gg 1$) можно воспользоваться формулой Стирлинга для $n!$:

$$n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n},$$

и мы приходим к распределению вида:

$$P(n) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{\bar{n}}{n}\right)^n e^{n-\bar{n}} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi \bar{n}}} \left(\frac{\bar{n}}{n}\right)^n e^{\delta n}.$$

2. Введя обозначение $F(n) = \left(\frac{\bar{n}}{n}\right)^n$, с точностью до квадратичных слагаемых по малой величине $|\delta n|/\bar{n} \ll 1$ вычислим приближенное значение $\ln F(n)$:

$$\ln F(n) = n \ln \left(\frac{\bar{n}}{n}\right) = -(\bar{n} + \delta n) \ln \left(1 + \frac{\delta n}{\bar{n}}\right) \approx -(\bar{n} + \delta n) \left(\frac{\delta n}{\bar{n}} - \frac{1}{2} \frac{\delta n^2}{\bar{n}^2}\right) \approx -\delta n - \frac{1}{2} \frac{\delta n^2}{\bar{n}}.$$

Следовательно,

$$F(n) \approx \exp \left\{ -\delta n - \frac{1}{2} \frac{\delta n^2}{\bar{n}} \right\}.$$

С учетом всех проделанных упрощений распределение (3.24) может быть представлено в следующем виде:

$$P(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \bar{n}}} e^{-\frac{\delta n^2}{2\bar{n}}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi \sigma_n}} e^{-\frac{(n-\bar{n})^2}{2\sigma_n^2}}. \quad (3.29)$$

Данное выражение называется **распределением Лапласа** или **нормальным законом** распределения.

Таким образом, из биномиального распределения мы получили еще два важных закона распределения Пуассона и Лапласа:

$$C_N^n p^n q^{N-n} \xrightarrow[\substack{N \rightarrow \infty, \\ \bar{n}/N \rightarrow 0}]{\bar{n}} \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}} \xrightarrow{\bar{n} \gg 1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{n}}} e^{-\frac{(n-\bar{n})^2}{2\bar{n}}}. \quad (3.30)$$

ЗАДАЧИ

1. Случайная величина φ распределена по нормальному закону со средним значением $\bar{\varphi} = 0$ и дисперсией σ_φ^2 . Найти среднее значение другой случайной величины $\xi = e^{-i\varphi}$.

Решение. При нулевом среднем нормальный закон (3.29) имеет вид

$$W(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_\varphi} e^{-\frac{\varphi^2}{2\sigma_\varphi^2}}.$$

Для определения $\bar{\xi}$ воспользуемся формулой (2.30):

$$\begin{aligned} \bar{\xi} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\varphi} W(\varphi) d\varphi = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\varphi} e^{-\frac{\varphi^2}{2\sigma_\varphi^2}} d\varphi = \\ &= \frac{\sqrt{2\sigma_\varphi^2}}{\sqrt{2\pi} \sigma_\varphi} \exp\left(-\frac{\sigma_\varphi^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \exp\left(-\frac{\sigma_\varphi^2}{2}\right). \end{aligned}$$

2. На радиомаяк-ответчик поступает в среднем 15 запросов в час. Считая число запросов случайной величиной, распределенной по закону Пуассона, определить вероятность того, что за $T = 4$ мин:

- поступит ровно 3 запроса;
- не поступит ни одного запроса;
- поступит хотя бы один запрос.

Решение. В распределении Пуассона (3.24), описывающем вероятность появления искомого события A на интервале времени $(0, t]$, входит величина \bar{n} , которая является средним количеством появлений события A на данном интервале. Согласно (3.20) величина \bar{n} легко определяется, если известно среднее число событий в единицу времени n_1 и длительность интервала t : $\bar{n} = n_1 t$. В нашем случае $t = T = 4$ мин, а среднее количество запросов за единицу времени равно $n_1 = \frac{15}{60_{\text{мин}}} = 1/4$ мин⁻¹. Отсюда находим $\bar{n} = n_1 T = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1$. Зная \bar{n} , с помощью распределения Пуассона (3.24) определяем искомые вероятности:

$$\text{а) } P(3) = \frac{1^3}{3!} e^{-1} = \frac{1}{6e} \approx 0,061 ;$$

$$\text{б) } P(0) = \frac{1^0}{0!} e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0,37 ;$$

$$\text{в) } P(n \geq 1) = 1 - P(0) = 1 - 1/e \approx 0,63 .$$

3. Отказ в работе прибора происходит в среднем 1 раз за 200 часов. Определить вероятность того, что за $T = 10$ час не произойдет ни одного отказа.

Решение. Вначале находим среднее число отказов в единицу времени $n_1 = \frac{1}{200}$ час⁻¹. Отсюда среднее число отказов за $T = 10$ час равно $\bar{n} = n_1 T = \frac{1}{20}$. По известному значению \bar{n} , согласно формуле (3.24), определяем искомую вероятность

$$P(0) = \frac{\bar{n}^0}{0!} e^{-\bar{n}} = e^{-1/20} \approx 1 - \frac{1}{20} \approx 0,95 .$$

4. Найти плотность распределения вероятности для времени безотказной работы прибора, упомянутого в предыдущей задаче.

Решение. Рассмотрим два интервала наблюдения $(0, t_1]$ и $(0, t_2]$ и вычислим вероятности безотказной работы для каждого из них:

$$P(t_{1,2}) = P_{1,2}(0) = \frac{\bar{n}_{1,2}^0}{0!} e^{-\bar{n}_{1,2}} = e^{-\bar{n}_{1,2}} . \quad (1)$$

Входящие сюда средние значения $\bar{n}_{1,2}$ пропорциональны среднему числу появлений событий n_1 и соответствующим длительностям интервалов $t_{1,2}$: $\bar{n}_{1,2} = n_1 t_{1,2}$.

Пусть теперь $t_1 = t$, а $t_2 = t + \Delta t$, где Δt небольшое приращение времени. Согласно формуле (1) запишем разность вероятностей для двух близких моментов времени:

$$\begin{aligned} P(t_1) - P(t_2) &= e^{-n_1 t} - e^{-n_1(t+\Delta t)} = e^{-n_1 t} (1 - e^{-n_1 \Delta t}) = \\ &= e^{-n_1 t} (1 - 1 + n_1 \Delta t - \dots) \approx n_1 \Delta t e^{-n_1 t}. \end{aligned} \quad (2)$$

С другой стороны, разность вероятностей между двумя близкими моментами времени по определению равна $W(t) \Delta t$. Приравнявая

$$P(t_1) - P(t_2) = n_1 \Delta t e^{-n_1 t} = W(t) \Delta t, \quad (3)$$

находим

$$W(t) = n_1 e^{-n_1 t},$$

где $n_1 = \frac{1}{200} \text{ час}^{-1}$.

§ 4. Совокупность случайных величин и функции случайных аргументов

Рассмотрим две случайные величины ξ и η , которые могут принимать вещественные значения x и y соответственно. Полное статистическое описание каждой из них, как мы знаем из § 2, дано законом распределения вероятностей F или плотностью распределения вероятностей W . Эти функции для ξ и η , вообще говоря, различны, и для того чтобы их отличать, следует писать соответствующий индекс внизу:

$$F_{\xi}(x) = P\{\xi \leq x\}; \quad W_{\xi}(x) = \frac{dF_{\xi}(x)}{dx}; \quad (4.1)$$

$$F_{\eta}(y) = P\{\eta \leq y\}; \quad W_{\eta}(y) = \frac{dF_{\eta}(y)}{dy}. \quad (4.2)$$

Статистически полное описание совокупности двух случайных величин, по аналогии с (2.1), задается совместным законом распределения вероятностей (**интегральной функцией распределения**)

$$F_{\xi\eta}(x, y) = P\{\xi \leq x, \eta \leq y\}. \quad (4.3)$$

Плотность совместного распределения вероятностей ξ и η определяется по формуле

$$W_{\xi\eta}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{\xi\eta}(x, y). \quad (4.4)$$

Функцию $W_{\xi\eta}(x, y)$ называют еще **двумерной плотностью распределения вероятностей**, в отличие от одномерных $W_{\xi}(x)$ и $W_{\eta}(y)$; эта терминология применяется и для интегральных функций распределения: $F_{\xi\eta}(x, y)$ - двумерная, а $F_{\xi}(x)$ и $F_{\eta}(y)$ - одномерные функции. Индексы ξ и η у функций F и W мы в дальнейшем иногда будем опускать, условившись, что аргумент x относится только к величине ξ , а y - к η , т.е. $W_{\xi}(x) \equiv W(x)$, $F_{\xi}(x) \equiv F(x)$, аналогично $W_{\eta}(y) \equiv W(y)$, $F_{\eta}(y) \equiv F(y)$ и $F_{\xi\eta}(x, y) \equiv F(x, y)$, $W_{\xi\eta}(x, y) \equiv W(x, y)$. Следует при этом всегда помнить, что, например, $W(x)$ и $W(y)$ - это, вообще говоря, разные функции, а не одна функция при различных значениях аргумента.

4.1. Свойства интегральной функции и плотности распределения вероятностей

Из определения (4.3) следуют **фундаментальные свойства** функции $F(x, y)$:

1. Так как вероятность $P\{\dots\}$ по определению есть **неотрицательная величина**, не превышающая единицу, то

$$0 \leq F(x, y) \leq 1. \quad (4.5)$$

2. **Свойство симметрии** $F(x, y)$ следует из того факта, что вероятность P суммы двух событий ($\xi \leq x$ и $\eta \leq y$) не зависит от порядка, в котором они перечисляются:

$$F(x, y) = P\{\xi \leq x, \eta \leq y\} = P\{\eta \leq y, \xi \leq x\} = F(y, x). \quad (4.6)$$

3. **Условие согласованности** $F(x, y)$ с одномерными функциями $F(x)$ и $F(y)$ следует из того, что события $\xi \leq \infty$ или $\eta \leq \infty$ являются достоверными:

$$F(\infty, y) = P\{\xi \leq \infty, \eta \leq y\} = P\{\eta \leq y\} = F(y), \quad (4.7)$$

$$F(x, \infty) = P\{\xi \leq x, \eta \leq \infty\} = P\{\xi \leq x\} = F(x). \quad (4.8)$$

4. Так как события $\xi \leq -\infty$ и $\eta \leq -\infty$ являются невозможными, то

$$F(-\infty, y) = P\{\xi \leq -\infty, \eta \leq y\} = 0, \quad (4.9)$$

$$F(x, -\infty) = P\{\xi \leq x, \eta \leq -\infty\} = 0. \quad (4.10)$$

5. Так же, как и в §2 (см. (2.4)), можно доказать, что $F(x, y)$ - **неубывающая функция** каждого аргумента (при фиксированном значении другого):

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x, y) \geq 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} F(x, y) \geq 0. \quad (4.11)$$

Причем, как следует из свойств 4 и 5, она возрастает от нуля при $\xi = -\infty$ или $\eta = -\infty$ до единицы при $\xi = \eta = \infty$.

Из определения (4.4) и перечисленных выше свойств функции $F(x, y)$ вытекают следующие **свойства** $W(x, y)$:

1. $W(x, y)$ - **неотрицательная функция** на всей плоскости x, y :

$$W(x, y) \geq 0. \quad (4.12)$$

2. **Свойство симметрии:**

$$W(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} F(y, x) = W(y, x). \quad (4.13)$$

3. **Связь с $F(x, y)$.** Интегрирование (4.4) с учетом условий (4.9) и (4.10) дает

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x dx' \int_{-\infty}^y dy' W(x', y'). \quad (4.14)$$

4. Из (4.4), (4.7) и (4.8) следует **условие согласованности:**

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x, y') dy' = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^x dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' W(x', y') = \frac{d}{dx} F(x) = W(x). \quad (4.15)$$

Аналогично, для интеграла по dx' :

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x, y) dx = W(y). \quad (4.16)$$

5. Положив в (4.14) $x, y = \infty$, получаем **условие нормировки:**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(x, y) dx dy = F(\infty, \infty) = 1. \quad (4.17)$$

6. Если ξ и η рассматривать, как декартовы проекции случайного вектора $\vec{\zeta}$, то $F(x, y) = P\{\xi \leq x, \eta \leq y\}$ есть вероятность попадания вектора в заштрихованную область на рис. 4.1-а.

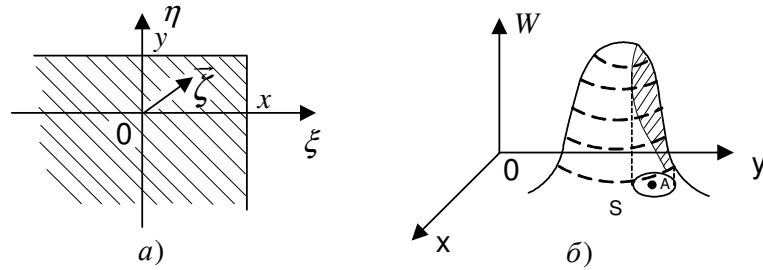


Рис. 4.1.

Функцию $W(x, y)$, в свою очередь, можно представить в виде некоторой поверхности. Тогда вероятность того, что конец случайного вектора $\vec{\zeta}$ (точка A) будет находиться внутри некоторой площадки S ($A \in S$), равна объему, заключенному внутри цилиндрической поверхности, опирающейся на площадку S и ограниченному сверху поверхностью $W(x, y)$ (см. рис 4.1-б):

$$P\{A \in S\} = \iint_S W(x, y) dx dy. \quad (4.18)$$

7. Две случайные величины ξ и η называются независимыми, если независимы события $\xi \leq x$ и $\eta \leq y$. В этом случае двумерные функции F и W распадаются на произведение одномерных, так как, согласно формуле умножения вероятностей, имеем:

$$F(x, y) = P\{\xi \leq x, \eta \leq y\} = P\{\xi \leq x\} \cdot P\{\eta \leq y\} = F(x)F(y), \quad (4.19)$$

$$W(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x, y) = \frac{dF(x)}{dx} \cdot \frac{dF(y)}{dy} = W(x)W(y). \quad (4.20)$$

4.2. Начальные и центральные моменты совокупности случайных величин

Средние от произведения целых положительных степеней случайных величин ξ и η называются **начальными смешанными моментами** и обозначаются

$$m_{ik} = \langle \xi^i \eta^k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^i y^k W(x, y) dx dy, \quad (4.21)$$

причем сумма $i + k$ называется порядком момента.

По аналогии с (2.26) можно ввести **центральные смешанные моменты**:

$$M_{ik} = \langle (\xi - \bar{\xi})^i (\eta - \bar{\eta})^k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{\xi})^i (y - \bar{\eta})^k W(x, y) dx dy \quad (4.22)$$

Центральный смешанный момент второго порядка M_{11} называется **ковариацией** случайных величин ξ и η :

$$M_{11} = \langle (\xi - \bar{\xi})(\eta - \bar{\eta}) \rangle = \langle \xi \eta \rangle - \langle \xi \rangle \langle \eta \rangle. \quad (4.23)$$

Здесь мы учли, что обозначения $\langle \xi \rangle$ и $\bar{\xi}$ эквивалентны.

Если случайные величины независимы, смешанные моменты m_{ik} выражаются через произведение начальных моментов каждой из случайных величин:

$$m_{ik} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^i y^k W(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} x^i W(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} y^k W(y) dy = \langle \xi^i \rangle \langle \eta^k \rangle. \quad (4.24)$$

В частности, среднее от произведения $\xi \eta$ совпадает с произведением от средних:

$$m_{11} = \langle \xi \eta \rangle = \langle \xi \rangle \langle \eta \rangle. \quad (4.25)$$

Из определения (4.23) видно, что ковариация M_{11} двух независимых величин равна нулю. Следовательно, величина M_{11} может служить мерой зависимости между двумя случайными величинами. В качестве такой меры обычно принимают ковариацию нормированных на стандарт флуктуаций $\alpha = \delta\xi/\sigma_\xi$ и $\beta = \delta\eta/\sigma_\eta$:

$$K = \langle \alpha \beta \rangle = \frac{\langle (\xi - \bar{\xi})(\eta - \bar{\eta}) \rangle}{\sigma_\xi \sigma_\eta} = \frac{\langle \xi \eta \rangle - \langle \xi \rangle \langle \eta \rangle}{\sigma_\xi \sigma_\eta}, \quad (4.26)$$

которую называют **коэффициентом корреляции** (или связи) двух случайных величин. Если $K = 0$, то случайные величины ξ и η называются некоррелированными. Из (4.25) и (4.26) видно, что независимые случайные величины являются некоррелированными. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно: некоррелированные величины могут и не быть независимыми, так как из равенства интегралов (см. (4.24))

$$\langle \xi\eta \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyW(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} xW(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} yW(y) dy = \langle \xi \rangle \langle \eta \rangle \quad (4.27)$$

не следует равенство подынтегральных функций $W(x, y) = W(x)W(y)$, которое является условием независимости.

Итак, **коэффициент корреляции K независимых величин равен нулю**. А какова величина его максимального значения? Докажем, что всегда выполняется неравенство

$$|K| \leq 1. \quad (4.28)$$

Рассмотрим второй момент случайных величин $\alpha \pm \beta$:

$$\langle (\alpha \pm \beta)^2 \rangle = \langle \alpha^2 + \beta^2 \pm 2\alpha\beta \rangle = 2(1 \pm K) \geq 0; \quad (4.29)$$

при этом мы учли определение (4.26) и равенство единице дисперсий случайных величин α и β :

$$\langle \alpha^2 \rangle = \left\langle \left(\frac{\delta\xi}{\sigma_\xi} \right)^2 \right\rangle = \frac{\sigma_\xi^2}{\sigma_\xi^2} = 1; \quad \langle \beta^2 \rangle = 1. \quad (4.30)$$

Но в левой части (4.29) стоит среднее от неотрицательной величины $(\alpha \pm \beta)^2$, следовательно, $1 \pm K \geq 0$, откуда и следует неравенство (4.28). **Величины ξ и η , для которых $K = 1$, называют полностью коррелированными, а в случае $K = -1$ - антикоррелированными. Промежуточные значения K между нулем и единицей**

(минус единицей) соответствуют частично коррелированным величинам. Иногда просто говорят о том, что величины ξ и η коррелируют, если $K \neq 0$.

4.3. Функциональные преобразования случайных величин

Частным, но весьма важным примером двух случайных величин является ситуация, когда одна из них есть детерминированная (неслучайная) функция другой. Итак, пусть мы имеем статистически полное описание случайной величины ξ : например, нам известна ее плотность распределения вероятностей $W_\xi(x)$. Рассмотрим другую случайную величину η , которая получается из ξ путем известного преобразования φ : $\eta = \varphi(\xi)$. Как получить полное статистическое описание η ? Другими словами, как найти плотность распределения вероятностей $W_\eta(y)$?

Рассмотрим сначала простейший случай, когда функция $\varphi(\xi)$ является монотонной и, следовательно, обратная функция $\xi = f(\eta)$ - однозначна (см. рис. 4.2).

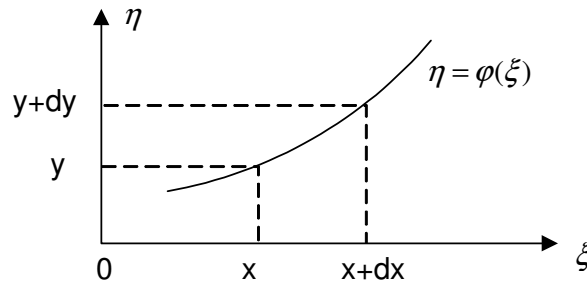


Рис. 4.2.

Вероятность того, что случайная величина ξ попадет в интервал между x и $x + dx$, согласно (2.5), равна

$$dP = W_\xi(x)dx. \quad (4.31)$$

При этом, как следует из рис. 4.2, случайная величина η принимает какое-то значение из интервала между y и $y + dy$, и, следовательно, вероятность этого события, с одной стороны, совпадает с (4.31), а с другой - равна по определению $W_\eta(y)dy$, т.е.

$$W_\eta(y)dy = W_\xi(x)dx. \quad (4.32)$$

Если в правой части этой формулы выразить x через y с помощью обратной функции $x = f(y)$, то мы приходим к формуле, выражающей $W_\eta(y)$ через заданную плотность вероятности $W_\xi(x)$:

$$W_\eta(y) = W_\xi[x = f(y)] \cdot \left| \frac{df(y)}{dy} \right|. \quad (4.33)$$

Необходимость писать модуль от df/dy связана с тем, что для монотонно убывающей функции $\varphi(x)$ положительным dx соответствуют отрицательные dy и, следовательно, в левой части формулы (4.33) в этом случае нужно поставить знак минус.

Если функция $\varphi(x)$ не является монотонной (рис. 4.3), то событию $y < \eta \leq y + dy$ соответствует одно из событий $x_1 < \xi \leq x_1 + dx_1, \dots, x_k < \xi \leq x_k + dx_k$, где x_1, \dots, x_k - корни уравнения $\varphi(x) = y$: обратная функция $x = f(y)$ в этом случае является многозначной и значения x_k принадлежат ее разным ветвям $x_k = f_k(y)$.

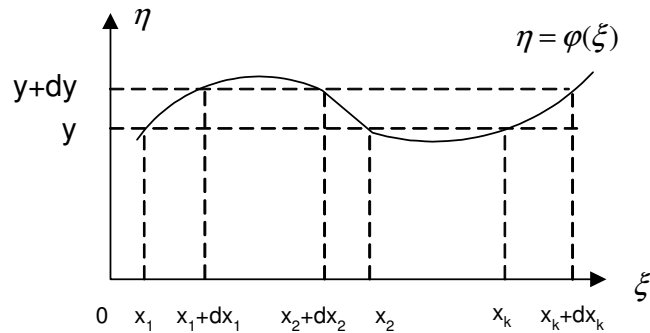


Рис. 4.3.

Так как перечисленные события ($x_k < \xi \leq x_k + dx_k$) являются несовместными (случайная величина ξ не может принимать одновременно сразу несколько значений), то вероятность любого из них (т.е. суммы событий) равна сумме вероятностей $W_\xi(x_k)dx_k$ по формуле сложения вероятностей (1.4):

$$W_\eta(y)dy = \sum_k W_\xi(x_k)dx_k. \quad (4.34)$$

Отсюда следует:

$$W_{\eta}(y) = \sum_k W_{\xi}[f_k(y)] \cdot \left| \frac{df_k(y)}{dy} \right|, \quad (4.35)$$

где суммирование проводится по всем ветвям f_k обратной функции $f(y)$.

В качестве примера рассмотрим случайную величину ξ , равномерно распределенную в интервале $0 \leq \xi \leq \pi$ с плотностью распределения $W_{\xi}(x) = 1/\pi$. Найдем плотность распределения $W_{\eta}(y)$ случайной величины $\eta = \sin \xi$. Обратная функция $x = f(y) = \arcsin y$ является двузначной в области $0 \leq x \leq \pi$, причем для каждой из двух ветвей имеем $df/dy = 1/\sqrt{1-y^2}$, так что, пользуясь формулой (4.35), получаем

$$W_{\eta}(y) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}. \quad (4.36)$$

Рассмотрим теперь преобразование совокупности двух случайных величин ξ_1 и ξ_2 в две другие величины η_1 и η_2 . Пусть между величинами η_i и ξ_i задана функциональная связь:

$$\eta_1 = \varphi_1(\xi_1, \xi_2), \quad \eta_2 = \varphi_2(\xi_1, \xi_2). \quad (4.37)$$

Предположим для простоты, что существует обратное преобразование и оно однозначно:

$$\xi_1 = f_1(\eta_1, \eta_2), \quad \xi_2 = f_2(\eta_1, \eta_2). \quad (4.38)$$

Тогда совместная плотность распределения вероятностей $W_{\eta}(y_1, y_2)$ пары случайных величин η_1 и η_2 может быть выражена через совместную плотность распределения $W_{\xi}(x_1, x_2)$ величин ξ_1 и ξ_2 с помощью рассуждений, аналогичных приведенным выше. Здесь и далее для упрощения записей, в многомерном случае вместо W_{η_1, η_2} , W_{ξ_1, ξ_2} мы будем писать просто W_{η} , W_{ξ} , считая, что подстрочные индексы пробегают все возможные значения $\eta = \eta_1, \eta_2$; $\xi = \xi_1, \xi_2$ и т.д. Будем рассматривать случайные величины ξ_1 и ξ_2 как декартовы координаты точки A на плоскости $\xi_1 O \xi_2$ (левая плоскость на рис. 4.4).

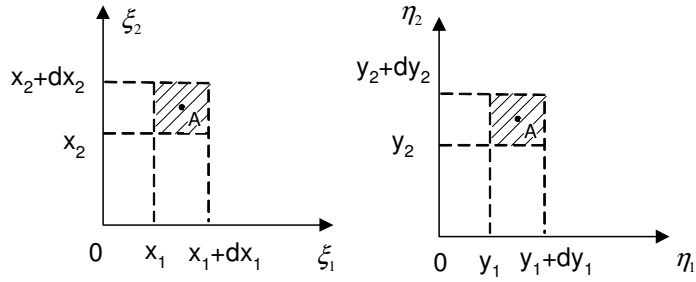


Рис. 4.4.

Вероятность того, что эта точка попадает в заштрихованный прямоугольник со сторонами dx_1 и dx_2 , равна

$$dP = P\{x_1 < \xi_1 \leq x_1 + dx_1, \quad x_2 < \xi_2 \leq x_2 + dx_2\} = W_{\xi}(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \quad (4.39)$$

При этом случайные величины η_1 и η_2 , также рассматриваемые как декартовы координаты точки A на плоскости $\eta_1 O \eta_2$, попадают в заштрихованный прямоугольник (на правой плоскости рис. 4.4) со сторонами dy_1 и dy_2 . Вероятность этого события, с одной стороны, совпадает с (4.39), а, с другой стороны, равна

$$dP = P\{y_1 < \eta_1 \leq y_1 + dy_1; y_2 < \eta_2 \leq y_2 + dy_2\} = W_{\eta}(y_1, y_2) dy_1 dy_2, \quad (4.40)$$

где $y_1 = \varphi_1(x_1, x_2)$, $y_2 = \varphi_2(x_1, x_2)$. Приравнявая выражения (4.39) и (4.40), получаем

$$W_{\eta}(y_1, y_2) = W_{\xi}\left[x_1 = f_1(y_1, y_2), x_2 = f_2(y_1, y_2)\right] \cdot \left| \frac{dx_1 dx_2}{dy_1 dy_2} \right|. \quad (4.41)$$

Второй множитель в правой части этой формулы есть не что иное, как якобиан перехода от переменных x_1, x_2 к переменным y_1, y_2 :

$$\frac{dx_1 dx_2}{dy_1 dy_2} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)}. \quad (4.42)$$

Формула (4.42) имеет простой геометрический смысл – модуль якобиана преобразования равен отношению площади прямоугольника со сторонами dy_1 и dy_2 (правый рис. 4.4) к площади прямоугольника со сторонами dx_1 и dx_2 (левый рис. 4.4).

Пользуясь формулой (4.41), найдем **плотность распределения вероятностей суммы (разности) $\xi_1 \pm \xi_2$ двух случайных величин**. Введем две новые величины:

$$\eta_1 = \varphi_1(\xi_1, \xi_2) = \xi_1 \pm \xi_2, \quad \eta_2 = \varphi_2(\xi_1, \xi_2) = \xi_2. \quad (4.43)$$

Из (4.43) легко находятся обратные функции:

$$\xi_1 = f_1(\eta_1, \eta_2) = \eta_1 \mp \eta_2, \quad \xi_2 = f_2(\eta_1, \eta_2) = \eta_2. \quad (4.44)$$

После чего, вычисляя якобиан перехода, получим:

$$\left| \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} \right| = \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ \pm 1 & 1 \end{array} \right| = 1. \quad (4.45)$$

В результате формула (4.41) дает:

$$W_\eta(y_1, y_2) = W_\xi(x_1 = y_1 \mp y_2, x_2 = y_2). \quad (4.46)$$

Для того чтобы из двумерной плотности распределения вероятностей $W_\eta(y_1, y_2)$ получить интересующую нас плотность распределения вероятностей суммы, т.е. случайной величины η_1 , достаточно, как следует из условий согласованности (4.15) и (4.16), проинтегрировать ее по всем значениям y_2 второй переменной η_2 :

$$W_\eta(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} W_\eta(y_1, y_2) dy_2 = \int_{-\infty}^{\infty} W_\xi(y_1 \mp y_2, y_2) dy_2. \quad (4.47)$$

Аналогично (4.47) можно получить формулы для плотности распределения вероятностей произведения $\xi_1 \cdot \xi_2$ и частного ξ_1 / ξ_2 двух случайных величин ξ_1, ξ_2 . Без доказательства приведем лишь окончательный ответ.

Произведение двух случайных величин. Введя обозначения

$\eta_1 = \xi_1 \cdot \xi_2$, $\eta_2 = \xi_2$, получим

$$W_\eta(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} W_\eta(y_1, y_2) dy_2 = \int_{-\infty}^{\infty} W_\xi\left(\frac{y_1}{y_2}, y_2\right) \frac{dy_2}{|y_2|}. \quad (4.48)$$

Частное двух случайных величин. Введя обозначения $\eta_1 = \xi_1 / \xi_2$, $\eta_2 = \xi_2$,

получим

$$W_\eta(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} W_\eta(y_1, y_2) dy_2 = \int_{-\infty}^{\infty} W_\xi(y_1 \cdot y_2, y_2) |y_2| dy_2. \quad (4.49)$$

Рассмотрим теперь более общий случай, когда нам задана N -мерная плотность распределения вероятности $W_\xi(x_1, x_2, \dots, x_N)$ совокупности случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ и требуется найти среднее значение от детерминированной функции $\eta = \varphi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)$ случайных аргументов ξ_i . Аналогично (2.30) имеем

$$m_1(\eta) = \langle \eta \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, \dots, x_N) W_\xi(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N. \quad (4.50)$$

В частном случае, который будет рассмотрен ниже, формула (4.50) может быть использована для нахождения числовых характеристик суммы и произведения случайных величин.

4.4. Центральная предельная теорема теории вероятности

Рассмотрим теперь статистические характеристики суммы η достаточно большого числа N случайных величин ξ_i :

$$\eta = \sum_{i=1}^N \xi_i, \quad (4.51)$$

Статистически полное описание совокупности случайных величин ξ_i задается N -мерной плотностью распределения вероятностей $W_{\xi}(x_1, x_2, \dots, x_N)$. Согласно (4.50) вычислим среднее значение суммы:

$$\begin{aligned} \langle \eta \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^N \xi_i \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^N x_i \right\} W_{\xi}(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots dx_N = \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} x_i W_{\xi}(x_i) dx_i = \sum_{i=1}^N \bar{\xi}_i. \end{aligned} \quad (4.52)$$

При нахождении $\langle \eta \rangle$ мы воспользовались свойством согласованности (4.15), (4.16) для W_{ξ} .

Предположим теперь, что все величины ξ_i взаимно независимы. Это означает, что N -мерная плотность распределения вероятностей распадается на произведение одномерных:

$$W_{\xi}(x_1 \dots x_N) = \prod_{i=1}^N W_{\xi}(x_i). \quad (4.53)$$

С учетом (4.53) найдем дисперсию суммы:

$$\begin{aligned} \sigma_{\eta}^2 &= \langle (\eta - \bar{\eta})^2 \rangle = \left\langle \left[\sum_{i=1}^N (\xi_i - \bar{\xi}_i) \right]^2 \right\rangle = \sum_{i,k=1}^N \langle (\xi_i - \bar{\xi}_i)(\xi_k - \bar{\xi}_k) \rangle = \\ &= \sum_{i=1}^N \langle (\xi_i - \bar{\xi}_i)^2 \rangle + \sum_{i \neq k} \langle (\xi_i - \bar{\xi}_i)(\xi_k - \bar{\xi}_k) \rangle \end{aligned} \quad (4.54)$$

(напоминаем, что черта сверху и косые скобки означают одно и то же статистическое усреднение: $\langle \xi_i \rangle = \bar{\xi}_i$). Двойная сумма в (4.54) по различным индексам $i \neq k$ обращается в нуль, так как каждое слагаемое в ней есть ковариация двух независимых величин:

$$\langle (\xi_i - \bar{\xi}_i)(\xi_k - \bar{\xi}_k) \rangle = \langle \xi_i \xi_k \rangle - \langle \xi_i \rangle \langle \xi_k \rangle = \langle \xi_i \rangle \langle \xi_k \rangle - \langle \xi_i \rangle \langle \xi_k \rangle = 0. \quad (4.55)$$

Оставшаяся в (4.54) сумма по совпадающим индексам имеет вид

$$\sigma_{\eta}^2 = \sum_{i=1}^N \sigma_i^2, \quad (4.56)$$

где $\sigma_i^2 = \langle (\xi_i - \bar{\xi}_i)^2 \rangle$ - дисперсия случайной величины ξ_i . Таким образом, мы приходим к важному результату: дисперсия суммы независимых величин равна сумме дисперсий каждого слагаемого (заметим, что при выводе (4.56) достаточно было бы потребовать только взаимной некоррелированности слагаемых, которые при этом не обязательно должны быть независимы).

Оказывается, что при $N \rightarrow \infty$ плотность распределения вероятностей суммы η случайных величин ξ_i стремится к некоторому универсальному распределению (которое называется нормальным или распределением Гаусса) вне зависимости от конкретного вида плотности распределения вероятностей каждого слагаемого ξ_i , если только выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sigma_i^2}{\sigma_{\eta}^2} &= 0, \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sigma_{\eta}^n} \sum_{k=1}^N \langle |\xi_k - \bar{\xi}_k|^n \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Этот факт является содержанием центральной предельной теоремы теории вероятностей. Мы не будем ее здесь строго доказывать, а покажем только, как в частном случае одинаково распределенных и взаимно независимых случайных величин ξ_i их сумма η при $N \rightarrow \infty$ становится нормально распределенной. Обозначим через a среднее значение, а через σ^2 - дисперсию каждого слагаемого ξ_i в сумме (4.51):

$$\langle \xi_i \rangle = a; \quad \langle (\xi_i - \bar{\xi}_i)^2 \rangle = \sigma^2. \quad (4.58)$$

Тогда, согласно (4.52) и (4.56), имеем:

$$\langle \eta \rangle = Na, \quad \sigma_{\eta}^2 = N\sigma^2. \quad (4.59)$$

Рассмотрим нормированные флуктуации ζ_i каждого слагаемого ξ_i :

$$\zeta_i = \frac{\xi_i - a}{\sigma\sqrt{N}}$$

и всей суммы η :

$$z = \frac{\eta - \bar{\eta}}{\sigma_\eta} = \frac{\eta - Na}{\sigma\sqrt{N}} = \sum_{i=1}^N \zeta_i. \quad (4.60)$$

Из независимости случайных величин ξ_i следует и независимость нормированных величин ζ_i . Следовательно, многомерная плотность вероятности $W_\zeta(y_1, y_2, \dots, y_N)$ аналогично (4.53) распадается на произведение одномерных. Учитывая это, найдем характеристическую функцию случайной величины z :

$$\begin{aligned} f_z(v) &= \langle e^{ivz} \rangle = \langle \exp \left\{ iv \sum_{i=1}^N \zeta_i \right\} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ iv \sum_{i=1}^N y_i \right\} W_\zeta(y_1, \dots, y_N) dy_1 \dots dy_N = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ iv \sum_{k=1}^N y_k \right\} \prod_{k=1}^N W_\zeta(y_k) dy_1 dy_2 \dots dy_N = \prod_{k=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} e^{ivy_k} W_\zeta(y_k) dy_k = [f_\zeta(v)]^N, \end{aligned} \quad (4.61)$$

где $f_\zeta(v)$ - характеристическая функция отдельного слагаемого ζ_i (одинаковая для всех ζ_i):

$$f_\zeta(v) = \langle e^{iv\zeta} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ivy} W_\zeta(y) dy. \quad (4.62)$$

Представив экспоненту под знаком интеграла в виде

$$e^{ivy} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iv)^k}{k!} y^k,$$

после интегрирования (4.62) получим

$$f_{\zeta}(v) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iv)^k}{k!} \langle \zeta^k \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iv)^k}{k!} \frac{\langle (\xi - a)^k \rangle}{\sigma^k N^{k/2}} = 1 - \frac{v^2}{2N} + O(N^{-2/3}). \quad (4.63)$$

При $N \gg 1$ в этой формуле достаточно оставить только первые два отличных от нуля слагаемых:

$$f_{\zeta}(v) \approx 1 - \frac{v^2}{2N}. \quad (4.64)$$

Подставим (4.64) в (4.61) и перейдем к пределу $N \rightarrow \infty$:

$$f_z(v) \approx \left(1 - \frac{v^2}{2N}\right)^N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} e^{-v^2/2}. \quad (4.65)$$

Зная характеристическую функцию $f_z(v)$, можно найти плотность распределения вероятностей $W(z)$ случайной величины z , применив обратное преобразование Фурье к $f_z(v)$:

$$W(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ivz} f_z(v) dv = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ivz - v^2/2} dv = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}. \quad (4.66)$$

Переходя от z по формуле (4.60) к исходной случайной величине η и пользуясь полученным выше правилом (4.33) преобразования плотностей распределения вероятностей, получаем окончательно:

$$W(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\eta}} e^{-\frac{(\eta - \bar{\eta})^2}{2\sigma_{\eta}^2}}. \quad (4.67)$$

Это и есть распределение Гаусса или нормальное распределение. Схематический график $W(\eta)$ приведен на рис. 4.5, из которого следует, что это есть одномодальное распределение с симметричным максимумом при $\eta = \bar{\eta}$, полуширина которого на уровне $1/\sqrt{e}$ равна стандарту σ_{η} .

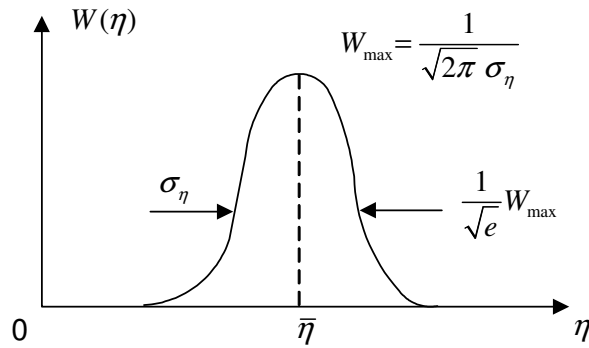


Рис. 4.5.

4.5. Нормальное распределение

Нормальное распределение играет чрезвычайно важную роль во всей статистической физике и, в частности, в статистической радиофизике, так как флуктуации $\delta\eta = \eta - \bar{\eta}$ наблюдаемых величин, как правило, являются результатом действия большого числа различных факторов (ξ_i), которые часто можно считать независимыми и аддитивными (т.е. суммирующимися). Следует отметить одно важное свойство нормального распределения: **любые линейные преобразования нормальной случайной величины приводят опять к нормальному распределению.**

Вернемся к задаче о распределении двух случайных величин ξ и η . Будем рассматривать ξ и η как декартовы координаты “случайной точки” (случайного вектора $\vec{\zeta}$) на плоскости ξ, η (рис. 4.6).

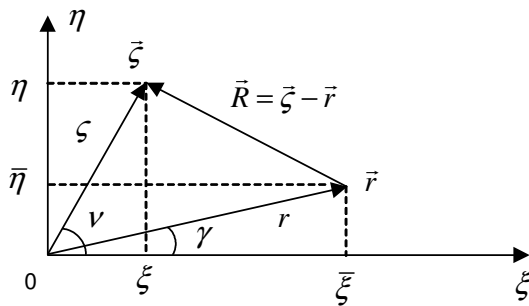


Рис. 4.6.

Наряду с декартовыми координатами положение точки на плоскости можно описывать и в полярной системе - заданием расстояния ζ от начала координат и угла ν или, другими словами, модуля ζ и фазы ν случайного вектора $\vec{\zeta}$, лежащего в плоскости ξ, η :

$$\begin{aligned}\zeta &= \sqrt{\xi^2 + \eta^2}; \\ \nu &= \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\xi}.\end{aligned}\tag{4.68}$$

Если в качестве ξ и η выступают две квадратурные компоненты какого-то колебательного случайного процесса, то ζ - это есть амплитуда колебания, а ν - его фаза. Со случайными процессами мы познакомимся немного позже, а сейчас найдем вид плотности распределения вероятностей $W_{\zeta\nu}(\rho, \varphi)$ модуля и фазы случайного вектора, если известна совместная плотность распределения вероятностей его квадратурных составляющих $W_{\xi\eta}(x, y)$. Напишем формулы обратного к (4.68) преобразования:

$$\xi = \zeta \cos \nu; \quad \eta = \zeta \sin \nu\tag{4.69}$$

и воспользуемся общей формулой (4.41) преобразования W при переходе от одной совокупности переменных (ξ, η) к другой - (ζ, ν) . Якобиан перехода от (x, y) к (ρ, φ) вычисляется легко:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho.\tag{4.70}$$

Следовательно, согласно (4.41) имеем:

$$W_{\zeta\nu}(\rho, \varphi) = \rho W_{\xi\eta}(x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi).\tag{4.71}$$

Пусть ξ и η - нормально распределенные и независимые случайные величины с заданными средними значениями $\bar{\xi}, \bar{\eta}$ и одинаковыми дисперсиями $\sigma_\xi^2 = \sigma_\eta^2 = \sigma^2$:

$$W_{\xi\eta}(x, y) = W_\xi(x)W_\eta(y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[(x-\bar{\xi})^2 + (y-\bar{\eta})^2\right]\right\}.\tag{4.72}$$

Согласно определению

$$\begin{aligned}\bar{\xi} &= r \cos \gamma, \\ \bar{\eta} &= r \sin \gamma,\end{aligned}$$

введем в рассмотрение модуль r и фазу γ постоянного вектора среднего смещения $\bar{r} = \langle \bar{\zeta} \rangle$. Как видно из рисунка 4.6, случайный вектор $\bar{\zeta}(\xi, \eta)$ в этом случае является суммой постоянного вектора $\bar{r} = (\bar{\xi}, \bar{\eta})$ и нормально распределенного случайного вектора $\bar{R} = \bar{\zeta} - \bar{r} = (\xi - \bar{\xi}, \eta - \bar{\eta})$, среднее значение компонент которого равно нулю. Воспользовавшись формулой (4.71), получим

$$\begin{aligned}W_{\zeta\nu}(\rho, \varphi) &= \frac{\rho}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\bar{\rho} - \bar{r})^2\right\} = \\ &= \frac{\rho}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}[\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\varphi - \gamma)]\right\}.\end{aligned}\quad (4.73)$$

Проинтегрировав (4.73) по всем возможным значениям угла φ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$), получим, так называемое **обобщенное распределение Релея** для модуля ζ :

$$W_{\zeta}(\rho) = \int_0^{2\pi} W_{\zeta\nu}(\rho, \varphi) d\varphi = \frac{\rho}{\sigma^2} I_0\left(\frac{\rho r}{\sigma^2}\right) e^{-\frac{\rho^2 + r^2}{2\sigma^2}}, \quad (4.74)$$

Здесь $I_0(z)$ - функция Бесселя первого рода нулевого порядка от мнимого аргумента:

$$I_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{z \cos \varphi} d\varphi.$$

При отсутствии постоянного смещения ($r = 0$) функция Бесселя равна 1 ($I_0(0) = 1$) и обобщенное распределение Релея (4.74) переходит в просто **распределение Релея**:

$$W_{\zeta}(\rho) = \frac{\rho}{\sigma^2} e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}. \quad (4.75)$$

Если же мы проинтегрируем (4.73) по всем возможным значениям ρ , то получим закон распределения фазы $W_v(\varphi)$. В частности, при отсутствии постоянного смещения ($r = 0$) получаем равномерное распределение:

$$W_v(\varphi) = \int_0^{\infty} W_{\zeta v}(\rho, \varphi) d\rho = \frac{1}{2\pi}, \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi). \quad (4.76)$$

Совокупность графиков $W_{\zeta}(\rho)$ как функции аргумента ρ/σ при различных значениях параметра r/σ приведена на рис. 4.7.

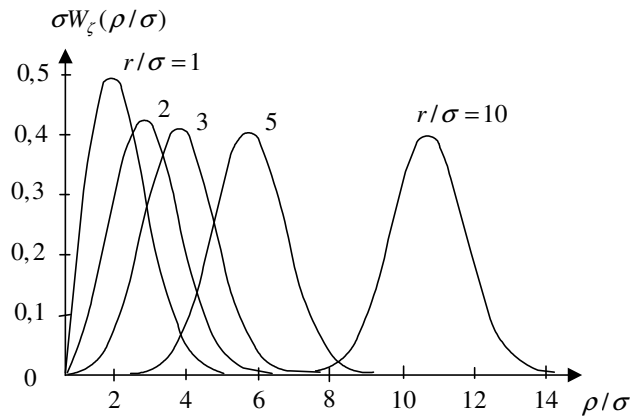


Рис. 4.7.

В предельном случае $r \gg \sigma$, когда вектор $\vec{\zeta}$ испытывает лишь малые флуктуации около постоянного вектора \vec{r} , вместо функции I_0 в (4.74) можно воспользоваться ее асимптотическим представлением:

$$I_0(z) \approx \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}, \quad z \gg 1. \quad (4.77)$$

В результате для не слишком малых ζ , когда выполняется неравенство $\zeta \gg \sigma^2/r$, из (4.74) следует нормальное распределение:

$$W_{\zeta}(\rho) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(\rho-r)^2}{2\sigma^2}}. \quad (4.78)$$

При этом мы предположили, что отклонения ζ от r не очень велики: $|\zeta - r| \ll r$.

В более общем случае плотность нормального распределения вероятностей совокупности двух величин ξ и η с различными средними $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ и дисперсиями $(\sigma_{\xi}^2, \sigma_{\eta}^2)$, а также отличным от нуля коэффициентом корреляции (K) имеет вид

$$W_{\xi\eta}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\xi}\sigma_{\eta}\sqrt{1-K^2}} e^{-\frac{1}{2(1-K^2)} \left[\frac{(x-\bar{\xi})^2}{\sigma_{\xi}^2} - 2K \frac{(x-\bar{\xi})(y-\bar{\eta})}{\sigma_{\xi}\sigma_{\eta}} + \frac{(y-\bar{\eta})^2}{\sigma_{\eta}^2} \right]}. \quad (4.79)$$

Переход в данном выражении от декартовых координат к полярным и последующее интегрирование по φ или по ρ позволяет получить другие обобщения формул (4.74), (4.76), которые мы здесь приводить не будем. Подробные исследования получаемых при этом функций распределений фазы и модуля можно найти в монографиях по статистической радиотехнике.

ЗАДАЧИ

1. Случайная величина η является линейной функцией случайной величины ξ : $\eta = y(\xi) = a\xi + b$, где a и b – постоянные величины. Найти плотность вероятности $W_{\eta}(y)$ величины η при известной плотности вероятности $W_{\xi}(x)$ случайной величины ξ .

Решение. Вначале определяем обратную функцию $x = f(y) = \frac{y-b}{a}$. Так как $x = f(y)$ однозначна, то для нахождения плотности вероятности $W_{\eta}(y)$ воспользуемся формулой (4.33). В результате получаем

$$W_{\eta}(y) = W_{\xi}[f(y)] \left| \frac{df(y)}{dy} \right| = \frac{1}{|a|} W_{\xi}\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

Если величина ξ , например, имеет равномерную плотность распределения вероятности в интервале $(x_1, x_2]$, то величина η будет распределена равномерно в интервале $(ax_1 + b, ax_2 + b]$.

2. Случайная величина ξ с равномерной плотностью вероятности

$$W_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -a; \\ \frac{1}{(b+a)}, & -a < x \leq b, a < b; \\ 0, & x > b. \end{cases} \quad (1)$$

подвергается квадратичному преобразованию $\eta = \xi^2$.

Определить:

A – функцию распределения $F_{\xi}(x)$ случайной величины ξ ;

B – функцию распределения $F_{\eta}(y)$ и плотность вероятности $W_{\eta}(y)$ случайной величины η .

Решение.

A. С учетом определения $W_{\xi}(x)$ по формуле (2.7) находим $F_{\xi}(x)$

$$F_{\xi}(x) = P\{\xi < x\} = \int_{-\infty}^x W_{\xi}(x') dx' = \begin{cases} 0, & x \leq -a; \\ \frac{1}{b+a} x' \Big|_{-a}^x = \frac{x+a}{b+a}, & -a < x \leq b; \\ 1, & x > b. \end{cases} \quad (2)$$

B. При квадратичном преобразовании $y = x^2$ функция y никогда не принимает отрицательных значений. Поэтому

$$F_{\eta}(y) = P\{\eta < y\} = 0 \text{ при } y \leq 0. \quad (3)$$

Для значений $x \in (-a, a]$ (соответствующий интервал значений $y: y \in (0, a^2]$)

обратная функция $x = f(y)$ – двузначна: $x_1 = f_1(y) = +\sqrt{y}$, $x_2 = f_2(y) = -\sqrt{y}$. В этом случае необходимо пользоваться правилом преобразования плотности распределения вероятности (4.35) для многозначных функций. В результате получаем

$$W_{\eta}(y) = W_{\xi}[x = f_1(y)] \left| \frac{df_1}{dy} \right| + W_{\xi}[x = f_2(y)] \left| \frac{df_2}{dy} \right| = \frac{1}{\sqrt{y(b+a)}}. \quad (4)$$

Отсюда

$$F_{\eta}(y) = \int_0^y W_{\eta}(y') dy' = \frac{2\sqrt{y}}{b+a}. \quad (5)$$

На интервале $x \in (a, b]$ (соответствующий интервал значений $y: y \in (a^2, b^2]$) обратная функция имеет только одну ветвь $x_2 = f_2(y) = \sqrt{y}$, следовательно, она однозначна. Поэтому

$$W_{\eta}(y) = W_{\xi}[x_2(y)] \cdot \frac{dx_2}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y(b+a)}}, \quad (6)$$

$$F_{\eta}(y) = F_{\eta}(a^2) + \int_{a^2}^y W_{\eta}(y') dy' = \frac{1}{2(b+a)} \int_{a^2}^y \frac{dy'}{\sqrt{y'}} + \frac{2a}{b+a} = \frac{\sqrt{y} + a}{b+a}. \quad (7)$$

Таким образом, суммируя (3), (5) и (7), а также (4) и (6), окончательно получаем

$$F_{\eta}(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0; \\ \frac{2\sqrt{y}}{b+a}, & 0 < y \leq a^2; \\ \frac{\sqrt{y} + a}{b+a}, & a^2 < y \leq b^2; \\ 1, & y > b^2. \end{cases} \quad (8)$$

$$W_{\eta}(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0; \\ \frac{1}{\sqrt{y(b+a)}}, & 0 < y \leq a^2; \\ \frac{1}{2\sqrt{y(b+a)}}, & a^2 < y \leq b^2; \\ 0, & y > b^2. \end{cases} \quad (9)$$

3. Совместная плотность вероятности $W(x, y)$ двумерной случайной величины (ξ, η) имеет вид

$$W_{\xi\eta}(x, y) = \begin{cases} 4xye^{-x^2-y^2}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & x \leq 0, y \leq 0. \end{cases} \quad (1)$$

Определить: математические ожидания $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$ и дисперсии флуктуаций σ_{ξ}^2 , σ_{η}^2 случайных величин ξ и η .

Решение. Согласно условию согласованности (4.15) и (4.16) определим вначале одномерные плотности вероятностей величин ξ и η :

$$W_{\xi}(x) = \int_0^{\infty} W_{\xi\eta}(x, y) dy = 4xe^{-x^2} \int_0^{\infty} ye^{-y^2} dy = 2xe^{-x^2}, \quad x > 0;$$

$$W_{\eta}(y) = \int_0^{\infty} W_{\xi\eta}(x, y) dx = 2ye^{-y^2}, \quad y > 0. \quad (2)$$

По найденным $W_{\xi}(x)$ и $W_{\eta}(y)$ находим искомые средние значения и дисперсии:

$$\bar{\xi} = \int_0^{\infty} xW_{\xi}(x) dx = 2 \int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad (3)$$

$$\bar{\eta} = 2 \int_0^{\infty} y^2 e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad (4)$$

$$\sigma_{\xi}^2 = \int_0^{\infty} (x - \bar{\xi})^2 W_{\xi}(x) dx = \int_0^{\infty} x^2 W_{\xi}(x) dx - \bar{\xi}^2 = 2 \int_0^{\infty} x^3 e^{-x^2} dx - \bar{\xi}^2 =$$

$$= 2 \frac{\Gamma\left(\frac{3+1}{2}\right)}{2} - \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{\pi}{4}. \quad (5)$$

$$\sigma_{\eta}^2 = \sigma_{\xi}^2 = 1 - \frac{\pi}{4}. \quad (6)$$

При вычислении формул (3 ÷ 6) мы использовали следующее определение:

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-\alpha x^2} dx = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\alpha \frac{n+1}{2}}, \quad \alpha > 0, \quad n > -1.$$

Здесь $\Gamma(z)$ - гамма-функция Эйлера.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

§ 5. Случайные функции

Случайные величины, с которыми мы встречаемся в радиофизике, как правило, либо изменяются во времени, либо принимают различные значения в разных точках пространства, а зачастую изменяются как во времени, так и в пространстве, т.е. являются случайными функциями времени и пространственных координат. Случайная функция времени (т.е. временная развертка случайной величины) **называется случайным процессом**. Очевидно, что не имеет смысла говорить о каком-то вполне определенном значении случайной функции в данный момент времени: значения, которые принимает случайный процесс в каждый момент времени - это случайные величины. Осциллограмма (временная развертка) тока в простейшей электрической цепи, приведенная во **Введении** (рис.2), является одной из возможных реализаций, которые может принять зависимость тока от времени. Если мы соберем много полностью идентичных цепей, то осциллограммы тока в каждой из них, вообще говоря, будут совершенно различными (рис. 5.1): в каждой цепи (с номером k) зависимость тока от времени $I_k(t)$ будет причудливым образом флуктуировать около среднего значения \bar{I} , которое является макроскопическим средним значением тока (например, тем, которое предсказывается законом Ома).

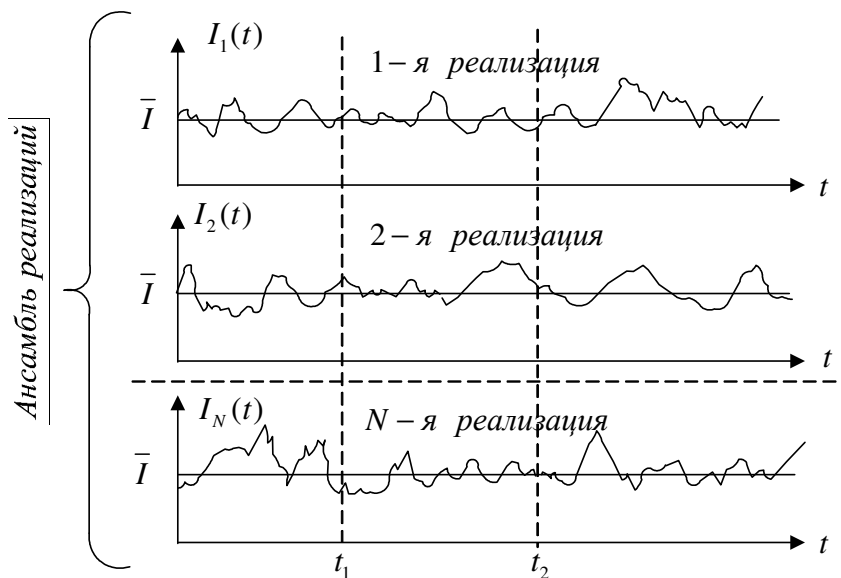


Рис. 5.1.

Каждая такая осциллограмма $I_k(t)$ и есть k -я **реализация случайной функции**, а их совокупность называется **ансамблем реализаций**. Таким образом, любая случайная функция (в том числе и случайный процесс) представляется своим ансамблем реализаций. Из рис. 5.1 видно, что в каждый данный момент времени t значения тока $I_k(t)$ в различных реализациях различны, т.е. можно говорить только о вероятности тех или иных значений тока в момент t и оперировать с $I(t)$ как со случайной величиной ξ .

5.1. Интегральная функция и плотность распределения вероятностей

Предположим, что нам задан ансамбль из N реализаций случайной функции $\xi(t)$. Обозначим через $\xi_k(t)$ k -ю реализацию из этого ансамбля. Выбрав произвольную величину x , для заданного значения времени t подсчитаем количество реализаций n_1 из ансамбля, для которых случайная величина $\xi(t)$ в момент времени t удовлетворяет условию $\xi(t) \leq x$. Построим отношение $\nu_1 = n_1/N$, которое определяет частоту появления рассматриваемого события. Для достаточно больших N ($N \rightarrow \infty$) величина ν_1 будет группироваться вблизи некоторого числа, которое совпадает с вероятностью появления рассматриваемого события P и обозначается так:

$$F_1(x, t) = P\{\xi(t) \leq x\}. \quad (5.1)$$

Функция $F_1(x, t)$ называется **одноточечной (или одномерной) интегральной функцией распределения вероятностей**.

Описание случайной функции $\xi(t)$ с помощью (5.1) является далеко не полным: оно позволяет вычислить все статистические средние $\xi(t)$ в каждый момент времени t , но ничего не говорит о характере изменения со временем различных реализаций $\xi_k(t)$. Значительно более богатая информация содержится в **двухточечной (или двумерной) функции распределения вероятностей** $F_2(x_1, t_1; x_2, t_2)$, которую можно определить аналогично $F_1(x, t)$. Так, для выбранных моментов времени t_1 и t_2 и наперед заданных значений x_1 и x_2 подсчитаем количество реализаций n_2 в ансамбле N , для которых одновременно выполняются два условия $\xi(t_1) \leq x_1$ и $\xi(t_2) \leq x_2$. Для достаточно больших

N ($N \rightarrow \infty$) частота появления событий $\nu_2 = n_2/N$ будет группироваться вблизи определенного значения, которое совпадает с вероятностью P и обозначается как

$$F_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = P\{\xi(t_1) \leq x_1; \xi(t_2) \leq x_2\}. \quad (5.2)$$

Если промежуток времени между моментами t_1 и t_2 достаточно мал, то значения $\xi(t_2)$ не могут сильно отличаться от $\xi(t_1)$, т.е. две случайные величины $\xi(t_1)$ и $\xi(t_2)$ будут зависимыми и в пределе $t_2 \rightarrow t_1$ совпадающими:

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} F_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = F_1(x_m, t_1); \quad x_m = \min(x_1, x_2). \quad (5.3)$$

Здесь через $x_m = \min(x_1, x_2)$ обозначено минимальное значение из двух величин x_1 и x_2 .

Если же $|t_2 - t_1| \rightarrow \infty$, то статистическая связь между $\xi(t_1)$ и $\xi(t_2)$ должна, как правило, ослабевать, и эти величины станут независимыми, т.е.

$$\lim_{|t_2 - t_1| \rightarrow \infty} F_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = F_1(x_1, t_1) F_1(x_2, t_2). \quad (5.4)$$

Аналогично вводится **n -точечная** (или **n - мерная**) **функция распределения вероятностей:**

$$F_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) = P\{\xi(t_1) \leq x_1; \dots; \xi(t_n) \leq x_n\}. \quad (5.5)$$

Полное статистическое описание случайной функции содержится в F_n при $n \rightarrow \infty$, т.е. когда имеется статистическое описание всей совокупности случайных величин $\xi(t_k)$ во все моменты времени t_k .

Наряду с (5.5) удобно ввести **n -точечную плотность распределения вероятностей:**

$$W_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \dots \partial x_n} F_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n). \quad (5.6)$$

Свойства функции W_n легко выяснить путем очевидного обобщения формул, приведенных в первой главе и предыдущем параграфе для совокупности только двух случайных величин:

1. Положительная определенность:

$$W_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) \geq 0. \quad (5.7)$$

2. Симметрия относительно перестановок любых пар аргументов x_i, t_i и x_k, t_k :

$$W_n(x_1, t_1; \dots; x_i, t_i; \dots; x_k, t_k; \dots; x_n, t_n) = W_n(x_1, t_1; \dots; x_k, t_k; \dots; x_i, t_i; \dots; x_n, t_n). \quad (5.8)$$

3. Связь между F_n и W_n :

$$F_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) = \int_{-\infty}^{x_1} dx'_1 \dots \int_{-\infty}^{x_n} dx'_n W_n(x'_1, t_1; \dots; x'_n, t_n). \quad (5.9)$$

4. Условие согласованности:

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_n(x_1, t_1; \dots; x_k, t_k; \dots; x_n, t_n) dx_k = W_{n-1}(x_1, t_1; \dots; x_{k-1}, t_{k-1}; x_{k+1}, t_{k+1}; \dots; x_n, t_n). \quad (5.10)$$

Интегрирование W_n по любому аргументу, например по x_k , приводит к понижению размерности плотности вероятности на единицу ($W_n \rightarrow W_{n-1}$). Поступая подобным образом и далее (интегрируя по другим переменным x_i), мы, в конце концов, приходим к условию нормировки.

5. Условие нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n W_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) = 1. \quad (5.11)$$

5.2. Моменты случайного процесса

С помощью n - точечной плотности распределения вероятности W_n мы можем определить различные статистические характеристики (моменты) случайного процесса $\xi(t)$. В предыдущем параграфе было показано, что начальные и центральные моменты совокупности случайных величин представляют собой набор числовых параметров. Для случайных же процессов, с учетом рассмотренных выше свойств W_n , можно сразу заметить, что моменты в общем случае являются функциями времени. Среди всевозможных моментов мы ограничимся рассмотрением лишь односточечных и двухточечных.

1. **Односточечные начальные** моменты k – го порядка:

$$m_k(t) = \langle \xi^k(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^k W_1(x, t) dx. \quad (5.12)$$

2. **Двухточечные начальные (или смешанные начальные)** моменты $i + k$ -го порядка:

$$m_{ik}(t_1, t_2) = \langle \xi^i(t_1) \xi^k(t_2) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1^i x_2^k W_2(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2. \quad (5.13)$$

Момент $m_{11}(t_1, t_2)$ имеет собственное обозначение $R_{\xi}(t_1, t_2)$ и называется **ковариационной функцией**:

$$m_{11}(t_1, t_2) = R_{\xi}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 W_2(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2. \quad (5.14)$$

3. **Односточечные центральные** моменты k - го порядка:

$$M_k(t) = \langle [\xi(t) - \bar{\xi}(t)]^k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} [x - \bar{\xi}(t)]^k W_1(x, t) dx. \quad (5.15)$$

Одноточечный центральный момент второго порядка ($k = 2$) носит названия **дисперсии** случайного процесса

$$M_2(t) = \sigma_{\xi}^2(t) = \langle [\xi(t) - \bar{\xi}(t)]^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} [x - \bar{\xi}(t)]^2 W_1(x, t) dx. \quad (5.16)$$

4. **Двухточечные центральные моменты $i+k$ порядка.** Нас в дальнейшем будет интересовать в основном двухточечный центральный момент второго порядка, который называется **функцией корреляции** (точнее, **функцией автокорреляции**):

$$\begin{aligned} M_{11}(t_1, t_2) = B_{\xi}(t_1, t_2) &= \langle [\xi(t_1) - \bar{\xi}(t_1)][\xi(t_2) - \bar{\xi}(t_2)] \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - \bar{\xi}(t_1)][x_2 - \bar{\xi}(t_2)] W_2(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (5.17-a)$$

Из сравнения данной формулы с (5.14) получим связь между функциями $B_{\xi}(t_1, t_2)$ и $R_{\xi}(t_1, t_2)$:

$$B_{\xi}(t_1, t_2) = R_{\xi}(t_1, t_2) - m_1(t_1)m_1(t_2). \quad (5.17-б)$$

5. Иногда для корреляционного анализа удобнее иметь дело не с функциями $B_{\xi}(t_1, t_2)$ или $R_{\xi}(t_1, t_2)$, а с так называемой **структурной функцией** $D_{\xi}(t_1, t_2)$, которая определяется так:

$$D_{\xi}(t_1, t_2) = \langle [\xi(t_2) - \xi(t_1)]^2 \rangle = m_2(t_2) + m_2(t_1) - 2R_{\xi}(t_1, t_2). \quad (5.18)$$

Видно, что $D_{\xi}(t_1, t_2)$ - есть симметричная неотрицательная функция:
 $D_{\xi}(t_1, t_2) = D_{\xi}(t_2, t_1) \geq 0$, причем она равна нулю в совпадающие моменты времени:
 $D_{\xi}(t_1, t_1) = 0$.

5.3. Стационарные случайные процессы

Случайный процесс $\xi(t)$ называется стационарным, если все его статистические характеристики не зависят от начала отсчета времени, т.е. если функция W_n не изменяется при сдвиге всех аргументов t_1, \dots, t_n на произвольную величину Δt (является однородной функцией времени):

$$W_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) = W_n(x_1, t_1 + \Delta t; \dots; x_n, t_n + \Delta t). \quad (5.19)$$

Однородность W_n относительно сдвигки всех её аргументов на произвольную величину Δt приводит к следующим важным последствиям.

1. Одноточечная плотность распределения вероятности $W_1(x, t)$ для стационарного случайного процесса вообще не зависит от времени. Действительно, полагая в (5.19) $n = 1$ и $\Delta t = -t$, получим:

$$W_1(x, t) = W_1(x, t - t) = W_1(x, 0) \equiv W_1(x). \quad (5.20)$$

Из (5.20) следует, что все одноточечные моменты $m_k(t)$ и $M_k(t)$ стационарного процесса не зависят от времени:

$$m_k(t) = \langle \xi^k(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^k W_1(x) dx = Const, \quad (5.21)$$

$$M_k(t) = \langle [\xi(t) - \bar{\xi}(t)]^k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} [x - \bar{\xi}]^k W_1(x) dx = Const.$$

В частности, среднее значение $m_1(t) = \langle \xi(t) \rangle$ и дисперсия $M_2(t) = \sigma_{\xi}^2 = \langle [\xi(t) - \bar{\xi}(t)]^2 \rangle$ стационарного процесса не изменяются во времени. Здесь, как и раньше, косые скобки $\langle \rangle$ или черта сверху $\bar{\dots}$ означают полное статистическое усреднение, т.е. усреднение по ансамблю реализаций случайной функции.

2. Двухточечная функция W_2 - есть функция только разности $|t_2 - t_1|$. Действительно, полагая в (5.19) $n = 2$ и $\Delta t = -t_1$ (или $\Delta t = -t_2$), приходим к выводу, что

$$W_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = W_2(x_1, 0; x_2, t_2 - t_1) = W_2(x_1, t_1 - t_2; x_2, 0) \equiv W_2(x_1, x_2; |t_2 - t_1|). \quad (5.22)$$

Отметим, что зависимость от модуля разности $|t_2 - t_1|$ является следствием свойства симметрии (5.8). Из (5.22) следует, что для стационарных случайных процессов все двухточечные моменты являются функциями разности $|t_2 - t_1|$. В частности, **ковариационная функция** равна

$$m_{11}(t_1, t_2) = \langle \xi(t_1)\xi(t_2) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 W_2(x_1, x_2, |t_2 - t_1|) dx_1 dx_2 = R_\xi(|t_2 - t_1|). \quad (5.23)$$

Аналогично (5.23) для центрального смешанного момента второго порядка (**автокорреляционной функции**) имеем

$$M_{11}(t_1, t_2) = B_\xi(t_1, t_2) = R_\xi(t_1, t_2) - m_1(t_1)m_1(t_2) = R_\xi(|t_2 - t_1|) - \langle \xi \rangle^2. \quad (5.24)$$

Свойства корреляционных функций стационарного процесса.

1. Как следует из (5.24), автокорреляционная функция $B_\xi(t_1, t_2)$ является функцией только разности $\tau = t_2 - t_1$. Действительно, ведя в (5.24) обозначения $t_1 = t$, $t_2 = t + \tau$, получим

$$B_\xi(t_1, t_2) = \langle \xi(t)\xi(t + \tau) \rangle - \langle \xi \rangle^2 = R_\xi(\tau) - \langle \xi \rangle^2 = B_\xi(\tau). \quad (5.25)$$

2. Функция $B_\xi(\tau)$ является четной в силу (5.22):

$$B_\xi(\tau) = B_\xi(-\tau). \quad (5.26)$$

3. При $\tau \rightarrow \infty$ статистическая связь между значениями случайного процесса, как правило, исчезает, случайные величины $\xi(t)$ и $\xi(t + \tau)$ становятся независимыми и, следовательно:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} B_{\xi}(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} [\langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle - \langle \xi \rangle^2] = \langle \xi(t) \rangle \langle \xi(t+\tau) \rangle - \langle \xi^2 \rangle = 0. \quad (5.27)$$

4. При $\tau = 0$ значение $B_{\xi}(\tau)$ совпадает с дисперсией:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} B_{\xi}(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow 0} [\langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle - \langle \xi \rangle^2] = \langle \xi^2 \rangle - \langle \xi \rangle^2 = \sigma_{\xi}^2. \quad (5.28)$$

5. Функция $B_{\xi}(\tau)$ должна быть непрерывной функцией τ , модуль которой $|B_{\xi}(\tau)|$ достигает абсолютного максимума при $\tau \rightarrow 0$ (доказательство этих важных фактов можно найти, например, в монографиях по статистической радиотехнике). Схематический вид зависимости $B_{\xi}(\tau)$ представлен на рис. 5.2.

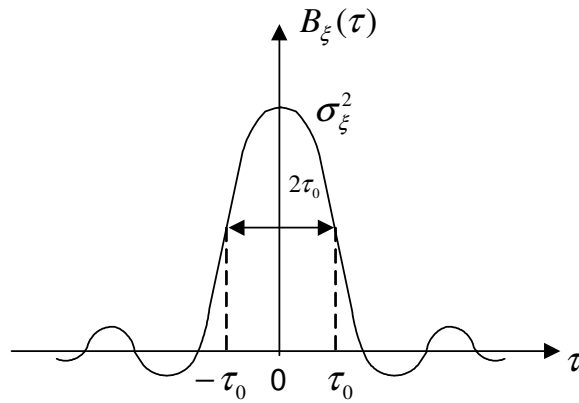


Рис. 5.2.

6. Согласно определению (5.18) для стационарного процесса легко определить связь между структурной и автокорреляционной функциями:

$$\begin{aligned} D_{\xi}(t, \tau) &= \langle [\xi(t+\tau) - \xi(t)]^2 \rangle = \langle [\xi(t+\tau) - \bar{\xi} - \xi(t) + \bar{\xi}]^2 \rangle = \\ &= \langle [\xi(t+\tau) - \bar{\xi}]^2 \rangle + \langle [\xi(t) - \bar{\xi}]^2 \rangle - 2 \langle [\xi(t+\tau) - \bar{\xi}][\xi(t) - \bar{\xi}] \rangle = \\ &= 2[\sigma_{\xi}^2 - B_{\xi}(\tau)] = D_{\xi}(\tau). \end{aligned} \quad (5.29)$$

С учетом уже отмеченных выше свойств $B_\xi(\tau)$ можно получить и свойства структурной функции стационарного процесса. В частности,

$$D_\xi(0) = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} D_\xi(\tau) = 2\sigma_\xi^2 \quad (5.30)$$

Схематичный вид $D_\xi(\tau)$ приведен на рис 5.3.

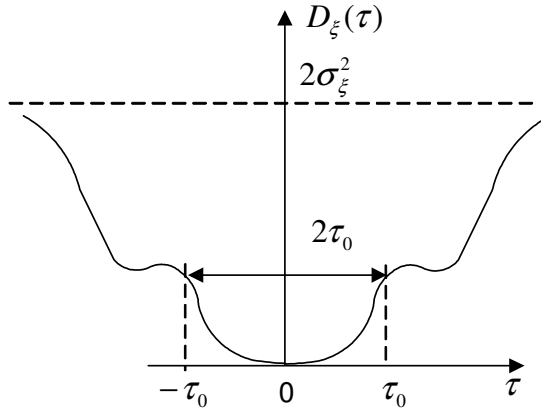


Рис. 5.3.

7. Промежуток времени τ_0 , в течение которого корреляция между значениями случайного процесса существенно ослабевает (например, функция автокорреляции $B_\xi(\tau)$ убывает в два раза, как показано на рис. 5.2, или в e раз - это вопрос соглашения), называется **временем корреляции** или **интервалом корреляции**:

$$B_\xi(\tau_0) = \frac{1}{2} B_\xi(0) = \frac{\sigma_\xi^2}{2} \quad (5.31-а)$$

либо

$$B_\xi(\tau_0) = \frac{1}{e} B_\xi(0) = \frac{\sigma_\xi^2}{e}. \quad (5.31-б)$$

Наряду с $B_\xi(\tau)$ иногда удобно рассматривать нормированную на σ_ξ^2 функцию автокорреляции (или **коэффициент корреляции**):

$$K_{\xi}(\tau) = \frac{B_{\xi}(\tau)}{\sigma_{\xi}^2}, \quad |K_{\xi}(\tau)| \leq 1, \quad K_{\xi}(0) = 1. \quad (5.32)$$

С помощью $K_{\xi}(\tau)$ время корреляции τ_0 можно формально ввести еще и следующим образом:

$$\tau_0 = \int_0^{\infty} K_{\xi}(\tau) d\tau = \frac{1}{\sigma_{\xi}^2} \int_0^{\infty} B_{\xi}(\tau) d\tau \quad (5.33-а)$$

либо

$$\left. \frac{d^2}{d\tau^2} K_{\xi}(\tau) \right|_{\tau=0} = - \frac{1}{\tau_0^2}. \quad (5.33-б)$$

Вообще говоря, введенные различными способами времена корреляции могут отличаться между собой на много порядков. Поэтому, пользуясь понятием “время корреляции”, каждый раз нужно указывать, о каком из определений: (5.31-а, б) или (5.33-а, б) идет речь.

Определения

Случайные процессы, корреляционные функции которых являются функциями только разности $|t_2 - t_1|$, а дисперсии σ_{ξ}^2 и средние значения $\langle \xi \rangle$ - не зависят от времени, называются **стационарными в широком смысле**, в отличие от просто стационарных (или **стационарных в узком смысле**), для которых выполняется условие (5.19). Выше мы видели, что из стационарности в узком смысле следует стационарность в широком смысле. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно: (5.17) может быть функцией только разности $|t_2 - t_1|$, в то время как условие однородности (5.19) не выполняется.

5.4. Процессы со стационарными приращениями.

Существует достаточно большой класс нестационарных процессов, которые в качестве частного случая включают в себя и стационарные процессы. Эти процессы, называемые случайными процессами со стационарными приращениями, впервые были рассмотрены А.Н. Колмогоровым в 1940 г.

Рассмотрим нестационарный случайный процесс $\xi(t)$ и построим приращение на интервале времени $(t, t+T)$ произвольной, но фиксированной длительности T :

$$\eta_T(t) = \xi(t+T) - \xi(t). \quad (5.34)$$

Очевидно, что медленные изменения $\xi(t)$ мало сказываются на значениях $\eta_T(t)$ (изменения тем меньше, чем больше характерные времена изменения $\xi(t)$). В результате в $\eta_T(t)$ будут подавляться компоненты с большими периодами и может статься, что процесс $\eta_T(t)$ будет стационарным (по t , но не по T !). В этом случае $\xi(t)$ называется **случайным процессом со стационарным первым приращением**. Предположение о стационарности $\eta_T(t)$ предусматривает выполнение условия

$$\langle \eta_T(t) \rangle = \langle \xi(t+T) \rangle - \langle \xi(t) \rangle = \text{Const}. \quad (5.35)$$

Отсюда следует, что среднее значение $\xi(t)$ может быть лишь линейной функцией t :

$$\langle \xi(t) \rangle = at + b, \quad (5.36)$$

где a и b - некоторые регулярные константы. Нетрудно сообразить, что для случайного процесса со стационарным вторым приращением должна быть стационарной разность $\eta_T(t+T_1) - \eta_T(t)$, а среднее значение $\xi(t)$ будет полиномом не выше второй степени:

$$\langle \xi(t) \rangle = at^2 + bt + c. \quad (5.37)$$

В дальнейшем мы ограничимся лишь процессами со стационарными первыми приращениями. Средним значением вида (5.36) обладает, например, процесс

$$\xi(t) = \alpha t + \zeta(t), \quad (5.38)$$

где α - случайный “коэффициент” со средним значением, не равным нулю ($\bar{\alpha} = a \neq 0$), а $\zeta(t)$ - стационарный случайный процесс ($\langle \zeta(t) \rangle = b$, $\langle \zeta(t+\tau)\zeta(t) \rangle = R_\zeta(\tau)$). Видно, что процесс $\xi(t)$ - нестационарный, хотя бы потому, что его первый момент линейно изменяется со временем по закону (5.36). Однако первое приращение $\eta_T(t)$

$$\eta_T(t) = \xi(t+T) - \xi(t) = \alpha T + \zeta(t+T) - \zeta(t) - \quad (5.39)$$

- есть процесс стационарный (по t , но не T). Действительно, из (5.39) видно, что среднее значение $\langle \eta_T(t) \rangle = \bar{\alpha}T = aT = Const$. Кроме того, не составляет труда показать, что ковариационная функция $R_{\eta_T}(t_1, t_2)$ зависит только от разности времен $\tau = t_2 - t_1$. Для доказательства последнего сделаем замену $t_1 = t + \tau$ и $t_2 = t$, после чего получим

$$\begin{aligned} R_{\eta_T}(t_1, t_2) &= \langle \eta_T(t_1)\eta_T(t_2) \rangle = \langle \eta_T(t+\tau)\eta_T(t) \rangle = \\ &= \langle [\alpha T + \zeta(t+T+\tau) - \zeta(t+\tau)][\alpha T + \zeta(t+T) - \zeta(t)] \rangle = \\ &= \langle \alpha^2 \rangle T^2 + 2R_\zeta(\tau) - R_\zeta(T+\tau) - R_\zeta(T-\tau) = R_{\eta_T}(\tau). \end{aligned} \quad (5.40)$$

При выводе формулы (5.40) мы предполагали, что случайные величины α и ζ статистически независимы ($\langle \alpha\zeta \rangle = \langle \alpha \rangle \langle \zeta \rangle$).

Для случайного процесса со стационарным первым приращением вида (5.38), вычислим теперь структурную функцию

$$\begin{aligned} D_\xi(t_1, t_2) &= \langle [\xi(t_2) - \xi(t_1)]^2 \rangle = \langle [\alpha(t_2 - t_1) + \zeta(t_2) - \zeta(t_1)]^2 \rangle = \\ &= \langle \alpha^2 \rangle (t_2 - t_1)^2 + \langle [\zeta(t_2) - \zeta(t_1)]^2 \rangle = \langle \alpha^2 \rangle \tau^2 + D_\zeta(\tau) = D_\xi(\tau). \end{aligned} \quad (5.41)$$

Здесь $D_\zeta(\tau)$ - структурная функция стационарного процесса $\zeta(t)$ (см.(5.29)). Видно, что структурная функция $D_\xi(t_1, t_2)$ нестационарного процесса $\xi(t)$ также зависит только от разности времен $\tau = t_2 - t_1$ и при $|\tau| \rightarrow \infty$ неограниченно возрастает.

Введем в рассмотрение еще одну корреляционную функцию, которая называется **взаимной корреляционной функцией** двух случайных процессов $\xi(t)$ и $\zeta(t)$ и определяется формулой

$$B_{\xi\zeta}(t_1, t_2) = \langle [\xi(t_1) - \bar{\xi}(t_1)][\zeta(t_2) - \bar{\zeta}(t_2)] \rangle. \quad (5.42)$$

Если эта функция является функцией только разности $\tau = t_2 - t_1$, то такие процессы называются стационарно связанными.

5.5. Эргодические процессы

Во всех приведенных выше формулах предполагалось, что статистическое усреднение проводится по ансамблю реализаций случайной функции, т.е. путем интегрирования усредняемых выражений с плотностью распределения вероятностей $W_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n)$. Однако, как правило, мы не располагаем достаточно полным набором реализаций, представленных на рис. 5.1. Действительно, у экспериментаторов обычно имеется одна лаборатория и несколько идентичных приборов, а зачастую - только один, так что приходится делать статистические оценки и выводы о вероятностных свойствах случайного процесса только по одной, но достаточно длинной реализации $\xi(t)$. При этом в качестве характерных параметров процесса используют средние по времени величины. Наиболее часто определяют такие моменты:

1. Временное среднее реализации

$$\bar{m}_1 = \bar{\xi}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t) dt. \quad (5.43)$$

Эту величину можно трактовать как постоянную составляющую реализации.

2. Средний во времени квадрат

$$\bar{m}_2 = \bar{\xi^2}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi^2(t) dt. \quad (5.44)$$

Если $\xi(t)$ описывает флуктуации тока или напряжения в цепи, то момент $\overline{\xi^2}(t)$ пропорционален средней мощности.

3. Временная дисперсия

$$\overline{M}_2 = \overline{\sigma}_\xi^2 = \overline{[\xi(t) - \overline{m}_1]^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [\xi(t) - \overline{m}_1]^2 dt. \quad (5.44)$$

Её можно трактовать как среднюю мощность флуктуаций.

4. Наконец, укажем на временную корреляционную функцию

$$\overline{m}_{11} = \overline{R}_\xi(\tau) = \overline{\xi(t)\xi(t+\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t)\xi(t+\tau) dt \quad (5.45)$$

и временную автокорреляционную функцию

$$\overline{M}_{11} = \overline{B}_\xi(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [\xi(t) - \overline{m}_1][\xi(t+\tau) - \overline{m}_1] dt = \overline{R}_\xi(\tau) - \overline{m}_1^2, \quad (5.46)$$

Здесь и в дальнейшем усредненные по времени характеристики мы будем обозначать волнистой чертой сверху.

Следует заметить, что не для любого случайного процесса приведенные временные средние существуют. Но даже если они существуют, то они могут быть различными для различных реализаций. Возникает вопрос – для каких процессов введенные характеристики имеют смысл и какая связь существует между средними по времени и по ансамблю реализаций? В частности, для каких случайных процессов усреднение по ансамблю реализаций можно заменить усреднением по времени?

Оказывается, что существует целый класс случайных процессов, у которых временные характеристики с вероятностью сколь угодно близкой к единице совпадают с соответствующими характеристиками, полученными путем усреднения по ансамблю реализаций $(\overline{m}_1 = m_1, \overline{m}_2 = m_2, \overline{M}_2 = M_2, \overline{m}_{11} = m_{11}, \overline{M}_{11} = M_{11} \text{ и т.д.})$. Такие

процессы называются **эргодическими**. Свойство эргодичности оказывается очень

полезным, так как по отдельной реализации путем её усреднения по времени можно находить статистические характеристики процесса, не прибегая к усреднению по ансамблю.

Необходимым условием эргодичности случайного процесса является его стационарность. Это условие вполне объяснимо. Для стационарных процессов все одноточечные моменты являются постоянными величинами, а двухточечные – функциями разности времен τ . Точно такая же зависимость будет и при временном усреднении согласно формулам (5.43 ÷ 5.46). С другой стороны, представим себе следующий мысленный эксперимент. Достаточно длинную реализацию стационарного процесса $\xi(t)$ разобьем на отдельные “куски” $\xi_i(t)$ ($i=1,2,\dots$) примерно равной длительности $T_i \approx T$. Если интервал разбиения T намного превосходит характерный радиус корреляции τ_0 автокорреляционной функции $B_\xi(\tau)$ ($T \gg \tau_0$), то каждый из отрезков будет нести в себе практически полную информацию о всем процессе в целом. При этом временные характеристики (5.43 ÷ 5.46), вычисленные для каждого отрезка $\xi_i(t)$ по конечному интервалу $(0, T)$, будут мало отличаться от своих предельных значений для всего процесса. Расположим теперь все отрезки $\xi_i(t)$ так, как показано на рис. 5.1, и мы получим соответствующий “ансамбль реализаций” с теми же вероятностными характеристиками.

Следует, однако, заметить, что стационарность процесса является необходимым, но не **достаточным условием эргодичности**. Оказывается, что не все временные характеристики стационарного процесса могут обладать свойством эргодичности. Для одних характеристик свойство эргодичности может выполняться, а для других нет. В связи с этим вводят понятие эргодичности относительно конкретных характеристик процесса. Например, стационарный процесс $\xi(t)$ будет эргодичен относительно математического ожидания, т.е.

$$\bar{m}_1 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t) dt = m_1, \quad (5.47)$$

если и только если выполняется условие

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) B_{\xi}(t) dt = 0. \quad (5.48)$$

С другой стороны, гауссовский стационарный процесс эргодичен относительно дисперсии флуктуаций, т.е.

$$\sigma_{\xi}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [\xi(t) - m_1]^2 dt = \sigma_{\xi}^2, \quad (5.49)$$

если и только если выполняется условие.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) B_{\xi}^2(t) dt = 0. \quad (5.50)$$

Детальное исследование вопроса о достаточных условиях эргодичности других характеристик стационарного процесса можно, например, найти в монографиях по статистической радиотехнике.

ЗАДАЧИ

1. Определить, обладает ли функция

$$B_{\xi}(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} \left(ch(\omega_0 \tau) + \frac{\alpha}{\omega_0} sh(\omega_0 |\tau|) \right), \quad \alpha > 0, \omega_0 > 0 \quad (1)$$

свойствами автокорреляционной функции.

Решение. Для ответа на поставленный вопрос необходимо проверить выполнение следующих условий.

1. Автокорреляционная функция при $\tau = 0$ совпадает с дисперсией σ^2 , следовательно, должна быть величиной положительной: $B_{\xi}(0) > 0$.
2. Автокорреляционная функция должна быть функцией четной: $B_{\xi}(\tau) = B_{\xi}(-\tau)$.

3. Модуль автокорреляционной функции $|B_{\xi}(\tau)|$ должен достигать абсолютного максимума при $\tau \rightarrow 0$: $|B_{\xi}(\tau)| \leq B_{\xi}(0)$. С другой стороны, при $\tau \rightarrow \infty$ $B_{\xi}(\tau)$ должна обращаться в 0: $B_{\xi}(\infty) = 0$.

Из анализа заданного выражения (1) для $B_{\xi}(\tau)$ видно, что условия 1) и 2) выполняются. Для проверки условия 3) представим функцию $B_{\xi}(\tau)$ для положительных значений τ в виде

$$B_{\xi}(\tau) = \frac{\sigma^2}{2} \left[e^{-(\alpha-\omega_0)\tau} \left(\frac{\alpha}{\omega_0} + 1 \right) - e^{-(\alpha+\omega_0)\tau} \left(\frac{\alpha}{\omega_0} - 1 \right) \right], \tau \geq 0. \quad (2)$$

Поскольку $B_{\xi}(0) = \sigma^2$, то для выполнения условия 3) необходимо, чтобы выражение в квадратных скобках по модулю не превышало 2:

$$\left| e^{-(\alpha-\omega_0)\tau} \left(\frac{\alpha}{\omega_0} + 1 \right) - e^{-(\alpha+\omega_0)\tau} \left(\frac{\alpha}{\omega_0} - 1 \right) \right| \leq 2. \quad (3)$$

Не составляет труда показать, что данное неравенство выполняется только при $\alpha > \omega_0$. Действительно, при $\alpha < \omega_0$ и $\tau \rightarrow \infty$ функция $\exp[-(\alpha - \omega_0)\tau]$ неограниченно возрастает. С другой стороны, случай $\alpha = \omega_0$ должен быть исключен из рассмотрения потому, что согласно (3) не выполняется условие $B_{\xi}(\infty) = 0$. К такому же выводу приводит и анализ выражения $B_{\xi}(\tau)$ при $\tau < 0$.

Суммируя все вышеизложенное, приходим к выводу, что функция $B_{\xi}(\tau)$ удовлетворяет всем свойствам автокорреляционной функций только при $\alpha > \omega_0$.

2. Случайный процесс $\xi(t) = f(t, \varphi) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$ представляет собой синусоиду со случайной фазой φ , которая равномерно распределена в интервале $[-\pi, \pi]$. Проверить данный процесс на эргодичность.

Решение. Для проверки на эргодичность заданного процесса $\xi(t)$ нам необходимо вычислить среднее значение $\bar{\xi}$, дисперсию σ_{ξ}^2 и автокорреляционную

функцию $B_{\xi}(t_1, t_2)$ двумя способами (путем усреднений по ансамблю реализаций и по времени), а затем полученные результаты сравнить между собой.

А. Усреднение по ансамблю.

$$\bar{\xi}(t, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t, \varphi) W(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t, \varphi) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A \cos(\omega t + \varphi) d\varphi = 0. \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi}^2 &= \overline{\xi^2} - \bar{\xi}^2 = \overline{\xi^2} = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t, \varphi) W(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t, \varphi) d\varphi = \\ &= \frac{A^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(\omega_0 t + \varphi) d\varphi = \frac{A^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} [1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi)] d\varphi = \frac{A^2}{2}. \end{aligned} \quad (2)$$

С учетом того, что $\bar{\xi} = 0$, вычислим автокорреляционную функцию $B_{\xi}(t_1, t_2) = \langle f(t_1, \varphi) f(t_2, \varphi) \rangle$. Положив $t_2 = t + \tau$ и $t_1 = t$, получим

$$\begin{aligned} B_{\xi}(t, \tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t, \varphi) \xi(t + \tau, \varphi) W(\varphi) d\varphi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A \sin(\omega_0 t + \varphi) \cdot A \sin(\omega_0 t + \varphi + \omega_0 \tau) \cdot d\varphi = \\ &= \frac{A^2}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \cos \omega_0 \tau - \cos [2(\omega_0 t + \varphi) + \omega_0 \tau] \right\} d\varphi = \frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau = B_{\xi}(\tau). \end{aligned} \quad (3)$$

Из формул (1 ÷ 3) видно, что процесс $\xi(t)$ стационарный.

В. Усреднение по времени.

$$\bar{\xi} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t, \varphi) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A}{T} \int_0^T \sin(\omega_0 t + \varphi) dt = 0. \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi}^2 &= \overline{\xi^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t, \varphi) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{T} \int_0^T \sin^2(\omega_0 t + \varphi) dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{T} \cdot \frac{1}{2} \int_0^T [1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi)] dt = \frac{A^2}{2} - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{4T} \sin 2(\omega_0 t + \varphi) \Big|_0^T = \frac{A^2}{2}. \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
\overline{B}_\xi(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t, \varphi) f(t + \tau, \varphi) dt = \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2T} \int_0^T \{ \cos \omega_0 \tau - \cos [2(\omega_0 t + \varphi) + \omega_0 \tau] \} dt = \frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau.
\end{aligned}
\tag{6}$$

Из сравнения формул (1÷3) и (4÷6) видно, что найденные значения $\overline{\xi}$, σ_ξ^2 и $B_\xi(\tau)$ не зависят от способа усреднения. Следовательно, анализируемый процесс можно считать эргодическим.

§ 6. Спектральный анализ случайных процессов

При изучении детерминированных процессов часто применяется гармонический анализ. Периодические процессы представляются в виде рядов Фурье, а аperiodические – интегралов Фурье. При этом решение многих физических задач, сводящихся к линейным уравнениям, значительно упрощается. Связано это с тем, что линейные преобразования (например, интегрирование и дифференцирование) не изменяют вида функции $e^{i\omega t}$, приводя только к умножению или делению ее на не зависящие от t множители. Хотелось бы иметь столь же простой и эффективный математический аппарат и при анализе случайных процессов.

6.1. Энергетический спектр стационарного процесса. Формула Винера-Хинчина

Формально запишем преобразование Фурье для случайного стационарного процесса $\xi(t)$:

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{\xi}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (6.1)$$

Обратное преобразование имеет вид

$$C_{\xi}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (6.2)$$

Величина $C_{\xi}(\omega)$ называется трансформантой Фурье. Для упрощения дальнейшего анализа будем считать, что случайная функция $\xi(t)$ описывает флуктуации какой-то величины около ее среднего значения, так что $\langle \xi(t) \rangle = 0$. Учет средней величины ($\langle \xi(t) \rangle \neq 0$) сводится к простой замене $\xi(t) \rightarrow \delta\xi$. Преобразования (6.1) и (6.2) мы назвали формальными потому, что стационарное случайное поле $\xi(t)$ в общем случае не удовлетворяет требованию убывания на бесконечности и, следовательно, трансформанты Фурье $C_{\xi}(\omega)$ как таковой не существует. Напомним, что преобразование Фурье возможно только для абсолютно интегрируемых функций, когда

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\xi(t)| dt \leq M,$$

где M - некоторая постоянная величина. Для того чтобы придать спектральным разложениям случайных полей корректный математический смысл, предполагают, что процесс $\xi(t)$ стационарен внутри, какого-то большого, но конечного интервала $-T \leq t \leq T$ и быстро убывает до нуля за его пределами:

$$\xi_T(t) = \begin{cases} \xi(t), & -T \leq t \leq T; \\ 0, & |t| > T. \end{cases}$$

Для построенной таким образом случайной функции $\xi_T(t)$ Фурье-спектр существует и имеет вид

$$C_T(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \xi_T(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Далее на выбранном интервале $-T \leq t \leq T$ строятся среднеквадратичные корреляторы $\langle \xi_T(t_1) \xi_T(t_2) \rangle$, $\langle C_T(\omega_1) C_T^*(\omega_2) \rangle$ и устанавливается между ними связь через преобразование Фурье. Затем переходят к пределу $T \rightarrow \infty$, в результате чего получают математически корректный результат. Мы, однако, не будем пользоваться такого рода приемом, а будем считать, что интегралы (6.1) и (6.2) существуют в смысле вероятностной сходимости, а именно – в среднем квадратичном.

Применив операцию комплексного сопряжения к (6.1), получаем

$$\xi^*(t) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{\xi}^*(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} C_{\xi}^*(-\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (6.3)$$

Правая часть (6.3) получена в результате замены переменной интегрирования $\omega \rightarrow -\omega$. Для вещественной функции $\xi(t) = \xi^*(t)$ и подынтегральное выражение в (6.3) должно

совпасть с аналогичным в (6.1). Отсюда вытекает важное свойство "эрмитовости" функции $C_{\xi}(\omega)$:

$$C_{\xi}^*(-\omega) = C_{\xi}(\omega), \quad C_{\xi}(-\omega) = C_{\xi}^*(\omega). \quad (6.4)$$

С учетом того, что $\xi(t)$ является случайной функцией с нулевым средним значением ($\langle \xi \rangle = 0$), из (6.2) следует, что $C_{\xi}(\omega)$ также является случайной функцией, причем $\langle C_{\xi}(\omega) \rangle = 0$.

Выразим теперь автокорреляционную функцию стационарного процесса $\xi(t)$ через коррелятор Фурье-компонент $C_{\xi}(\omega)$:

$$B_{\xi}(\tau) = \langle \xi(t+\tau)\xi(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle C_{\xi}(\omega)C_{\xi}(\omega') \rangle e^{i(\omega+\omega')t+i\omega\tau} d\omega d\omega'. \quad (6.5-a)$$

Произведя под знаком интеграла замену переменной $\omega' \rightarrow -\omega'$ с учетом свойства эрмитовости (6.4), формулу (6.5-a) можно переписать еще и в следующем виде:

$$B_{\xi}(\tau) = \langle \xi(t+\tau)\xi(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle C_{\xi}(\omega)C_{\xi}^*(\omega') \rangle e^{i(\omega-\omega')t+i\omega\tau} d\omega d\omega'. \quad (6.5-b)$$

Для того чтобы интегралы в (6.5-a,б) не зависели от t (а только от τ - по условию стационарности), необходимо, чтобы подынтегральные функции обращались в нуль на всей плоскости (ω, ω') , кроме линий: $\omega' + \omega = 0$ для выражения (6.5-a) и $\omega' - \omega = 0$ для выражения (6.5-б), где зависящие от t экспоненты $\exp\{i(\omega \pm \omega')t\}$ тождественно равны единице. Для этого необходимо, чтобы обращались в нуль корреляторы компонент Фурье:

$$\langle C_{\xi}(\omega)C_{\xi}(\omega') \rangle = 0, \quad \text{при } \omega + \omega' \neq 0. \quad (6.6-a)$$

$$\langle C_{\xi}(\omega)C_{\xi}^*(\omega') \rangle = 0, \quad \text{при } \omega - \omega' \neq 0. \quad (6.6-b)$$

При этом интегралы (6.5) должны сходиться, вообще говоря, к отличной от нуля функции $B_{\xi}(\tau)$. Это возможно только в том случае, если корреляторы $\langle C_{\xi}(\omega)C_{\xi}(\omega') \rangle$ и $\langle C_{\xi}(\omega)C_{\xi}^*(\omega') \rangle$ имеют особенности типа δ -функции:

$$\langle C_{\xi}(\omega)C_{\xi}(\omega') \rangle = \delta(\omega + \omega')S_{\xi}(\omega), \quad (6.7)$$

$$\langle C_{\xi}(\omega)C_{\xi}^*(\omega') \rangle = \delta(\omega - \omega')S_{\xi}(\omega). \quad (6.8)$$

Введенную формулами (6.7) и (6.8) функцию $S_{\xi}(\omega)$ называют **энергетическим спектром мощности** стационарного случайного процесса $\xi(t)$. Подставляя (6.7), (6.8) в (6.5-а,б) и интегрируя по $d\omega'$ с помощью δ -функции, получаем **формулу Винера-Хинчина**:

$$B_{\xi}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}(\omega)e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (6.9)$$

Обратное Фурье-преобразование дает:

$$S_{\xi}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_{\xi}(\tau)e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (6.10)$$

Из формул (6.9) и (6.10) можно получить следующие, полезные нам в дальнейшем, соотношения. В частности, при $\tau = 0$ из (6.9) следует:

$$B_{\xi}(0) = \sigma_{\xi}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}(\omega) d\omega. \quad (6.11-а)$$

С другой стороны, положив в (6.10) $\omega = 0$, получим

$$S_{\xi}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_{\xi}(\tau) d\tau. \quad (6.11-б)$$

Поясним кратко происхождение названия "энергетический спектр" на примере из радиотехники. Если $\xi(t)$ представляет собой флуктуации тока в цепи либо напряжения на каком-то сопротивлении, то дисперсия $\sigma_{\xi}^2 = \langle \xi^2 \rangle$ с точностью до постоянного множителя имеет смысл средней мощности процесса – энергии, выделяемой в единицу времени. Из формулы (6.11-а) следует, что эта энергия представляется в виде суммы "энергий" отдельных спектральных компонент - $S_{\xi}(\omega)d\omega$, которые можно отождествить с энергией процесса в интервале частот от ω до $\omega+d\omega$. Иначе говоря, функция $S_{\xi}(\omega)$ описывает плотность распределения энергии процесса по частотам ω , т.е. по спектру (поэтому иногда энергетический спектр называют еще спектральной плотностью).

Свойства $S_{\xi}(\omega)$

1. Из определения (6.8) видно, что $S_{\xi}(\omega)$ - **функция положительная**. Действительно, переходя в (6.8) к пределу $\omega' \rightarrow \omega$, получаем, что $S_{\xi}(\omega)$ с точностью до нормировочного множителя, совпадает с $\langle |C_{\xi}(\omega)|^2 \rangle$ - средним квадратом амплитуды одной спектральной компоненты, т.е. с ее средней мощностью - величиной, во всяком случае, неотрицательной.

2. Из (6.10) с учетом четности и вещественности $B_{\xi}(\tau)$ следует, что $S_{\xi}(\omega)$ - **вещественная и четная функция**:

$$S_{\xi}^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_{\xi}(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_{\xi}(-\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = S_{\xi}(\omega), \quad (6.12)$$

$$S_{\xi}(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_{\xi}(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau = S_{\xi}^*(\omega) = S_{\xi}(\omega). \quad (6.13)$$

Легко убедиться в том, что четность и вещественность функций $B_{\xi}(\tau)$ и $S_{\xi}(\omega)$ позволяет в формулах (6.9) и (6.10) изменять произвольным образом знаки перед мнимой единицей i в показателях экспонент.

3. Характерная ширина $\Delta\omega$ энергетического спектра $S_{\xi}(\omega)$ связана с характерным временем $\Delta\tau$ изменения автокорреляционной функции $B_{\xi}(\tau)$ некоторым соотношением, которое часто называют “соотношением неопределенностей”:

$$\Delta\omega \Delta\tau = Const . \quad (6.14)$$

Из данной формулы в частности следует, что, чем “шире” спектр $S_{\xi}(\omega)$, тем “уже” автокорреляционная функция $B_{\xi}(\tau)$, и наоборот. Данное утверждение легко поясняется с помощью рис.6.1 и следующих простых рассуждений.

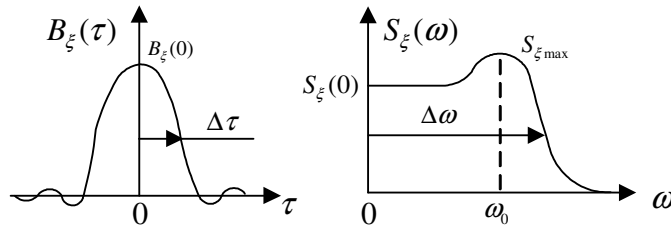


Рис. 6.1.

Аналогично формуле (5.33-а) определим характерную ширину $B_{\xi}(\tau)$ как

$$\Delta\tau = \frac{\int_0^{\infty} B_{\xi}(\tau) d\tau}{B_{\xi}(0)} = \frac{\pi S_{\xi}(0)}{B_{\xi}(0)}. \quad (6.15-а)$$

Подобным же образом можно ввести и понятие характерной ширины $\Delta\omega$ энергетического спектра $S_{\xi}(\omega)$:

$$\Delta\omega = \frac{\int_0^{\infty} S_{\xi}(\omega) d\omega}{S_{\xi \max}(\omega_0)} = \frac{B_{\xi}(0)}{2S_{\xi \max}(\omega_0)}. \quad (6.15-б)$$

Через $S_{\xi \max}(\omega_0)$ здесь обозначено максимальное значение энергетического спектра $S_{\xi}(\omega)$, достигаемое на некоторой частоте ω_0 (см. рис. 6.1). При написании формул (6.15) мы учли соотношения (6.11).

Перемножая теперь (6.15-а) и (6.15-б), получим

$$\Delta\omega \Delta\tau = \frac{\pi}{2} \frac{S_{\xi}(0)}{S_{\xi \max}(\omega_0)} = Const. \quad (6.16)$$

Величина $Const$ в (6.16) зависит от вида спектра $S_{\xi}(\omega)$ и от способа определения характерных “ширин” $\Delta\tau$ и $\Delta\omega$. Например, для низкочастотных спектров $S_{\xi \max}(\omega_0) \approx S_{\xi}(0)$ и $Const \approx \pi/2 \approx 1$. С другой стороны, в качестве $\Delta\tau$ может выступать введенное нами ранее время корреляции процесса τ_0 и т.д.

Суммируя вышеизложенное, отметим, что **“соотношение неопределенностей” является следствием общей теории преобразования Фурье, а не каких-либо специфических свойств автокорреляционной функции $B_{\xi}(\tau)$ или энергетического спектра $S_{\xi}(\omega)$ случайного процесса.**

В качестве *примера* рассмотрим соотношение неопределенностей для гауссовой автокорреляционной функции $B_{\xi}(\tau)$:

$$B_{\xi}(\tau) = \sigma_{\xi}^2 e^{-\tau^2/2\tau_0^2}.$$

С помощью формулы Винера-Хинчина (6.10) находим, что энергетический спектр $S_{\xi}(\omega)$ также является гауссовой кривой:

$$S_{\xi}(\omega) = \frac{\sigma_{\xi}^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\tau^2}{2\tau_0^2} - i\omega\tau} d\tau = \frac{\sigma_{\xi}^2 \tau_0}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\omega^2 \tau_0^2}{2}}.$$

Для данных зависимостей $B_{\xi}(\tau)$ и $S_{\xi}(\omega)$, согласно формулам (6.15) получим

$\Delta\tau = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \tau_0$, $\Delta\omega = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{\tau_0}$ и $\Delta\omega \cdot \Delta\tau = \pi/2 \approx 1$ С другой стороны в качестве $\Delta\tau$ мы

можем выбрать значение τ по уровню $B_{\xi}(0)/\sqrt{e}$. В этом случае, как легко увидеть, $\Delta\tau = \tau_0$. Точно таким же образом, оценив характерную ширину энергетического спектра $\Delta\omega$ по уровню $S_{\xi}(0)/\sqrt{e}$, получим $\Delta\omega = 1/\tau_0$. В результате соотношение неопределенностей имеет вид $\Delta\omega \cdot \Delta\tau = 1$

Несмотря на то, что строгое равенство $\Delta\tau \cdot \Delta\omega = \pi/2$ справедливо только для гауссовых спектров, соотношением $\Delta\tau \cdot \Delta\omega \approx 1$ часто пользуются для оценки ширины полосы процесса (ширины его энергетического спектра $\Delta\omega$) по известному времени корреляции, полагая $\tau_0 \approx \Delta\tau$. Наоборот, зная ширину полосы случайного процесса $\Delta\omega$, пользуясь (6.16), можно оценить его время корреляции τ_0 .

Записав пару Фурье-преобразований в виде (6.1), (6.2), мы неявно предположили, что спектр процесса – непрерывный. В случае **дискретного спектра** вместо интеграла (6.1) следует писать сумму:

$$\xi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\omega_n t}, \quad (6.17)$$

где ω_n – счетное множество частот (возможно, и бесконечное). Если процесс периодический (с периодом T), то $\omega_n = n\omega_0$, где $\omega_0 = 2\pi/T$, т.е. спектр состоит из эквидистантных (равноотстоящих друг от друга) дискретных частот. В общем же случае, когда $\omega_n \neq n\omega_0$, разложение (6.17) является представлением почти периодического процесса, для автокорреляционной функции которого вместо (6.5) имеет место формула

$$B_{\xi}(t, \tau) = \langle \xi(t+\tau)\xi(t) \rangle = \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} \langle C_n C_m^* \rangle e^{i(\omega_n - \omega_m)t + i\omega_n \tau}, \quad (6.18)$$

откуда следует, что для стационарности процесса необходимо выполнение условия, аналогичного (6.8):

$$\langle C_n C_m^* \rangle = \delta_{nm} S_n, \quad (6.19)$$

где δ_{nm} – символ Кронекера ($\delta_{nm} = 0$ при $n \neq m$, $\delta_{nm} = 1$ при $n = m$). Таким образом, автокорреляционная функция $B_{\xi}(\tau)$ почти периодического случайного процесса представляется в виде:

$$B_{\xi}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n e^{i\omega_n \tau}. \quad (6.20)$$

Если ввести энергетический спектр $S_{\xi}(\omega)$ соотношением

$$S_{\xi}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_n) S_n, \quad (6.21)$$

то (6.20) можно рассматривать как частный случай формулы (6.9).

У формулы (6.9) есть существенный недостаток – в интеграл по $d\omega$ входит область отрицательных частот ω , которая не должна давать никакой новой информации о процессе по сравнению с положительными частотами, поскольку $S_{\xi}(\omega)$ – четная функция по условию (6.13). Для того чтобы в (6.9) избавиться от отрицательных частот, разобьем область интегрирования по $d\omega$ на две полуоси, сделаем в интеграле по отрицательной полуоси ($\omega < 0$) замену переменной интегрирования $\omega \rightarrow -\omega$ и воспользуемся четностью $S_{\xi}(\omega)$:

$$\begin{aligned} B_{\xi}(\tau) &= \int_{-\infty}^0 S_{\xi}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega + \int_0^{\infty} S_{\xi}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \int_0^{\infty} S_{\xi}(\omega) [e^{i\omega\tau} + e^{-i\omega\tau}] d\omega = \\ &= 2 \int_0^{\infty} S_{\xi}(\omega) \cos \omega\tau d\omega = \int_0^{\infty} S_{\xi}^{(+)}(\omega) \cos \omega\tau d\omega. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Энергетический спектр мощности $S_{\xi}^{(+)}(\omega)$, относящийся только к положительным частотам, имеет, следовательно, вид:

$$S_{\xi}^{(+)}(\omega) = 2S_{\xi}(\omega), \quad \omega \geq 0. \quad (6.23)$$

Аналогичные преобразования формулы (6.10), с учетом четности $B_{\xi}(\tau)$, приводят к выражению для $S_{\xi}^{(+)}(\omega)$ через значения $B_{\xi}(\tau)$ только при положительных τ :

$$S_{\xi}^{(+)}(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} B_{\xi}(\tau) \cos \omega \tau d\tau. \quad (6.24)$$

Комментарии

Как уже отмечалось в начале этого параграфа, преобразование Фурье возможно только для абсолютно интегрируемых функций. Это означает, что формулы Винера-Хинчина (6.9) и (6.10) справедливы, если

$$\int_{-\infty}^{\infty} |B_{\xi}(\tau)| d\tau \leq N, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |S_{\xi}(\omega)| d\omega \leq P,$$

где N и P - некоторые константы. Данное условие накладывает существенные ограничения на область применимости Фурье-анализа применительно к случайным процессам. **Формулы справедливы только для стационарных процессов, среднее значение которых равно нулю и у которых нет также квазидетерминированных составляющих.**

6.2. Аналитический сигнал

При исследовании физических систем, описываемых линейными уравнениями, особую роль играют гармонические колебания вида

$$\xi(t) = A \cos(\omega t + \Phi), \quad (6.25)$$

где A – амплитуда колебания, а Φ – его фаза. Значительное упрощение математических вычислений при решении линейных интегро-дифференциальных уравнений достигается, как известно, путем перехода от вещественной функции (6.25) к комплексной

$$\zeta(t) = A e^{i(\omega t + \Phi)} - \quad (6.26)$$

по причинам, уже обсуждавшимся в начале этого параграфа. А как быть в общем случае произвольного, вообще говоря, негармонического процесса $\xi(t)$? Ясно, что существует бесчисленное множество комплексных функций $\zeta(t) = \xi(t) + i\eta(t)$, таких, что $\operatorname{Re} \zeta(t) = \xi(t)$, но как построить такую схему перехода от $\xi(t)$ к $\zeta(t)$, чтобы можно было однозначно каждому процессу $\xi(t)$ ставить в соответствие комплексную функцию $\zeta(t)$, реальная часть которой совпадает с $\xi(t)$? Искомый метод построения $\zeta(t)$, во-первых, не должен требовать дополнительной по сравнению с уже известной $\xi(t)$, информации, а во-вторых, в случае гармонических процессов (6.25) должен приводить к $\zeta(t)$ вида (6.26).

Самый естественный способ введения $\zeta(t)$ по заданной $\xi(t)$ основан на ее спектральном представлении (6.1):

$$\zeta(t) = 2 \int_0^{\infty} C_{\xi}(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (6.27)$$

где $C_{\xi}(\omega)$ - есть преобразование Фурье (6.2) функции $\xi(t)$. Введенную таким образом комплексную функцию $\zeta(t)$ называют **аналитическим сигналом**, соответствующим вещественному процессу $\xi(t)$. Принимая во внимание свойство эрмитовости (6.4) Фурье-компонент $C_{\xi}(\omega)$, убеждаемся в том, что $\operatorname{Re} \zeta(t)$ действительно совпадает с $\xi(t)$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \zeta(t) &= \frac{1}{2} [\zeta(t) + \zeta^*(t)] = \int_0^{\infty} [C_{\xi}(\omega) e^{i\omega t} + C_{\xi}^*(\omega) e^{-i\omega t}] d\omega = \\ &= \int_0^{\infty} C_{\xi}(\omega) e^{i\omega t} d\omega + \int_{-\infty}^0 C_{\xi}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} C_{\xi}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \xi(t). \end{aligned} \quad (6.28)$$

Для мнимой части $\operatorname{Im} \zeta(t) \equiv \eta(t)$, называемой **квadrатурной компонентной** или **сопряженным процессом**, имеем следующее разложение Фурье:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \zeta(t) &= \frac{1}{2i} [\zeta(t) - \zeta^*(t)] = \frac{1}{i} \int_0^{\infty} [C_{\xi}(\omega) e^{i\omega t} - C_{\xi}^*(\omega) e^{-i\omega t}] d\omega = \\ &= \frac{1}{i} \int_0^{\infty} C_{\xi}(\omega) e^{i\omega t} d\omega - \frac{1}{i} \int_{-\infty}^0 C_{\xi}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{C}_{\xi}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \eta(t), \end{aligned} \quad (6.29)$$

причем спектр $\tilde{C}_{\xi}(\omega)$ связан с $C_{\xi}(\omega)$ формулой

$$\tilde{C}_{\xi}(\omega) = -i \operatorname{sgn}(\omega) C_{\xi}(\omega), \quad (6.30)$$

где

$$\operatorname{sgn}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega > 0; \\ 0, & \omega = 0; \\ -1, & \omega < 0. \end{cases} \quad (6.31)$$

Легко проверить, что, с учетом определений (6.28), (6.29) мы приходим к исходной формуле (6.27):

$$\begin{aligned} \zeta(t) &= \xi(t) + i\eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [C_{\xi}(\omega) + \tilde{C}_{\xi}(\omega)] e^{i\omega t} d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} C_{\xi}(\omega) [1 + \operatorname{sgn}(\omega)] e^{i\omega t} d\omega = 2 \int_0^{\infty} C_{\xi}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \end{aligned}$$

Между $\xi(t)$ и $\eta(t)$ можно установить и непосредственную связь, не прибегая к разложению Фурье (6.1), а используя только свойство аналитичности функции

$$\zeta(z) = 2 \int_0^{\infty} C_{\xi}(\omega) e^{i\omega z} d\omega, \quad (6.32)$$

в верхней полуплоскости ($\alpha > 0$) комплексной переменной $z = t + i\alpha$. Действительно, при $\alpha > 0$ интеграл (6.32) сходится за счет экспоненциального множителя $e^{-\alpha\omega}$ при любых t , если исходная функция $\xi(t)$ не имеет особенностей. Если бы мы зависимость

от времени в (6.27) выбрали в виде $e^{-i\alpha t}$, то $\zeta(t)$ была бы аналитичной в нижней полуплоскости ($\alpha < 0$). Окружим точку $z = t + i\alpha$ произвольным замкнутым контуром Γ , целиком лежащим в верхней полуплоскости (рис. 6.2), и воспользуемся формулой Коши

$$\zeta(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\zeta(\theta)}{\theta - z} d\theta. \quad (6.33)$$

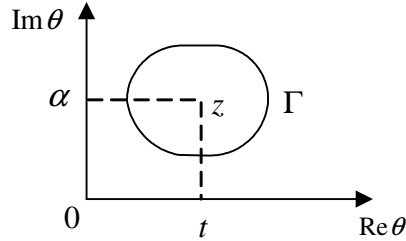


Рис. 6.2.

Так как $\zeta(\theta)$ не имеет особенностей в верхней полуплоскости, контур Γ можно растянуть так, чтобы он состоял из вещественной оси и бесконечно удаленной полуокружности, интеграл по которой равен нулю из-за быстрого убывания $\zeta(t + i\alpha)$ при $\alpha \rightarrow +\infty$. Таким образом, в (6.33) контур Γ можно трансформировать в вещественную ось:

$$\zeta(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta(\theta)}{\theta - z} d\theta. \quad (6.34)$$

Будем теперь устремлять точку $z = t + i\alpha$ к вещественной оси t ($\alpha \rightarrow 0$):

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\theta - z} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\theta - t - i\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\theta - t + i\alpha}{(\theta - t)^2 + \alpha^2} = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\theta - t}{(\theta - t)^2 + \alpha^2} + i \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{(\theta - t)^2 + \alpha^2}. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Согласно формуле (2.19-а) , второе слагаемое в (6.35) при $\alpha \rightarrow 0$ переходит в $i\pi\delta(\theta-t)$, а интеграл от первого - есть интеграл в смысле главного значения, так что, подставляя (6.35) в (6.34) и переходя к пределу $\alpha \rightarrow 0$, получаем:

$$\zeta(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \zeta(z) = \frac{1}{2\pi i} V.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta(\theta) d\theta}{\theta-t} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(\theta) \delta(\theta-t) d\theta. \quad (6.36)$$

Отсюда следует **формула Сохоцкого**

$$\zeta(t) = \frac{1}{\pi i} V.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta(\theta)}{\theta-t} d\theta.$$

Здесь введено следующее обозначение: **V.p.** – начальные буквы от слов “**Valeur principale**”, означающих по-французски “**главное значение**”.

Отделяя теперь в последнем выражении вещественную и мнимую части, получаем, что $\text{Re } \zeta(t) = \xi(t)$ и $\text{Im } \zeta(t) = \eta(t)$ связаны между собой **преобразованиями Гильберта**:

$$\xi(t) = \frac{1}{\pi} V.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta(\theta)}{\theta-t} d\theta, \quad (6.37-а)$$

$$\eta(t) = -\frac{1}{\pi} V.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi(\theta)}{\theta-t} d\theta. \quad (6.37-б)$$

Эти преобразования можно записать и иначе:

$$\xi(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\eta(t+\theta) - \eta(t-\theta)}{\theta} d\theta, \quad (6.37-в)$$

$$\eta(t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\xi(t+\theta) - \xi(t-\theta)}{\theta} d\theta.$$

Таким образом, для построения аналитического сигнала $\zeta(t)$ по заданному вещественному процессу $\xi(t)$ нет необходимости находить сначала преобразование Фурье $C_\xi(\omega)$ от $\xi(t)$, а затем строить сопряженный процесс $\eta(t)$ по формуле (6.29) – функция $\eta(t)$ может быть построена непосредственно по $\xi(t)$ путем преобразования Гильберта (6.37-б); $\eta(t)$ называют еще сопряженным по Гильберту процессом по отношению к $\xi(t)$. Можно легко убедиться в том, что для гармонического процесса (6.25) непосредственное вычисление интеграла (6.37-б) дает $\eta(t) = A \sin(\omega t + \Phi)$ и, следовательно, аналитический сигнал в этом случае действительно имеет вид (6.26).

6.3. Корреляционные функции и энергетические спектры аналитического сигнала

Обратимся снова к случаю, когда $\xi(t)$ – стационарный случайный процесс с нулевым средним ($\langle \xi(t) \rangle = 0$), так что его автокорреляционная функция $B_\xi(\tau)$ может быть представлена в виде спектрального разложения (6.9) или (6.22):

$$B_\xi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_\xi(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = 2 \int_0^{\infty} S_\xi(\omega) \cos \omega\tau d\omega. \quad (6.38)$$

Найдем автокорреляционную функцию и энергетический спектр сопряженного по Гильберту процесса $\eta(t)$, воспользовавшись разложением $\eta(t)$ в интеграл Фурье (6.29):

$$\langle \eta(t)\eta(t+\tau) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega d\omega' \langle \tilde{C}_\xi(\omega)\tilde{C}_\xi(\omega') \rangle e^{i(\omega+\omega')t+i\omega\tau}. \quad (6.39)$$

Но согласно (6.30) и (6.7) имеем

$$\begin{aligned} \langle \tilde{C}_\xi(\omega)\tilde{C}_\xi(\omega') \rangle &= -\text{sgn}(\omega)\text{sgn}(\omega') \langle C_\xi(\omega)C_\xi(\omega') \rangle = -\text{sgn}(\omega)\text{sgn}(\omega')\delta(\omega+\omega')S_\xi(\omega) = \\ &= -\text{sgn}(\omega)\text{sgn}(-\omega)\delta(\omega+\omega')S_\xi(\omega) = \delta(\omega+\omega')S_\xi(\omega). \end{aligned} \quad (6.40)$$

Подставляя (6.40) в (6.39), получаем

$$\langle \eta(t)\eta(t+\tau) \rangle = B_\eta(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_\xi(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = B_\xi(\tau). \quad (6.41)$$

Таким образом, сопряженный процесс $\eta(t)$ так же, как и исходный $\xi(t)$, оказывается стационарным, причем их автокорреляционные функции и энергетические спектры полностью совпадают.

Вычислим теперь взаимную корреляционную функцию стационарных процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$:

$$\langle \xi(t)\eta(t+\tau) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega d\omega' \langle C_\xi(\omega) \tilde{C}_\xi(\omega') \rangle e^{i(\omega+\omega')t+i\omega'\tau}. \quad (6.42)$$

Коррелятор $\langle C_\xi(\omega) \tilde{C}_\xi(\omega') \rangle$ вычисляем так же, как и (6.40), с помощью формул (6.30) и (6.7):

$$\langle C_\xi(\omega) \tilde{C}_\xi(\omega') \rangle = -i \operatorname{sgn}(\omega') \langle C_\xi(\omega) C_\xi(\omega') \rangle = i \operatorname{sgn}(\omega) S_\xi(\omega) \delta(\omega + \omega'). \quad (6.43)$$

Подставим (6.43) в (6.42) и выполним интегрирование по $d\omega'$ помощью дельта-функции $\delta(\omega + \omega')$:

$$\begin{aligned} \langle \xi(t)\eta(t+\tau) \rangle &= B_{\xi\eta}(\tau) = i \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(\omega) S_\xi(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega = \\ &= i \int_0^{\infty} S_\xi(\omega) [e^{-i\omega\tau} - e^{i\omega\tau}] d\omega = 2 \int_0^{\infty} S_\xi(\omega) \sin \omega\tau d\omega. \end{aligned} \quad (6.44)$$

Таким образом, случайный процесс $\xi(t)$ и сопряженный с ним $\eta(t)$ оказываются стационарно связанными, их функция взаимной корреляции $B_{\xi\eta}(\tau)$ является нечетной, и в совпадающие моменты времени ($\tau=0$) эти два процесса некоррелированы:

$$\langle \xi(t)\eta(t) \rangle = B_{\xi\eta}(0) = 0. \quad (6.45)$$

При вычислении коррелятора $\langle \eta(t)\xi(t+\tau) \rangle = B_{\eta\xi}(\tau)$ следует воспользоваться его независимостью от t и ввести новую переменную $t' = t + \tau$ (т.е. сместить начало отсчета времени на $-\tau$):

$$B_{\eta\xi}(\tau) = \langle \eta(t)\xi(t+\tau) \rangle = \langle \xi(t')\eta(t'-\tau) \rangle = B_{\xi\eta}(-\tau) = -B_{\xi\eta}(\tau). \quad (6.46)$$

Формулу (6.45) можно рассматривать как факт ортогональности процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$, вкладывая в это понятие тот же смысл, что и в ортогональность функций $A\cos(\omega t + \Phi)$ и $A\sin(\omega t + \Phi)$ (отличие фаз этих процессов на $\pi/2$). Таким образом, преобразование Гильберта (6.37-б) есть, по сути, способ построения процесса $\eta(t)$, ортогонального к данному $\xi(t)$. Отсюда, кстати, и происходит название совокупности $\xi(t)$ и $\eta(t)$ - квадратурные составляющие (или компоненты) аналитического сигнала: так же, как $A\cos(\omega t + \Phi)$ и $A\sin(\omega t + \Phi)$ являются квадратурными компонентами комплексной функции $A\exp\{i(\omega t + \Phi)\}$.

Построим теперь **автокорреляционную функцию самого аналитического сигнала** $\zeta = \xi + i\eta$:

$$B_{\zeta}(\tau) = \langle \zeta^*(t)\zeta(t+\tau) \rangle. \quad (6.47)$$

Для сокращения записи будем опускать аргумент t ($\xi(t) \equiv \xi$, $\eta(t) \equiv \eta$) и введем обозначения $\xi(t+\tau) \equiv \xi_{\tau}$ и $\eta(t+\tau) \equiv \eta_{\tau}$. Тогда

$$\begin{aligned} \langle \zeta^*(t)\zeta(t+\tau) \rangle &= \langle [\xi - i\eta][\xi_{\tau} + i\eta_{\tau}] \rangle = \\ &= \langle (\xi\xi_{\tau} + \eta\eta_{\tau} - i\eta\xi_{\tau} + i\eta_{\tau}\xi) \rangle = 2[B_{\xi}(\tau) + iB_{\xi\eta}(\tau)]. \end{aligned} \quad (6.48)$$

Воспользовавшись теперь спектральными разложениями (6.38) и (6.44), получим

$$B_{\zeta}(\tau) = 4 \int_0^{\infty} S_{\zeta}(\omega) [\cos \omega\tau + i \sin \omega\tau] d\omega = 4 \int_0^{\infty} S_{\zeta}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (6.49)$$

С другой стороны, по определению, энергетический спектр аналитического сигнала $S_{\zeta}(\omega)$ связан с $B_{\zeta}(\tau)$ общим соотношением (6.9):

$$B_{\zeta}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\zeta}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (6.50)$$

Из сравнения (6.49) и (6.50) вытекает, что:

$$S_{\zeta} = \begin{cases} 4S_{\zeta}, & \omega \geq 0; \\ 0, & \omega < 0. \end{cases} \quad (6.51)$$

Наряду с (6.47) можно было бы рассмотреть еще одну автокорреляционную функцию

$$\tilde{B}_{\zeta}(\tau) = \langle \zeta(t)\zeta(t+\tau) \rangle, \quad (6.52)$$

однако простые вычисления показывают, что она тождественно равна нулю при любых τ :

$$\tilde{B}_{\zeta}(\tau) = \langle (\xi + i\eta)(\xi_{\tau} + i\eta_{\tau}) \rangle = \langle (\xi\xi_{\tau} - \eta\eta_{\tau} + i\xi\eta_{\tau} + i\eta\xi_{\tau}) \rangle = 0. \quad (6.53)$$

При этом мы воспользовались формулами (6.41) и (6.46).

6.4. Примеры спектральных распределений

Одно важное свойство $S_{\zeta}(\omega)$ может быть получено без конкретизации вида $B_{\zeta}(\tau)$ - речь идет о характере изменения $S_{\zeta}(\omega)$ на достаточно низких частотах ω . Обратимся снова к формуле (6.10). Характерные размеры области интегрирования по τ определяются временем корреляции процесса τ_0 , так как при больших временах $B_{\zeta}(\tau)$ быстро убывает до нуля:

$$S_{\xi}(\omega) \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau_0}^{\tau_0} B_{\xi}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (6.54)$$

Рассмотрим в $S_{\xi}(\omega)$ область предельно низких частот, когда $\omega\tau_0 \ll 1$. При этом экспоненту в (6.54) можно заменить на единицу:

$$S_{\xi}(\omega) \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau_0}^{\tau_0} B_{\xi}(\tau) d\tau \approx \frac{B_{\xi}(0)\tau_0}{\pi} = \frac{\sigma_{\xi}^2\tau_0}{\pi} = \frac{N}{2} = const. \quad (6.55)$$

Таким образом, на низких частотах спектральная плотность $S_{\xi}(\omega)$ - есть величина постоянная ($S_{\xi}(\omega) \approx N/2$), не зависящая от ω . Схематически график $S_{\xi}(\omega)$ приведен на рис. 6.3.

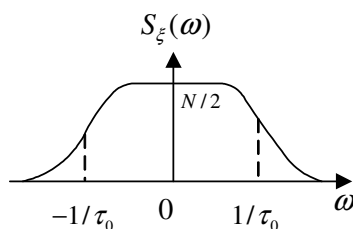


Рис. 6.3.

Белый шум.

Из рис. 6.3 видно, что при уменьшении τ_0 область частот, где $S_{\xi}(\omega) \approx N/2$, неограниченно расширяется. Предельному случаю $\tau_0 \rightarrow 0$ соответствует постоянный на всей оси частот ω энергетический спектр $S_{\xi}(\omega) = N/2$. Случайный процесс с постоянной спектральной плотностью $S_{\xi}(\omega)$ называется **белым шумом** по аналогии с белым светом, который есть смешение электромагнитных волн с примерно одинаковой энергией в широком интервале частот. В отличие от белого шума у "окрашенных" шумов вся энергия сосредоточена в одной или в нескольких спектральных составляющих (линиях, полосах, окнах и т.д.). Из определения (6.9) следует выражение для автокорреляционной функции $B_{\xi}(\tau)$ белого шума:

$$B_{\xi}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N}{2} e^{i\omega\tau} d\omega = \pi N \delta(\tau). \quad (6.56)$$

Таким образом, **белый шум** – это **дельта-коррелированный процесс**: значения, которые принимает этот случайный процесс в сколь угодно близкие моменты времени, разделенные промежутком $\tau \neq 0$, не коррелируют между собой. Конечно, белый шум не более чем удобная абстракция, хотя бы потому, что его дисперсия (т.е. средняя мощность процесса) равна бесконечности ($\sigma_{\xi}^2 = B_{\xi}(0) \square \delta(0) \rightarrow \infty$). Кроме того, ясно, что невозможно существование временных процессов с бесконечно широкой полосой частот в любых реальных физических системах и, в частности, радиотехнических цепях. Формально можно ввести и коэффициент корреляции $K_{\xi}(\tau)$ белого шума:

$$K_{\xi}(\tau) = \frac{B_{\xi}(\tau)}{B_{\xi}(0)} = \begin{cases} 1, & \tau = 0; \\ 0, & \tau \neq 0. \end{cases} \quad (6.57)$$

Узкополосный случайный процесс.

Другим предельным случаем, противоположным белому шуму, является узкополосный случайный процесс. Энергетический спектр его отличен от нуля в узкой области частот $\Delta\omega$ около центральной (средней или несущей) частоты ω_0 и в силу симметрии $S_{\xi}(\omega)$ около $-\omega_0$, причем выполняется неравенство $|\Delta\omega| \ll \omega_0$ (рис. 6.4).

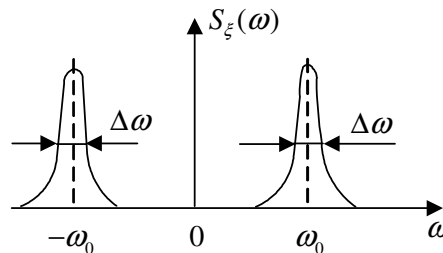


Рис. 6.4.

Для вычисления автокорреляционной функции $B_{\xi}(\tau)$ удобно исходить из формулы (6.22). Перейдем от частоты ω к частоте ν , отсчитываемой от несущей ω_0 : $\nu = \omega - \omega_0$. Формула (6.22) при этом приобретает вид

$$B_{\xi}(\tau) = \int_{-\omega_0}^{\infty} S_{\xi}^{(+)}(\omega_0 + \nu) \cos[(\omega_0 + \nu)\tau] d\nu. \quad (6.58)$$

Учитывая, что по определению узкополосного процесса функция $S_{\xi}^{(+)}(\omega_0 + \nu)$ отлична от нуля только при $|\nu| \approx |\Delta\omega| \ll \omega_0$, нижний предел $-\omega_0$ в интеграле (6.58) можно заменить на $-\infty$:

$$B_{\xi}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}^{(+)}(\omega_0 + \nu) [\cos \omega_0 \tau \cos \nu \tau - \sin \omega_0 \tau \sin \nu \tau] d\nu. \quad (6.59)$$

Введем спектр низких частот, так называемый "**медленный**" спектр $\tilde{S}(\nu)$:

$$\tilde{S}(\nu) = S_{\xi}^{(+)}(\omega_0 + \nu) \quad (6.60)$$

и амплитуды синус-косинусных составляющих

$$a_c(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}(\nu) \cos \nu \tau d\nu, \quad (6.61-a)$$

$$a_s(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}(\nu) \sin \nu \tau d\nu, \quad (6.61-b)$$

С учетом сделанных определений $B_{\xi}(\tau)$ принимает вид

$$B_{\xi}(\tau) = a_c(\tau) \cos \omega_0 \tau - a_s(\tau) \sin \omega_0 \tau = A_B(\tau) \cos[\omega_0 \tau + \Phi_B(\tau)], \quad (6.62)$$

где

$$A_B(\tau) = \sqrt{a_c^2(\tau) + a_s^2(\tau)} - \quad (6.63-a)$$

оггибающая корреляционной функции, а

$$\Phi_B(\tau) = \text{arctg}[a_s(\tau)/a_c(\tau)] - \quad (6.63-б)$$

медленная фаза автокорреляционной функции.

Характерное время τ_0 изменения амплитуды $A_B(\tau)$ и фазы $\Phi_B(\tau)$ определяются шириной $\Delta\omega$ медленного спектра ($\tau_0 \approx 1/|\Delta\omega|$) в соответствии с соотношением неопределенности (6.16) и Фурье-преобразованиями (6.61)), а быстрые осцилляции косинуса в (6.62) происходят за значительно более короткие времена $T = 2\pi/\omega_0 \ll \tau_0$. Таким образом, **автокорреляционная функция $B_\xi(\tau)$ узкополосного случайного процесса имеет вид модулированного по амплитуде и фазе высокочастотного колебания** типа представленного на рис. 6.5 (схематический график приведен только для времен $\tau \geq 0$; этого достаточно, так как $B_\xi(\tau)$ – четная функция).

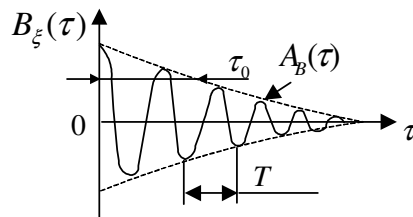


Рис. 6.5.

Видно, что в качестве характерного времени корреляции τ_0 выступает время существенного уменьшения амплитуды $A_B(\tau)$. Величина τ_0 обратно пропорциональна ширине полосы $\Delta\omega$, а не несущей частоте ω_0 : на временах $T = 2\pi/\omega_0$ происходят только осцилляции $B_\xi(\tau)$ без заметного убывания амплитуды колебаний $A_B(\tau)$.

Амплитуда и фаза узкополосного случайного процесса

Для анализа узкополосных случайных процессов очень удобными являются понятия амплитуды и фазы процесса $\xi(t)$. В общем случае (не обязательно для узкополосных процессов) амплитуда $A(t)$ и фаза $\varphi(t)$ произвольного вещественного процесса $\xi(t)$ может быть введена как модуль и аргумент аналитического сигнала $\zeta(t)$, соответствующего $\xi(t)$:

$$\zeta(t) = \xi(t) + i\eta(t) \equiv A(t)e^{i\varphi(t)}. \quad (6.64)$$

Убедимся в том, что введенные подобным образом амплитуды и фазы согласуются с теми представлениями, которые вкладываются в них в курсе теории колебаний или теоретических основ радиотехники. Обычно под узкополосным процессом (не обязательно случайным) подразумевают функцию вида:

$$\xi(t) = A(t) \cos \varphi(t), \quad \varphi(t) = \omega_0 t + \Phi(t), \quad (6.65)$$

где $A(t)$ и $\Phi(t)$ являются значительно более медленными функциями времени, чем осцилляции косинуса с периодом $T = 2\pi/\omega_0$. Введя в рассмотрение характерные времена $\tau_{A,\Phi}$ изменений амплитуды $A(t)$ и фазы $\Phi(t)$, условие их медленности можно сформулировать как

$$\left| \frac{1}{A} \frac{dA}{dt} \right| \approx \frac{1}{\tau_A} \ll \omega_0; \quad \left| \frac{1}{\Phi} \frac{d\Phi}{dt} \right| \approx \frac{1}{\tau_\Phi} \ll \omega_0. \quad (6.66)$$

Величину $\Phi(t)$ называют "**медленной фазой**" в отличие от быстрой или просто фазы $\varphi(t)$.

Применяя преобразование Гильберта (6.37-в) сопоставим (6.65) сопряженный ему процесс $\eta(t)$. С учетом неравенств (6.66) вычисление интеграла в (6.37-в) приводит к такому результату:

$$\eta(t) = A(t) \sin(\omega_0 t + \Phi(t)). \quad (6.67)$$

Видно, что для узкополосного процесса преобразование Гильберта эквивалентно дифференцированию (6.65) по t , делению затем полученного результата на $-\omega_0$ и отбрасыванию слагаемых, малых в меру выполнения неравенств (6.66).

Аналитический сигнал $\zeta(t)$ имеет, следовательно, вид

$$\zeta(t) = \xi(t) + i\eta(t) = A(t)e^{i[\omega_0 t + \Phi(t)]}. \quad (6.68)$$

Таким образом,

$$A(t) = |\zeta(t)| = \sqrt{\xi(t)^2 + \eta(t)^2}, \quad (6.69)$$

$$\varphi(t) = \omega_0 t + \Phi(t) = \arg \zeta(t) = \operatorname{arctg} \frac{\eta(t)}{\xi(t)}. \quad (6.70)$$

Если $\xi(t)$ - случайный процесс, то очевидно, что $A(t)$ и $\Phi(t)$ также являются случайными функциями времени. В реальных условиях, как правило, имеют дело не с быстро осциллирующими функциями $\xi(t)$, а с медленными - амплитудой $A(t)$ и фазой $\Phi(t)$. Возникает естественный вопрос: как связаны статистические характеристики быстрого процесса $\xi(t)$ с параметрами флуктуаций $A(t)$ и $\Phi(t)$? Если априори известно, что $\xi(t)$ - нормальный случайный процесс, то сопряженный с ним $\eta(t)$, будучи связанным с $\xi(t)$ линейным преобразованием (6.37-в), также является нормальным, причем эти процессы обладают одинаковыми автокорреляционными функциями (6.41) и в совпадающие моменты времени не коррелируют (6.45). Как следует из (6.69), $A(t)$ - есть длина вектора, имеющего декартовы компоненты $\xi(t)$ и $\eta(t)$ соответственно. Задача об определении функции распределения вероятности длины случайного вектора с нормальными некоррелированными компонентами была решена в § 4: если $\bar{\xi} = \bar{\eta} = 0$, то $W(A)$ есть распределение Релея (см. (4.74)), а фаза $\Phi(t)$ распределена равномерно (см. (4.76)).

6.5. Комплексная огибающая аналитического сигнала

Амплитуду $A(t)$ часто называют **огибающей процесса** $\zeta(t)$. Под **комплексной огибающей** подразумевают функцию

$$E(t) = A(t)e^{i\Phi(t)}. \quad (6.71)$$

Аналитический сигнал (6.68) при этом записывается в виде

$$\zeta(t) = E(t)e^{i\omega_0 t}. \quad (6.72)$$

Для определения характера временных флуктуаций $A(t)$, $\Phi(t)$ и $E(t)$ необходимо, по крайней мере, выразить их автокорреляционные функции через автокорреляционную функцию (или энергетический спектр) процесса $\xi(t)$. Запишем процесс $\xi(t)$, заданный формулой (6.65), в виде суммы двух квадратурных компонент:

$$\xi(t) = A_c(t) \cos \omega_0 t - A_s(t) \sin \omega_0 t, \quad (6.73)$$

где

$$\begin{aligned} A_c(t) &= A(t) \cos \Phi(t) = \operatorname{Re} E(t), \\ A_s(t) &= A(t) \sin \Phi(t) = \operatorname{Im} E(t). \end{aligned} \quad (6.74)$$

Аналогичное представление имеет место и для сопряженного (по Гильберту) процесса

$$\eta(t) = A_c(t) \sin \omega_0 t + A_s(t) \cos \omega_0 t. \quad (6.75)$$

Выразим сначала автокорреляционные функции квадратурных компонент через автокорреляционную функцию $B_\xi(\tau)$ исходного процесса $\xi(t)$ и взаимную корреляционную функцию $B_{\xi\eta}(\tau)$. Разрешим уравнения (6.73) и (6.75) относительно A_c и A_s :

$$\begin{aligned} A_c(t) &= \xi(t) \cos \omega_0 t + \eta(t) \sin \omega_0 t, \\ A_s(t) &= -\xi(t) \sin \omega_0 t + \eta(t) \cos \omega_0 t, \end{aligned} \quad (6.76)$$

откуда следует

$$\langle A_c(t)A_c(t+\tau) \rangle = \langle A_s(t)A_s(t+\tau) \rangle = B_\xi(\tau) \cos \omega_0 \tau + B_{\xi\eta}(\tau) \sin \omega_0 \tau, \quad (6.77)$$

$$\langle A_s(t)A_c(t+\tau) \rangle = -\langle A_c(t)A_s(t+\tau) \rangle = B_\xi(\tau) \sin \omega_0 \tau - B_{\xi\eta}(\tau) \cos \omega_0 \tau. \quad (6.78)$$

Квадратурные компоненты $A_c(t)$ и $A_s(t)$ нормального случайного процесса $\xi(t)$ также распределены по нормальному закону, так как связаны с $\xi(t)$ и $\eta(t)$ линейными соотношениями (6.76). С другой стороны, плотность нормального распределения полностью определяется только первыми двумя моментами, и,

следовательно, в этом случае формулы (6.77), (6.78) содержат в себе всю информацию о статистике совокупности двух функций $A_c(t)$ и $A_s(t)$. Переход же от $A_c(t)$ и $A_s(t)$ к огибающей $A(t)$ и фазе процесса $\Phi(t)$ осуществляется с помощью очевидных формул:

$$A = \sqrt{A_c^2 + A_s^2}; \quad \Phi = \operatorname{arctg} \frac{A_s}{A_c}. \quad (6.79)$$

Используя общие формулы преобразования для перехода от плотностей распределений $A_c(t)$ и $A_s(t)$ к $A(t)$ и $\Phi(t)$ (см. § 4), можно вычислить любые корреляторы амплитуды и фазы в разнесенные моменты времени. Это довольно громоздкие вычисления и их можно, например, найти в монографиях по статистической радиотехнике.

Значительно проще оказывается определение энергетического спектра флуктуаций комплексной огибающей $E(t)$. Для этого, пользуясь представлением (6.72), запишем автокорреляционную функцию аналитического сигнала:

$$B_\zeta(\tau) = \langle \zeta^*(t)\zeta(t+\tau) \rangle = \langle E^*(t)E(t+\tau) \rangle e^{i\omega_0\tau} = B_E(\tau) e^{i\omega_0\tau}. \quad (6.80)$$

Используя спектральное разложение (6.50) и выражение для энергетического спектра аналитического сигнала (6.51), из (6.80) получаем:

$$\begin{aligned} B_E(\tau) &= \langle E^*(t)E(t+\tau) \rangle = B_\zeta(\tau) e^{-i\omega_0\tau} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S_\zeta(\omega) e^{i(\omega-\omega_0)\tau} d\omega = 4 \int_0^{\infty} S_\xi(\omega) e^{i(\omega-\omega_0)\tau} d\omega. \end{aligned} \quad (6.81)$$

Сделаем в (6.81) замену переменных $\nu = \omega - \omega_0$ и введем медленный спектр $\tilde{S}(\nu)$ (6.60):

$$B_E(\tau) = 4 \int_{-\omega_0}^{\infty} S_\xi(\omega_0 + \nu) e^{i\nu\tau} d\nu \approx 2 \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}(\nu) e^{i\nu\tau} d\nu. \quad (6.82-a)$$

Здесь при замене нижнего предела $-\omega_0$ на $-\infty$ мы воспользовались узкополосностью процесса (ср. переход от (6.58) к (6.59)). С другой стороны, согласно (6.9)

$$B_E(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_E(\nu) e^{i\nu\tau} d\nu. \quad (6.82-б)$$

Из сравнения (6.82-б) и (6.82-а), получаем, что энергетический спектр $S_E(\nu)$ флуктуаций комплексной огибающей совпадает со спектром аналитического сигнала, сдвинутым в область низких частот на величину ω_0 и просто выражается через медленный спектр:

$$S_E(\nu) = S_{\xi}(\omega_0 + \nu) = 4S_{\xi}(\omega_0 + \nu) = 2\tilde{S}(\nu). \quad (6.83)$$

ЗАДАЧИ

1. Стационарный случайный процесс $\xi(t)$ имеет равномерную спектральную плотность $S_{\xi}(\omega) = S_0$ в интервале частот $\left[-\frac{\Omega}{2}, \frac{\Omega}{2}\right]$ и $S_{\xi}(\omega) = 0$ при $|\omega| > \frac{\Omega}{2}$, $\Omega > 0$. Найти автокорреляционную функцию $B_{\xi}(\tau)$, с помощью которой проверить соотношение неопределенностей.

Решение. Используя формулу Винера - Хинчина (6.9) находим

$$\begin{aligned} B_{\xi}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \int_{-\frac{\Omega}{2}}^{\frac{\Omega}{2}} S_0 e^{i\omega\tau} d\omega = \frac{S_0}{i\tau} e^{i\omega\tau} \Bigg|_{-\frac{\Omega}{2}}^{\frac{\Omega}{2}} = \\ &= \frac{S_0}{i\tau} \left[e^{\frac{i\Omega\tau}{2}} - e^{-\frac{i\Omega\tau}{2}} \right] = S_0 \Omega \frac{\sin(\Omega\tau/2)}{(\Omega\tau/2)}. \end{aligned}$$

Согласно определению, характерная ширина $\Delta\omega$ энергетического спектра равна $\Delta\omega = \Omega$. Характерную же ширину $\Delta\tau$ автокорреляционной функции определим по первому нулю $\sin(\Omega\tau/2)$: $\Delta\tau = 2\pi/\Omega$. Отсюда соотношение неопределенностей (6.14) записывается следующим образом:

$$\Delta\tau \Delta\omega = \Omega \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi > 1.$$

2. Найти автокорреляционную функцию стационарного случайного процесса $\xi(t)$ с нулевым математическим ожиданием и спектральной плотностью

$$S_{\xi}(\omega) = \begin{cases} N/2, & -\omega_2 \leq \omega \leq -\omega_1 \quad (\omega < 0); \\ N/2, & \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2 \quad (\omega > 0); \\ 0, & \text{при всех других значениях } \omega. \end{cases} \quad (1)$$

Для частного случая $\omega_1 = 0$ определить величину интервала $\Delta t = t_{k+1} - t_k$, при котором значения $\xi_{k+1} = \xi(t_{k+1})$ и $\xi_k = \xi(t_k)$ некоррелированы.

Решение. По формуле Винера - Хинчина (6.9) находим

$$\begin{aligned} B_{\xi}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = N \int_{\omega_1}^{\omega_2} \cos \omega\tau d\omega = \frac{N}{\tau} (\sin \omega_2\tau - \sin \omega_1\tau) = \\ &= N(\omega_2 - \omega_1) \frac{\sin \frac{(\omega_2 - \omega_1)\tau}{2}}{\frac{(\omega_2 - \omega_1)\tau}{2}} \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \tau = \sigma_{\xi_1}^2 \rho_1(\tau) \cos \omega_0\tau. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\sigma_{\xi_1}^2 = N\Delta\omega$; $\rho_1(\tau) = \frac{\sin \frac{\Delta\omega\tau}{2}}{\frac{\Delta\omega\tau}{2}}$; $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$; $\omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$.

Для частного случая $\omega_1 = 0$ автокорреляционная функция (2) принимает вид

$$B_{\xi}(\tau) = \frac{N}{\tau} \sin \omega_2\tau = N\omega_2 \frac{\sin \omega_2\tau}{\omega_2\tau} = \sigma_{\xi_2}^2 \rho_2(\tau), \quad (3)$$

где $\sigma_{\xi_2}^2 = N\omega_2$; $\rho_2(\tau) = \frac{\sin \omega_2\tau}{\omega_2\tau}$.

Интервал $\Delta t = t_{k+1} - t_k$, при котором значения $\xi_k = \xi(t_k)$ и $\xi_{k+1} = \xi(t_{k+1})$ будут некоррелированы, можно определить, приравняв в (3) нулю значение нормированной корреляционной функции $\rho_2(\Delta t)$:

$$\frac{\sin \omega_2 \Delta t}{\omega_2 \Delta t} = 0; \Delta t = \frac{\pi}{\omega_2} = \frac{1}{2f_2}.$$

Здесь $f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi}$ – верхняя граничная частота спектральной плотности $S_\xi(\omega)$. По найденной величине Δt количество некоррелированных отсчетов N на интервале длительностью T определяется как $N = T / \Delta t = 2f_2 T$.

§ 7. Линейные преобразования случайных процессов

Случайные процессы, описывающие флуктуации реальных сигналов, подвергаются различным преобразованиям как при их распространении по каналам связи, так и непосредственно в радиотехнических приемных и передающих устройствах. В результате преобразования каждая реализация $x(t)$ случайного процесса $\xi(t)$ порождает реализацию $y(t)$ процесса $\eta(t)$. При этом свойства $y(t)$ могут коренным образом отличаться от свойств исходного процесса $x(t)$.

С математической точки зрения любую радиотехническую систему можно представить формализованным соотношением

$$y(t) = \hat{L}[x(t)], \quad (7.1)$$

где \hat{L} - некоторый оператор, преобразующий по заданному закону сигнал на входе системы $x(t)$ в сигнал на выходе - $y(t)$. Входное воздействие и выходной процесс могут зависеть не только от времени t , но и от других параметров (пространственные координаты, температура, плотность газа и т.д.).

По виду зависимости выходного процесса от входного различают следующие виды систем: **безынерционные и инерционные, физически реализуемые и нереализуемые, линейные и нелинейные, стационарные и нестационарные.**

Безынерционной называется система, в которой значение сигнала на выходе $y(t)$ в любой момент времени t зависит только от значения входного сигнала $x(t)$ в этот же момент времени. В **инерционной** системе значение сигнала на выходе $y(t)$ в момент времени t может зависеть от значения входного сигнала $x(t)$ в предшествующие времена $t' \leq t$.

Физически реализуемая система – система, преобразующая лишь предшествующие и текущие значения входного сигнала.

7.1. Математическое описание линейных систем

Любую сложную радиотехническую систему можно представить в виде совокупности **линейных и нелинейных** устройств или звеньев. Линейные системы описываются линейными операторами \hat{L} . В качестве таковых могут выступать

линейные интегро-дифференциальные уравнения, алгебраические и т.д. Формально оператор \hat{L} называется линейным, если для него справедлив **принцип суперпозиции**. Смысл этого принципа заключается в следующем. Если на вход системы одновременно поступают несколько сигналов $x_k(t)$ ($k=1,2,\dots,N$), то на каждый сигнал система откликается независимо. Математически этот принцип записывается так:

$$y(t) = \hat{L} \left[\sum_{k=1}^N c_k x_k(t) \right] = \sum_{k=1}^N c_k \hat{L} [x_k(t)] = \sum_{k=1}^N c_k y_k(t). \quad (7.2)$$

Здесь $y_k(t) = \hat{L} [x_k(t)]$ - отклик системы на входной сигнал $x_k(t)$, а c_k - произвольные, не зависящие от времени коэффициенты.

Системы, для которых принцип суперпозиции не выполняется, называются **нелинейными**. К данной группе можно отнести такие элементы и устройства, как ограничители, выпрямители, смесители, преобразователи частоты, модуляторы, детекторы и т.д.

Ниже мы рассмотрим наиболее простой и вместе с тем важный случай **линейных инерционных** систем. Пусть на вход линейной системы в момент времени $t = \tau$ поступает дельтообразный импульс $x(t) = \delta(t - \tau)$. При этом согласно (7.1) на выходе системы будет наблюдаться отклик

$$y(t, \tau) = h(t, \tau) = \hat{L} [\delta(t - \tau)], \quad (7.3)$$

который называется **импульсной переходной функцией**. С помощью определений (7.1) и (7.3) для линейных систем можно записать следующую фундаментальную формулу:

$$y(t) = \hat{L} [x(t)] = \hat{L} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \right] = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \hat{L} [\delta(t - \tau)] d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t, \tau) d\tau. \quad (7.4)$$

При написании данного выражения мы воспользовались известным свойством δ -функции

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

и поменяли порядок действия двух линейных операторов \hat{L} и $\int_{-\infty}^{\infty} d\tau$. Заметим, что если линейная система описывается при помощи соответствующих линейных дифференциальных уравнений, то $h(t, \tau)$ представляет собой функцию Грина, а формула (7.4) – есть решение некоторой краевой задачи.

Таким образом, функцию $y(t)$ можно рассматривать как отклик линейной системы, характеризуемой функцией $h(t, \tau)$, на внешнее воздействие $x(\tau)$ (см. рис. 7.1).

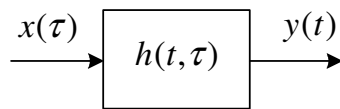


Рис. 7.1.

Как уже отмечалось выше, в **физически реализуемых системах** сигнал на выходе $y(t)$ может зависеть от значений входного сигнала $x(\tau)$ только в предшествующие моменты времени $\tau \leq t$, а поведение $x(\tau)$ при $\tau > t$ не может никак повлиять на выходной сигнал $y(t)$ в момент времени t . Это является следствием общего **физического принципа причинности**, поэтому ядро $h(t, \tau)$ интегрального преобразования (7.4) должно обладать следующим свойством:

$$h(t, \tau) \equiv 0 \text{ при } \tau > t, \quad (7.5)$$

и, следовательно, всегда линейное преобразование имеет вид:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t h(t, \tau)x(\tau)d\tau. \quad (7.6)$$

Среди всевозможных линейных систем особое место занимают **системы с постоянными параметрами**, отклик которых $h(t, \tau)$ зависит только от промежутка

времени между моментами воздействия τ и наблюдения t и не зависит от того, в какой момент времени τ это воздействие произошло. Таким образом, для систем с постоянными параметрами $h(t, \tau) = h(t - \tau)$, а (7.6) принимает вид:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t h(t - \tau)x(\tau)d\tau.$$

После замены переменной интегрирования $t' = t - \tau$ имеем

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(t')x(t - t')dt'. \quad (7.7)$$

К системам с неизменными во времени параметрами относятся, например, одиночные и связанные контуры, многосвязные фильтры и многокаскадные усилители, линии задержки, дифференцирующая и интегрирующая цепочка и т. д.

В тех случаях, когда изучаются переходные процессы в линейных системах, необходимо учитывать момент включения процесса на входе, т.е. необходимо полагать $x(t) \equiv 0$ при $t < 0$. Тогда выражение (7.6) принимает вид

$$y(t) = \int_0^t h(t, \tau)x(\tau)d\tau. \quad (7.8)$$

Для систем с постоянными параметрами аналогично (7.7) получаем

$$y(t) = \int_0^t h(t')x(t - t')dt'. \quad (7.9)$$

7.2. Связь между моментами в линейных системах

С помощью приведенных выше формул легко установить связь между **первыми моментами** на входе и выходе линейной системы. Так, согласно (7.6) вычислим среднее значение сигнала на выходе:

$$\langle y(t) \rangle = \left\langle \int_{-\infty}^t h(t, \tau) x(\tau) d\tau \right\rangle = \int_{-\infty}^t h(t, \tau) \langle x(\tau) \rangle d\tau. \quad (7.10)$$

При усреднении в (7.10) мы учли, что линейные операции интегрирования и усреднения по ансамблю реализаций можно поменять местами. Видно, что в общем случае, когда параметры линейной системы изменяются во времени, на выходе будет наблюдаться нестационарный процесс даже в том случае, когда на вход подается стационарный процесс. Действительно, при $\langle x(\tau) \rangle = Const$ получаем

$$\langle y(t) \rangle = \bar{x} \int_{-\infty}^t h(t, \tau) d\tau = \bar{x} \cdot f(t), \quad (7.11)$$

где $f(t)$ - некоторая детерминированная функция времени.

Если же параметры линейной системы не изменяются во времени, то согласно (7.7) математические ожидания на входе и выходе связаны между собой следующим соотношением:

$$\langle y(t) \rangle = \int_0^{\infty} h(t') \langle x(t-t') \rangle dt' = \bar{x} \int_0^{\infty} h(t') dt' = Const. \quad (7.12)$$

Неизменность среднего отклика на выходе системы в рассматриваемом случае является одним из признаков стационарности процесса $y(t)$. С другой стороны, если в (7.12) мы учтем момент включения сигнала на входе, то согласно (7.9) приходим к зависимости

$$\langle y(t) \rangle = \int_0^t h(t') \langle x(t-t') \rangle dt' = \bar{x} \int_0^t h(t') dt' \neq Const, \quad (7.13)$$

которая так же, как и (7.11), свидетельствует о нестационарности процесса $y(t)$.

Из формулы общего вида (7.6) непосредственно следует связь между **вторыми моментами** на входе и выходе линейной системы:

$$\begin{aligned}
R_y(t_1, t_2) &= \langle y(t_1)y(t_2) \rangle = \int_{-\infty}^{t_1} h(t_1, \tau') d\tau' \int_{-\infty}^{t_2} h(t_2, \tau'') \langle x(\tau')x(\tau'') \rangle d\tau'' = \\
&= \int_{-\infty}^{t_1} h(t_1, \tau') d\tau' \int_{-\infty}^{t_2} h(t_2, \tau'') R_x(\tau', \tau'') d\tau''.
\end{aligned} \tag{7.14}$$

Для стационарного (в широком смысле) процесса на входе $\langle x(\tau')x(\tau'') \rangle = R_x(\tau' - \tau'')$ и формула (7.14) принимает вид

$$R_y(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{t_1} h(t_1, \tau') d\tau' \int_{-\infty}^{t_2} h(t_2, \tau'') R_x(\tau' - \tau'') d\tau''. \tag{7.15}$$

Видно, что в линейных системах с изменяющимися во времени параметрами на выходе будет наблюдаться нестационарный процесс даже в том случае, когда на вход поступает стационарный процесс. С другой стороны, при неизменных параметрах системы согласно (7.7) легко показать, что при поступлении на вход стационарного процесса второй момент на выходе будет зависеть только от разности времен $t_1 - t_2$:

$$\begin{aligned}
R_y(t_1, t_2) &= \int_0^{\infty} h(t') dt' \int_0^{\infty} h(t'') \langle x(t_1 - t')x(t_2 - t'') \rangle dt'' = \\
&= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} dt' dt'' h(t') h(t'') R_x(t_1 - t_2 - t' + t'') = R_y(t_1 - t_2).
\end{aligned} \tag{7.16}$$

Таким образом, постоянство среднего значения ($\bar{y}(t) = Const$) и зависимость второго момента только от разности времен $t_1 - t_2$ ($R_y(t_1, t_2) = R_y(t_1 - t_2)$) говорит о том, что **при подаче на вход линейной системы с постоянными параметрами стационарного процесса на выходе будет наблюдаться стационарный процесс.** Следует, однако, отметить, что данное утверждение справедливо только без учета в системе переходных процессов. Действительно, на основе выражения (7.9) легко показать, что учет момента включения сигнала на входе системы приводит к его нестационарности на выходе. Тем не менее, как будет показано в §9, нестационарность $y(t)$, как правило, наблюдается лишь в пределах времен, не превосходящих

характерного времени τ_0 релаксации системы ($0 \leq t < \tau_0$). При $t \gg \tau_0$ момент включения сигнала на входе системой “забывается” и выходной сигнал $y(t)$ превращается в стационарный.

7.3. Спектральный анализ линейных систем с постоянными параметрами

В дальнейшем мы не будем отдельно останавливаться на изучении переходных процессов, а будем рассматривать только физически реализуемые системы с постоянными параметрами, для которых связь между выходом и входом определяется формулой (7.7). Простота описания и исследования систем с постоянными параметрами обусловлена тем, что они очень просто реагируют на гармонические внешние воздействия. Так, положив в (7.7) $x(t) = e^{i\omega t}$, имеем

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(t') e^{i\omega(t-t')} dt' = K(i\omega) e^{i\omega t}, \quad (7.17)$$

где введена **передаточная функция** $K(i\omega)$:

$$K(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t') e^{-i\omega t'} dt', \quad h(t') \equiv 0 \text{ при } t' < 0. \quad (7.18)$$

Таким образом, при прохождении гармонического сигнала $x(t) = e^{i\omega t}$ через линейную систему с постоянными параметрами на ее выходе наблюдается также гармоническое колебание $y(t) = K(i\omega) e^{i\omega t}$, амплитуда и фаза которого определяются значением модуля и аргумента передаточной функции системы $K(i\omega)$: $K(i\omega) = |K(i\omega)| \exp\{i \arg K(i\omega)\}$. $|K(i\omega)|$ называют **амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ)** системы, а $\arg K(i\omega)$ – **фазочастотной характеристикой (ФЧХ)**.

Перейдем теперь от сигналов $x(t)$ и $y(t)$ к их преобразованиям Фурье:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} C_x(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (7.19)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} C_y(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (7.20)$$

Подставляя (7.19) в (7.7), получаем:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^{\infty} h(t') dt' \int_{-\infty}^{\infty} C_x(\omega) e^{i\omega(t-t')} d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} C_x(\omega) e^{i\omega t} d\omega \int_0^{\infty} h(t') e^{-i\omega t'} dt' = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} C_x(\omega) K(i\omega) d\omega. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Сравнивая (7.21) с (7.20), приходим к формуле

$$C_y(\omega) = K(i\omega) C_x(\omega), \quad (7.22)$$

из которой следует, что **передаточная функция $K(i\omega)$ линейной системы с постоянными параметрами может быть определена как отношение Фурье-преобразований сигнала на выходе и на входе системы:**

$$K(i\omega) = \frac{C_y(\omega)}{C_x(\omega)}. \quad (7.23)$$

Пусть на вход системы поступает стационарный случайный процесс $x(t)$ с известным энергетическим спектром $S_x(\omega)$. Ставится вопрос: какой процесс будет наблюдаться на выходе системы? Пользуясь (7.22), вычислим коррелятор Фурье-компонент выходного сигнала:

$$\begin{aligned} \langle C_y(\omega) C_y^*(\omega') \rangle &= K(i\omega) K^*(i\omega') \langle C_x(\omega) C_x^*(\omega') \rangle = \\ &= K(i\omega) K^*(i\omega') \delta(\omega - \omega') S_x(\omega) = \delta(\omega - \omega') S_y(\omega). \end{aligned} \quad (7.24)$$

Дельта-корреляция Фурье-компонент выходного процесса $y(t)$ свидетельствует о его стационарности, а коэффициент при $\delta(\omega - \omega')$ в (7.24) – есть его энергетический спектр (ср. с (6.8)):

$$S_y(\omega) = |K(i\omega)|^2 S_x(\omega). \quad (7.25)$$

Таким образом, **при воздействии стационарного случайного процесса на линейную систему с постоянными параметрами энергетический спектр выходного сигнала получается из спектра входного путем его умножения на квадрат амплитудно-частотной характеристики.** Следует еще раз напомнить, что данное утверждение справедливо только для физически реализуемых систем, в пренебрежении переходными процессами.

7.4. Примеры простейших линейных преобразований

В качестве простейших линейных преобразований подробно рассмотрим такие, как дифференцирование и интегрирование случайного процесса.

Дифференцирование случайного процесса. Пусть $y(t)$ – есть результат прохождения случайного процесса $x(t)$ через дифференцирующее устройство:

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}. \quad (7.26)$$

Проведя усреднение обеих частей равенства (7.26), получаем:

$$\langle y(t) \rangle = \left\langle \frac{dx(t)}{dt} \right\rangle = \frac{d}{dt} \langle x(t) \rangle. \quad (7.27)$$

Для стационарных процессов $\langle x(t) \rangle = Const$, так что $\langle y(t) \rangle = 0$. Определим автокорреляционную функцию $B_y(t_1, t_2)$ выходного процесса, предполагая для простоты, что $\langle x(t) \rangle = 0$:

$$B_y(t_1, t_2) \equiv \langle y(t_1)y(t_2) \rangle = \left\langle \frac{dx(t_1)}{dt_1} \frac{dx(t_2)}{dt_2} \right\rangle = \frac{d}{dt_1} \frac{d}{dt_2} \langle x(t_1)x(t_2) \rangle = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} B_x(t_1, t_2). \quad (7.28)$$

Учитывая, что для стационарного процесса $B_x(t_1, t_2) = B_x(t_1 - t_2)$, после введения новой переменной - $\tau = t_1 - t_2$, получаем $\frac{\partial}{\partial t_1} = \frac{d}{d\tau} \frac{\partial \tau}{\partial t_1} = \frac{d}{d\tau}$, $\frac{\partial}{\partial t_2} = \frac{d}{d\tau} \frac{\partial \tau}{\partial t_2} = -\frac{d}{d\tau}$. В результате (7.28) принимает вид

$$B_y(t_1, t_2) = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} B_x(t_1 - t_2) = -\frac{d^2}{d\tau^2} B_x(\tau) = B_y(\tau). \quad (7.29)$$

Найдем взаимную корреляционную функцию стационарного процесса и его производной:

$$\begin{aligned} B_{xy}(t_1, t_2) &= \langle x(t_1)y(t_2) \rangle = \frac{\partial}{\partial t_2} \langle x(t_1)x(t_2) \rangle = \\ &= \frac{\partial}{\partial t_2} B_x(t_1 - t_2) = -\frac{d}{d\tau} B_x(\tau) = B_{xy}(\tau). \end{aligned} \quad (7.30)$$

В свое время в §6 мы показали, что функция $B_x(\tau)$ – четная и может быть представлена в виде интеграла по положительным частотам (см. (6.22)):

$$B_x(\tau) = 2 \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega \tau d\omega.$$

Продифференцировав это выражение по τ , получаем спектральное представление взаимной корреляционной функции:

$$B_{xy}(\tau) = 2 \int_0^{\infty} \omega S_x(\omega) \sin \omega \tau d\omega. \quad (7.31)$$

Отсюда следует, что, во-первых, $B_{xy}(\tau)$ является нечетной функцией и, во-вторых, при $t_1 = t_2 = t$ ($\tau = 0$) взаимная корреляционная функция всегда равна 0, т.е. в совпадающие моменты времени $x(t)$ и $y(t)$ не коррелируют между собой:

$$\langle x(t)y(t) \rangle = B_{xy}(0) = -\left. \frac{d}{d\tau} B_x(\tau) \right|_{\tau=0} = 0. \quad (7.32)$$

Подставляя в (7.26) в качестве $x(t)$ гармоническое колебание $x(t) = e^{i\omega t}$, легко определить по (7.23) передаточную функцию $K(i\omega)$ дифференцирующего устройства:

$$K(i\omega) = i\omega. \quad (7.33)$$

Следовательно, энергетические спектры процесса $S_x(\omega)$ и его производной $S_y(\omega)$ связаны простым соотношением (см. (7.25)):

$$S_y(\omega) = \omega^2 S_x(\omega). \quad (7.34)$$

Эту формулу можно получить и непосредственно из (7.29), если перейти от корреляционных функций к их энергетическим спектрам по формуле Винера-Хинчина (6.9). С одной стороны, согласно формуле (7.29) имеем

$$B_y(\tau) = -\frac{d^2}{d\tau^2} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega.$$

С другой же, непосредственное представление $B_y(\tau)$ дает

$$B_y(\tau) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega.$$

Сравнивая между собой правые части этих формул, приходим к (7.34).

Интегрирование случайного процесса $x(t)$ приводит к случайной функции $y(t)$:

$$y(t) = \int_0^t x(t') dt', \quad (7.35)$$

нижний предел в этой формуле несущественен, им определяется только постоянная (не зависящая от времени) составляющая. Так как $dy/dt = x(t)$, то, производя переобозначения $y \leftrightarrow x$ в приведенных выше формулах, получаем:

$$K(i\omega) = \frac{1}{i\omega}; \quad S_y(\omega) = \frac{S_x(\omega)}{\omega^2}. \quad (7.36)$$

Отметим, что при интегрировании энергетический спектр $S_y(\omega)$ обедняется в области высоких частот по сравнению с $S_x(\omega)$, в то время как при дифференцировании, наоборот, подавляются низкочастотные составляющие в спектре за счет множителя ω^2 в (7.34).

7.5. Преобразование случайных процессов в радиотехнических цепях

Преобразование случайных процессов в электрических цепях описывается, как правило, линейными интегро-дифференциальными уравнениями, очевидным образом обобщающими закон Ома для постоянных токов. Для анализа стационарных или нестационарных режимов работы линейных радиотехнических систем часто используют аппарат дифференциальных уравнений. Так, например, для непрерывной (аналоговой) системы достаточно общим является линейное дифференциальное уравнение n -го порядка:

$$\begin{aligned} a_n(t) \frac{d^n}{dt^n} y(t) + \dots + a_1(t) \frac{d}{dt} y(t) + a_0(t) y(t) = \\ = b_m(t) \frac{d^m}{dt^m} x(t) + \dots + b_1(t) \frac{d}{dt} x(t) + b_0(t) x(t), \end{aligned} \quad (7.37)$$

где $a_k(t)$ ($k = 0, 1, \dots, n$) и $b_i(t)$ ($i = 0, 1, \dots, m$) - известные, непрерывные на некотором временном интервале, функции. Для данного уравнения должны быть указаны начальные условия $y(0)$, $dy(0)/dt$, ... $dy^{n-1}(0)/dt^{n-1}$.

Вводя оператор дифференцирования $p = d/dt$ и полиномы – операторы

$$A_n(p, t) = \sum_{k=0}^n a_k(t) p^k, \quad (7.38)$$

$$B_m(p, t) = \sum_{i=0}^m b_i(t) p^i,$$

степени n и m соответственно, исходное уравнение (7.37) можно записать в следующей компактной операторной форме:

$$A_n(p, t) y(t) = B_m(p, t) x(t). \quad (7.39)$$

Из (7.39) формально следует равенство, определяющее сигнал на выходе системы в явном виде

$$y(t) = \frac{B_m(p, t)}{A_n(p, t)} x(t) = \hat{L}x(t) \quad (7.40)$$

Введенная здесь величина

$$\hat{L} = \frac{B_m(p, t)}{A_n(p, t)} \quad (7.41)$$

называется линейным дифференциальным оператором системы. Для доказательства его линейности рассмотрим выполнение условия (7.2).

Пусть на вход системы, описываемой уравнением (7.39), поступают сигналы $x_1(t)$ или $x_2(t)$. Обозначим через $y_{1,2}(t)$ соответствующие отклики системы на каждый из сигналов в отдельности:

$$A_n(p, t) y_1(t) = B_m(p, t) x_1(t), \quad (7.42)$$

$$A_n(p, t) y_2(t) = B_m(p, t) x_2(t).$$

Покажем теперь, что отклик системы на входной сигнал вида

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t), \quad (7.43)$$

где $c_{1,2}$ - произвольные константы, равен

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t). \quad (7.44)$$

Действительно, с одной стороны, для входного сигнала (7.43) правая часть уравнения (7.39) представляется в виде суммы двух составляющих:

$$B_m(p, t) x(t) = c_1 B_m(p, t) x_1(t) + c_2 B_m(p, t) x_2(t). \quad (7.45)$$

С другой стороны, дифференцируя k раз равенство (7.44) и домножая правые и левые части на коэффициенты $a_k(t)$, получаем

$$a_k(t) \frac{d^k y(t)}{dt^k} = c_1 a_k(t) \frac{d^k y_1(t)}{dt^k} + c_2 a_k(t) \frac{d^k y_2(t)}{dt^k}. \quad (7.46)$$

Просуммировав (7.46) по всем значениям $k = 0, 1, 2, \dots, n$, приходим к следующему соотношению:

$$A_n(p, t) y(t) = c_1 A_n(p, t) y_1(t) + c_2 A_n(p, t) y_2(t). \quad (7.47)$$

Учитывая теперь определения (7.42) и (7.43), получаем

$$A_n(p, t) y(t) = c_1 B_m(p, t) x_1(t) + c_2 B_m(p, t) x_2(t) = B_m(p, t) x(t). \quad (7.48)$$

Таким образом, для системы, описываемой уравнением (7.39), выполняется принцип суперпозиции

$$A_n(p, t) [c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)] = B_m(p, t) [c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)]$$

и, следовательно, система и соответствующий дифференциальный оператор \hat{L} линейны.

Если оператор \hat{L} построен, то математические ожидания и корреляционные функции процессов на выходе и входе линейной системы связаны между собой следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
 m_y(t) &= \langle y(t) \rangle = \hat{L}(p,t) \langle x(t) \rangle = \hat{L}(p,t) m_x(t), \\
 B_y(t_1, t_2) &= \langle y(t_1) y(t_2) \rangle = \hat{L}(p, t_1) \hat{L}(p, t_2) \langle x(t_1) x(t_2) \rangle = \\
 &= \hat{L}(p, t_1) \hat{L}(p, t_2) B_x(t_1, t_2).
 \end{aligned}
 \tag{7.49}$$

В качестве *примера* рассмотрим преобразование случайного напряжения $x(t)$ в некоторых простейших радиотехнических цепочках.

1. Проанализируем вначале работу *интегрирующей цепочки*, схема которой приведена на рис. 7.2.

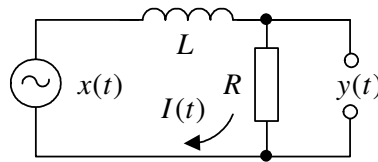


Рис. 7.2.

Обозначим через $I(t)$ ток, текущий в цепи под действием случайной ЭДС $x(t)$. Легко видеть, что интересующий нас процесс $y(t)$ на выходе системы пропорционален току: $y(t) = RI(t)$, для определения которого имеем закон Кирхгофа

$$L \frac{dI}{dt} + RI = x(t).
 \tag{7.50}$$

Переходя в (7.50) к Фурье-компонентам и введя обозначение $\tau_0 = L/R$, получаем

$$i\omega L C_I(\omega) + R C_I(\omega) = (i\omega\tau_0 + 1) C_y(\omega) = C_x(\omega),
 \tag{7.51}$$

откуда следует:

$$C_y(\omega) = \frac{1}{i\omega\tau_0 + 1} C_x(\omega). \quad (7.52)$$

Таким образом, передаточная функция рассматриваемой цепи имеет вид

$$K(i\omega) = \frac{1}{i\omega\tau_0 + 1}, \quad (7.53)$$

и, следовательно, энергетические спектры входного и выходного процессов связаны между собой соотношением

$$S_y(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2\tau_0^2} S_x(\omega). \quad (7.54)$$

На достаточно высоких частотах, когда $\omega \gg 1/\tau_0$, из (7.54) получаем

$$S_y(\omega) \approx \frac{1}{\omega^2\tau_0^2} S_x(\omega). \quad (7.55)$$

Сравнивая (7.55) с (7.36), видим, что действительно при $\omega \gg 1/\tau_0$ преобразование сигнала в цепи, изображенной на рис. 7.2, происходит так же, как и при его интегрировании.

Если в качестве $x(t)$ выступает белый шум – случайный процесс с постоянной спектральной плотностью

$$S_x(\omega) = \frac{N}{2}, \quad -\infty < \omega < \infty,$$

то согласно (7.54) на выходе рассматриваемой цепи энергетический спектр равен

$$S_y(\omega) = \frac{N}{2(1 + \omega^2\tau_0^2)}. \quad (7.56)$$

Схематически поведение $S_y(\omega)$ изображено на рис. 7.3.

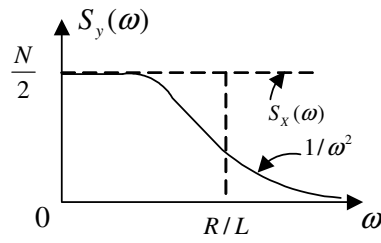


Рис. 7.3.

Видно, что при прохождении белого шума через интегрирующую цепь спектр сигнала обрезается на частотах $|\omega| > 1/\tau_0$. Другими словами, происходит фильтрация высоких частот, а низкие частоты $|\omega| < 1/\tau_0$, как видно из (7.56) и рис. 7.3, проходят через цепь без искажений:

$$S_y(\omega) \approx \frac{N}{2} = S_x(\omega) \text{ при } |\omega| \ll 1/\tau_0.$$

В §6 мы видели, что белый шум – это δ -коррелированный процесс с автокорреляционной функцией вида

$$B_x(\tau) = N\pi\delta(\tau). \quad (7.57)$$

Воспользовавшись формулой Винера-Хинчина (6.9), найдем по (7.56) вид автокорреляционной функции выходного процесса $y(t)$:

$$B_y(\tau) = \frac{N}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + \omega^2 \tau_0^2} e^{i\omega\tau} d\omega.$$

Данный интеграл можно рассматривать как часть контурного интеграла от комплексной функции $f(z) = e^{i\tau z} / (1 + \tau_0^2 z^2)$, вычисляемого на комплексной плоскости $z = \omega + i\theta$ вдоль замкнутого контура C , состоящего из интервала $(-R, R)$ действительной оси и дуги C_R окружности $|z| = R$ в верхней полуплоскости, если $\tau > 0$ или в нижней, если $\tau < 0$:

$$\int_C f(z) dz = \int_{-R}^R f(\omega) d\omega + \int_{C_R} f(z) dz.$$

Затем, согласно лемме Жордана устремим радиус окружности к бесконечности ($R \rightarrow \infty$). Интеграл по C_R при этом обращается в ноль, а оставшийся интеграл по действительной оси равен вычету в точке $z = 1/i\tau_0$ для $\tau > 0$ или $z = -1/i\tau_0$ для $\tau < 0$. В результате получим

$$B_y(\tau) = \frac{N}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + \omega^2 \tau_0^2} e^{i\omega\tau} d\omega = \frac{\pi N}{2\tau_0} e^{-|\tau|/\tau_0}. \quad (7.58)$$

Из (7.58) видно, что белый шум $x(t)$ после прохождения интегрирующей цепочки превращается в случайный процесс с конечным временем корреляции $\tau_0 \approx L/R$, которое совпадает с постоянной времени цепи. Этот результат можно было предвидеть заранее, исходя из того, что согласно рис. 7.3 спектр $S_y(\omega)$ имеет ширину $\Delta\omega \approx 1/\tau_0 = R/L$, а в силу соотношения неопределенностей $\Delta\omega\tau_0 \approx 1$.

Дисперсия процесса $x(t)$ на выходе цепи оказывается конечной величиной:

$$\sigma_y^2 = B_y(0) = \frac{\pi N}{2\tau_0}, \quad (7.59)$$

в то время как исходный процесс $x(t)$, являясь белым шумом, обладает бесконечной дисперсией.

Рассмотрим теперь вопрос о преобразовании сигналов простейшей электрической цепью, показанной на рис. 7.2, в другой постановке, соответствующей решению **обратной задачи**. Пусть нам известны параметры цепи (R и L) и автокорреляционная функция $B_y(\tau)$ процесса $y(t)$ на выходе цепи, а входной процесс $x(t)$ является неизвестным. Как найти его автокорреляционную функцию - $B_x(\tau)$? Можно, конечно, воспользоваться формулой (7.54) и выразить неизвестный спектр $S_x(\omega)$ через $S_y(\omega)$:

$$S_x(\omega) = (1 + \omega^2 \tau_0^2) S_y(\omega), \quad (7.60)$$

а затем перейти от энергетических спектров к корреляционным функциям:

$$B_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} (1 + \omega^2 \tau_0^2) S_y(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = B_y(\tau) - \tau_0^2 \frac{d^2}{d\tau^2} B_y(\tau). \quad (7.61)$$

Однако этот же результат можно получить и более простым путем – непосредственно из уравнения (7.50), которое, с учетом того, что $I(t) = y(t)/R$ и $\tau_0 = L/R$, перепишем в виде

$$\tau_0 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t). \quad (7.62)$$

Составим автокорреляционную функцию $B_x(\tau)$:

$$\begin{aligned} B_x(\tau) &= \langle x(t)x(t+\tau) \rangle = \left\langle \left[\tau_0 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) \right] \left[\tau_0 \frac{dy(t+\tau)}{dt} + y(t+\tau) \right] \right\rangle = \\ &= \tau_0^2 \left\langle \frac{dy(t)}{dt} \frac{dy(t+\tau)}{dt} \right\rangle + \tau_0 \left\langle \frac{dy(t)}{dt} y(t+\tau) \right\rangle + \tau_0 \left\langle y(t) \frac{d}{dt} y(t+\tau) \right\rangle + \\ &+ \langle y(t)y(t+\tau) \rangle = -\tau_0^2 \frac{d^2}{d\tau^2} B_y(\tau) + B_y(\tau). \end{aligned} \quad (7.63)$$

При усреднении мы воспользовались формулами (7.29), (7.30) и учли, что $\langle y'y'_\tau \rangle = -\langle yy'_\tau \rangle$.

2. Рассмотрим еще один простой пример, связанный с прохождением сигнала $x(t)$ через **дифференцирующую RC-цепь** (рис. 7.4). Закон Кирхгофа для этой цепи имеет вид:

$$RI(t) + \frac{1}{C} \int I(t') dt' = x(t). \quad (7.64)$$

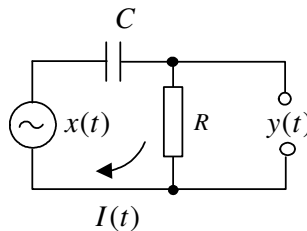


Рис. 7.4.

Введя обозначения $y(t) = RI(t)$ и $\tau_0 = RC$ (постоянная времени цепи), перепишем (7.64) в следующем виде:

$$y(t) + \frac{1}{\tau_0} \int_0^t y(t') dt' = x(t). \quad (7.65)$$

После перехода к Фурье-компонентам имеем

$$\left(1 + \frac{1}{i\omega\tau_0}\right) C_y(\omega) = C_x(\omega), \quad (7.66)$$

откуда находим передаточную функцию

$$K(i\omega) = \left(1 + \frac{1}{i\omega\tau_0}\right)^{-1} = \frac{i\omega\tau_0}{1 + i\omega\tau_0}. \quad (7.67)$$

Видно, что на частотах, когда $\omega\tau_0 \ll 1$, передаточная функция с точностью до постоянного множителя совпадает с передаточной функцией дифференцирующего устройства: $K(i\omega) \approx i\omega\tau_0$.

Согласно формуле (7.25) энергетический спектр на выходе системы равен

$$S_y(\omega) = \frac{\omega^2 \tau_0^2}{1 + \omega^2 \tau_0^2} S_x(\omega). \quad (7.68)$$

Если на вход подается белый шум ($S_x(\omega) = N/2$), то на выходе RC цепочки получаем

$$S_y(\omega) = \frac{N}{2} \frac{\omega^2 \tau_0^2}{1 + \omega^2 \tau_0^2}. \quad (7.69)$$

Схематический график $S_y(\omega)$ приведен на рис. 7.5.

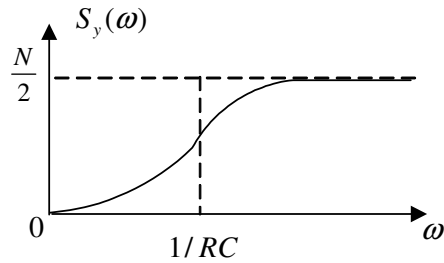


Рис. 7.5.

Видно, что RC- цепь является фильтром низких частот при $|\omega| < 1/\tau_0$, а более высокие частоты $|\omega| \gg 1/\tau_0$ проходят через цепь без искажений.

Аналогично (7.58), воспользовавшись формулой Винера-Хинчина (6.9), по (7.69) найдем автокорреляционную функцию выходного процесса $y(t)$:

$$B_y(\tau) = \frac{N}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2 \tau_0^2}{1 + \omega^2 \tau_0^2} e^{i\omega\tau} d\omega = \frac{N}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2 \tau_0^2 + 1 - 1}{1 + \omega^2 \tau_0^2} e^{i\omega\tau} d\omega = N\pi\delta(\tau) - \frac{\pi N}{2\tau_0} e^{-|\tau|/\tau_0}. \quad (7.70)$$

При выводе этой формулы мы воспользовались определением δ - функции и ранее полученным результатом (7.58).

3. В заключение, рассмотрим **одиночный колебательный контур**, образованный последовательным соединением индуктивности L , сопротивления R и емкости C (см. рис. 7.6).

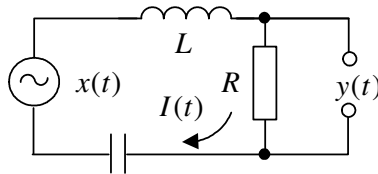


Рис. 7.6.

Для определения процесса $y(t) = RI(t)$ на выходе системы снова запишем закон Кирхгофа:

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} \int I dt = x(t). \quad (7.71)$$

Переходя к Фурье-компонентам, получим

$$i\omega LC_I(\omega) + RC_I(\omega) + \frac{1}{i\omega C} C_I(\omega) = \left[1 + i\omega\tau_0 \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) \right] C_y(\omega) = C_x(\omega). \quad (7.72)$$

Здесь введены следующие обозначения: $C_y(\omega) = RC_I(\omega)$, $\tau_0 = L/R$ - постоянная времени рассматриваемой цепочки, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ - резонансная частота контура. Из (7.72) следует

$$K(i\omega) = \frac{1}{1 + i\omega\tau_0 \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right)}, \quad (7.73)$$

$$|K(i\omega)|^2 = \frac{\omega^2}{\omega^2 + \tau_0^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2}. \quad (7.74)$$

Следовательно, энергетические спектры на входе и выходе рассматриваемой *LRC* цепочки связаны между собой соотношением

$$S_y(\omega) = \frac{\omega^2}{\omega^2 + \tau_0^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2} S_x(\omega). \quad (7.75)$$

Если на вход системы подается белый шум ($S_x(\omega) = N/2$), то на выходе получаем

$$S_y(\omega) = \frac{N}{2} \frac{\omega^2}{\omega^2 + \tau_0^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2}. \quad (7.76)$$

На рисунках 7.7 и 7.8 представлены графики зависимости $|K(i\omega)|^2$ и $S_y(\omega)$ для значений параметров $\omega_0\tau_0 \gg 1$. Видно, что кривая $|K(i\omega)|^2$ имеет резкий максимум на резонансной частоте контура $\omega = \omega_0$ и характерную ширину $\Delta\omega_f$, которую

приближенно можно оценить как $\Delta\omega_f \approx 1/\tau_0 \ll \omega_0$ (рис.7.7). Конечность ширины спектра колебательного контура приводит к тому, что из всего непрерывного спектра белого шума на выходе остается лишь узкая полоса частот, определяемая полосой пропускания фильтра (рис. 7.8).

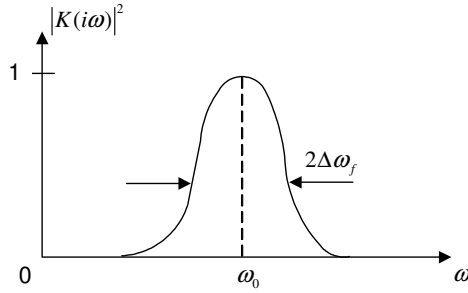


Рис. 7.7.

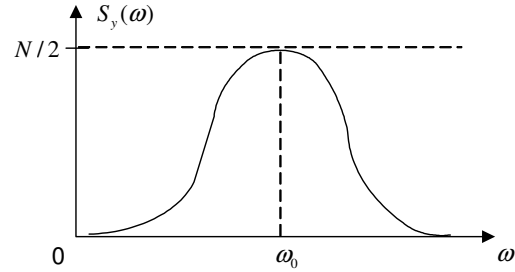


Рис. 7.8.

Согласно формуле Винера-Хинчина (6.9) по заданному спектру (7.76) вычислим теперь автокорреляционную функцию выходного процесса $y(t)$:

$$B_y(\tau) = \frac{N}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2}{\omega^2 + \tau_0^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2} e^{i\omega\tau} d\omega = N \int_0^{\infty} \frac{\omega^2 \cos \omega\tau}{\omega^2 + \tau_0^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2} d\omega. \quad (7.77)$$

При $\omega_0\tau_0 \gg 1$ характерная ширина $\Delta\omega_f$ кривой на рис. 7.7 намного меньше резонансной частоты ω_0 : $\Delta\omega_f \ll \omega_0$. В этом случае мы имеем дело с узкополосным процессом, для которого вычисление (7.77) можно произвести, выполнив некоторые упрощения. Так, согласно определению $\omega = \omega_0 + \nu$ перейдем к интегрированию по медленной частоте ν . При этом упростим подынтегральное выражение

$$\frac{\omega^2}{\omega^2 + \tau_0^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2} \approx \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 + 4\omega_0^2\tau_0^2\nu^2} = \frac{1}{1 + 4\tau_0^2\nu^2} \quad (7.78)$$

и произведем интегрирование по ν в бесконечных пределах. В результате получим

$$\begin{aligned}
B_y(\tau) &\approx N \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos[\tau(\omega_0 + \nu)]}{1 + 4\tau_0^2 \nu^2} d\nu = N \cos \omega_0 \tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \nu \tau}{1 + 4\tau_0^2 \nu^2} d\nu = \\
&= N \cos \omega_0 \tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\nu\tau}}{1 + 4\tau_0^2 \nu^2} d\nu = \frac{\pi N}{2\tau_0} \cos \omega_0 \tau e^{-|\tau|/2\tau_0}.
\end{aligned} \quad (7.79)$$

При вычислении интеграла мы воспользовались полученным ранее результатом (7.58).

ЗАДАЧИ

1. На вход идеальной дифференцирующей цепи воздействует стационарный гауссовский случайный процесс $x(t)$ с нулевым математическим ожиданием $m_x = 0$ и корреляционной функцией

$$B_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|} (1 + \alpha|\tau|).$$

Определить корреляционную функцию процесса $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ на выходе.

Решение. Согласно (7.29) для рассматриваемого случая находим

$$B_y(\tau) = -\frac{d^2}{d\tau^2} B_x(\tau).$$

Автокорреляционные функции $B_x(\tau)$ и $B_y(\tau)$ четные, поэтому достаточно рассмотреть лишь значения $\tau \geq 0$, а затем окончательный результат четным образом продолжить в область $\tau < 0$. Так, для $\tau \geq 0$ имеем

$$\begin{aligned}
B_x(\tau) &= \sigma_x^2 e^{-\alpha\tau} (1 + \alpha\tau), \\
\frac{dB_x(\tau)}{d\tau} &= -\alpha^2 \sigma_x^2 \tau e^{-\alpha\tau}, \\
B_y(\tau) &= -\frac{d}{d\tau} \left[\frac{dB_x(\tau)}{d\tau} \right] = \alpha^2 \sigma_x^2 \frac{d}{d\tau} (\tau e^{-\alpha\tau}) = \\
&= \alpha^2 \sigma_x^2 e^{-\alpha\tau} (1 - \alpha\tau).
\end{aligned}$$

Продолжая теперь полученное выражение для $B_y(\tau)$ в область отрицательных значений τ , окончательно получим

$$B_y(\tau) = \alpha^2 \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|} (1 - \alpha|\tau|).$$

2. Автокорреляционная функция стационарного процесса $x(t)$ с нулевым средним имеет вид $B_x(\tau) = e^{-\alpha^2 \tau^2}$. Найти автокорреляционную функцию процесса $y(t)$ на выходе системы, преобразующей сигнал по закону

$$y(t) = x(t) + \frac{dx(t)}{dt}. \quad (1)$$

Решение. Один из возможных путей решения задач такого типа сводится к алгоритму $B_x(\tau) \rightarrow S_x(\omega) \rightarrow S_y(\omega) \rightarrow B_y(\tau)$. Реализация этого пути решения сводится к следующему. Согласно (6.10) находим вначале энергетический спектр входного сигнала

$$\begin{aligned} S_x(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 \tau^2 - i\omega\tau} d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\alpha\tau + \frac{i\omega}{2\alpha}\right)^2} d\tau = \frac{e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha^2}}}{2\alpha\sqrt{\pi}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Затем, переходя в уравнении (1) к Фурье-компонентам

$$C_y(\omega) = C_x(\omega)(1 + i\omega), \quad (3)$$

находим передаточную функцию линейной системы: $K(i\omega) = 1 + i\omega$. Отсюда согласно (7.25) энергетический спектр на выходе системы определяется как

$$S_y(\omega) = |K(i\omega)|^2 S_x(\omega) = \frac{(1 + \omega^2)}{2\alpha\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha^2}}. \quad (4)$$

По известному спектру $S_y(\omega)$ с помощью формулы Винера-Хинчина находим выходную автокорреляционную функцию:

$$\begin{aligned}
 B_y(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + \omega^2) e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha^2}} e^{i\omega\tau} d\omega = \\
 &= \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha^2} + i\omega\tau} d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha^2} + i\omega\tau} d\omega \right] = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi}} (I_1 + I_2). \tag{5}
 \end{aligned}$$

Первый интеграл сводится к интегралу Пуассона

$$I_1 = 2\alpha\sqrt{\pi} e^{-\alpha^2\tau^2}.$$

При вычислении второго интеграла необходимо перейти к дифференцированию по параметру τ :

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha^2} + i\omega\tau} d\omega = -\frac{d^2}{d\tau^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha^2} + i\omega\tau} d\omega = -\frac{d^2}{d\tau^2} I_1 = \\
 &= -2\alpha\sqrt{\pi} \frac{d^2}{d\tau^2} e^{-\alpha^2\tau^2} = -2\alpha\sqrt{\pi} \frac{d}{d\tau} \left[(-2\alpha^2\tau) e^{-\alpha^2\tau^2} \right] = \\
 &= 4\alpha^3\sqrt{\pi} \left[e^{-\alpha^2\tau^2} + \tau(-2\alpha^2\tau) e^{-\alpha^2\tau^2} \right] = 4\alpha^3\sqrt{\pi} e^{-\alpha^2\tau^2} (1 - 2\alpha^2\tau^2).
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 B_y(\tau) &= \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi}} \left[2\alpha\sqrt{\pi} e^{-\alpha^2\tau^2} + 4\alpha^3\sqrt{\pi} e^{-\alpha^2\tau^2} (1 - 2\alpha^2\tau^2) \right] = \\
 &= e^{-\alpha^2\tau^2} \left[1 + 2\alpha^2(1 - 2\alpha^2\tau^2) \right]. \tag{6}
 \end{aligned}$$

Возможен и другой, более простой путь решения. Входной и выходной сигналы в линейной системе связаны с помощью линейного оператора \hat{L} :

$$y(t) = \hat{L}x(t), \tag{7}$$

где согласно (1) $\hat{L} = 1 + \frac{d}{dt}$. Для заданного оператора связь между математическими ожиданиями и автокорреляционными функциями на входе и выходе системы определяется согласно формулам (7.49):

$$m_y(t) = \hat{L}m_x(t), \quad (8)$$

$$B_y(t_1, t_2) = \hat{L}_1 \hat{L}_2 B_x(t_1, t_2). \quad (9)$$

Здесь $\hat{L}_{1,2} = 1 + \frac{\partial}{\partial t_{1,2}}$. Учитывая в (8) и (9) стационарность входного процесса

$(m_x(t) = \text{Const} = 0 \text{ и } B_x(t_1, t_2) = B_x(t_2 - t_1))$, получаем $m_y(t) \equiv 0$ и

$$B_y(t_2 - t_1) = \left(1 + \frac{\partial}{\partial t_1}\right) \left(1 + \frac{\partial}{\partial t_2}\right) B_x(t_2 - t_1). \quad (10)$$

Переходя в данном выражении к новой переменной $\tau = t_2 - t_1$, находим

$$\frac{\partial B_x}{\partial t_1} = \frac{dB_x}{d\tau} \frac{\partial \tau}{\partial t_1} = -\frac{dB_x}{d\tau}; \quad \frac{\partial B_x}{\partial t_2} = \frac{dB_x}{d\tau} \frac{\partial \tau}{\partial t_2} = \frac{dB_x}{d\tau}. \text{ В результате (10) принимает следующий}$$

вид:

$$B_y(\tau) = \left(1 - \frac{d}{d\tau}\right) \left(1 + \frac{d}{d\tau}\right) B_x(\tau) = \left(1 - \frac{d^2}{d\tau^2}\right) B_x(\tau). \quad (11)$$

Подставляя в (11) заданный вид $B_x(\tau)$, приходим к выражению

$$\begin{aligned} B_y(\tau) &= e^{-\alpha^2 \tau^2} - \frac{d}{d\tau} \left[e^{-\alpha^2 \tau^2} (-\alpha^2) \cdot 2\tau \right] = \\ &= e^{-\alpha^2 \tau^2} - e^{-\alpha^2 \tau^2} (-\alpha^2) \cdot 2\tau (-\alpha^2) \cdot 2\tau - e^{-\alpha^2 \tau^2} (-\alpha^2) \cdot 2 = \\ &= e^{-\alpha^2 \tau^2} \left[1 + 2\alpha^2 (1 - 2\alpha^2 \tau^2) \right], \end{aligned}$$

которое совпадает с найденным ранее (6) другим способом.

3. На вход дифференцирующей цепочки (см. рис. 7.9) воздействует случайное напряжение $x(t)$, представляющее собой ограниченный по частоте белый шум, спектральная плотность которого

$$S_x^{(+)}(\omega) = \begin{cases} N, & 0 \leq \omega \leq \omega_1, \\ 0, & \omega > \omega_1. \end{cases} \quad (1)$$

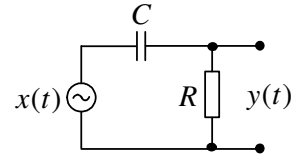


Рис. 7.9.

Найти дисперсию σ_y^2 сигнала на выходе цепочки.

Решение. Для определения комплексной передаточной функции рассматриваемой цепочки запишем закон Кирхгофа

$$C_x(\omega) = C_I(\omega) \left(R + \frac{1}{i\omega C} \right) = \frac{1 + i\omega CR}{i\omega C} C_I(\omega). \quad (2)$$

Введя в (2) обозначение $C_y(\omega) = RC_I(\omega)$, получим

$$K(i\omega) = \frac{C_y(\omega)}{C_x(\omega)} = \frac{i\omega CR}{1 + i\omega CR}; \quad |K(i\omega)|^2 = \frac{\omega^2 C^2 R^2}{1 + \omega^2 C^2 R^2}. \quad (3)$$

Теперь с учетом (7.25) для спектральной плотности на выходе системы имеем выражение

$$S_y^{(+)}(\omega) = |K(i\omega)|^2 S_x^{(+)}(\omega) = \begin{cases} N \frac{\omega^2 C^2 R^2}{1 + \omega^2 C^2 R^2}, & 0 \leq \omega \leq \omega_1, \\ 0, & \omega > \omega_1. \end{cases} \quad (4)$$

Воспользовавшись (6.22), получаем дисперсию сигнала на выходе

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= B_y(0) = \int_0^{\infty} S_y^{(+)}(\omega) d\omega = N \int_0^{\omega_1} \frac{\omega^2 C^2 R^2}{1 + \omega^2 C^2 R^2} d\omega = \\ &= N \left(\int_0^{\omega_1} d\omega - \int_0^{\omega_1} \frac{d\omega}{1 + \omega^2 C^2 R^2} \right) = N \left(\omega_1 - \frac{1}{RC} \arctg \omega_1 RC \right). \end{aligned}$$

4. Стационарный случайный процесс $x(t)$ с корреляционной функцией $B_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}$ воздействует на фильтр нижних частот, амплитудно-частотная характеристика которого приведена на рис.7.10. Найти дисперсию σ_y^2 выходного напряжения $y(t)$.

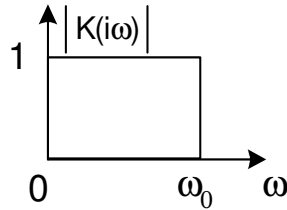


Рис. 7.10.

Решение. Спектральную плотность на входе фильтра согласно (6.10) запишем как

$$\begin{aligned}
 S_x(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{\sigma_x^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau| - i\omega\tau} d\tau = \frac{\sigma_x^2}{2\pi} \left[\int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau - i\omega\tau} d\tau - \int_0^{\infty} e^{\alpha\tau - i\omega\tau} d\tau \right] = \\
 &= \frac{\sigma_x^2}{2\pi} \left[\int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau - i\omega\tau} d\tau + \int_{-\infty}^0 e^{-\alpha\tau + i\omega\tau} d\tau \right] = \frac{\sigma_x^2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} \cos \omega\tau d\tau = \frac{\sigma_x^2}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}.
 \end{aligned} \quad (1)$$

Последний интеграл вычислен с использованием преобразования Лапласа. В рассматриваемом случае оригиналу $f(\tau) = \cos \omega\tau$ соответствует изображение $F(\alpha) = \alpha / (\alpha^2 + \omega^2)$.

По заданной передаточной функции системы (рис. 7.10) и найденному энергетическому спектру входного сигнала (1) согласно формуле (7.25) определяем спектральную плотность выходного сигнала:

$$S_y^{(+)}(\omega) = |K(i\omega)|^2 S_x^{(+)} = \begin{cases} 2 \frac{\sigma_x^2}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}, & 0 \leq \omega \leq \omega_0, \\ 0, & \omega > \omega_0. \end{cases} \quad (2)$$

Дисперсия напряжения на выходе фильтра согласно (6.22) равна

$$\sigma_y^2 = B_y(0) = \int_0^{\infty} S_y^{(+)}(\omega) d\omega = 2 \int_0^{\omega_0} \frac{\sigma_x^2}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega = \frac{2\sigma_x^2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\omega_0}{\alpha}.$$

Аналогично решаются все задачи, связанные с воздействием на линейные системы стационарных процессов и, в частности, белого шума (см., например, следующую, более сложную задачу).

5. На вход цепи, изображенной на рис.7.11, воздействует случайное напряжение $x(t)$, представляющее собой белый шум со спектральной плотностью $S_x(\omega) = N/2$, $-\infty < \omega < \infty$. Найти спектральную плотность, корреляционную функцию и дисперсию выходного напряжения $y(t)$.

Решение. Из закона Кирхгофа, записанного для Фурье-компонент рассматриваемой цепи, имеем

$$\begin{aligned} C_x(\omega) &= (R + i\omega L)C_I(\omega), \\ R &= R_1 + R_2. \end{aligned} \quad (1)$$

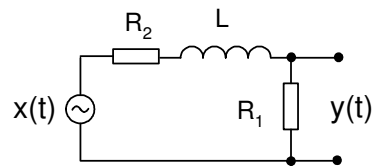


Рис. 7.11.

После введения обозначения $C_y(\omega) = R_1 C_I(\omega)$ определим комплексную передаточную функцию линейной системы

$$K(i\omega) = \frac{R_1}{R + i\omega L}. \quad (2)$$

Из (7.25) и данного выражения следует соотношение для искомой спектральной плотности на выходе системы

$$S_y(\omega) = |K(i\omega)|^2 S_x(\omega) = \frac{R_1^2 N}{2(R^2 + L^2 \omega^2)}, \quad -\infty < \omega < \infty. \quad (3)$$

Согласно формуле Винера-Хинчина (6.10) находим корреляционную функцию выходного сигнала

$$B_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = R_1^2 N \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega\tau}}{R^2 + L^2 \omega^2} d\omega. \quad (4)$$

Интеграл в (4) возьмем с помощью вычетов. Перейдем в комплексную плоскость $z = \omega + i\theta$ и рассмотрим вспомогательный контурный интеграл

$$B_y(\tau) = \frac{R_1^2 N}{L^2} \oint_C \frac{e^{iz\tau}}{z^2 + a^2} dz = \frac{R_1^2 N}{L^2} I(a, \tau). \quad (5)$$

Здесь $a = \frac{R_1 + R_2}{L} > 0$, а $I(a, \tau)$ - интеграл по замкнутому контуру C , который для $\tau > 0$

расположен полностью в верхней полуплоскости.

Особые точки подынтегральной функции: $z_{1,2} = \pm ia$

– простые полюсы, $z_3 = \infty$ – существенно особая точка.

Так как подынтегральная функция

$\frac{e^{iz\tau}}{z^2 + a^2}$ при $\tau > 0$ аналитична в верхней

полуплоскости, то контур интегрирования

C можно произвольно деформировать.

Выберем его так, как показано на рис. 7.12: часть контура представляет собой отрезок действительной оси ($-\rho < \omega < \rho$), а оставшаяся – полуокружность C_ρ радиуса ρ . После этого устремим $\rho \rightarrow \infty$. При этом согласно лемме Жордана интеграл по C_ρ обращается в 0 (из-за экспоненциального убывания подынтегральной функции $\square e^{-\theta\tau}$), а оставшийся интеграл по действительной оси равен сумме вычетов, попавших внутрь замкнутого контура C :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega\tau}}{\omega^2 + a^2} d\omega = 2\pi i \left[\operatorname{res}_{z=ia} \left(\frac{e^{iz\tau}}{z^2 + a^2} \right) + \operatorname{res}_{z=\infty} \left(\frac{e^{iz\tau}}{z^2 + a^2} \right) \right] \quad (6)$$

Вычет в точке $z = ia$ легко вычисляется как

$$2\pi i \operatorname{res}_{z=ia} \frac{e^{iz\tau}}{(z - z_1)(z - z_2)} = 2\pi i \frac{e^{iz_1\tau}}{z_1 - z_2} = 2\pi i \frac{e^{-\tau a}}{2ia} = \frac{\pi}{a} e^{-\tau a}. \quad (7)$$

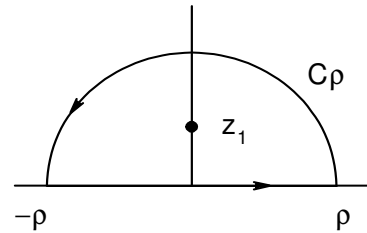


Рис. 7.12.

Вычет же в точке $z \rightarrow \infty$ равен нулю, так как $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z^2 + a^2} = 0$. Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega\tau}}{\omega^2 + a^2} d\omega = \frac{\pi}{a} e^{-a\tau}. \quad (8)$$

С учетом (8) после продолжения четным образом полученного результата в область $\tau < 0$ выражение (5) может быть записано в окончательном виде:

$$B_y(\tau) = \frac{R_1^2 N \pi}{(R_1 + R_2)L} e^{-\frac{R_1}{L}|\tau|}. \quad (9)$$

Выражение для дисперсии получим из (9), положив $\tau = 0$:

$$\sigma_y^2 = \frac{R_1^2 N \pi}{(R_1 + R_2)L}.$$

6. На вход пропорционально-интегрирующего фильтра (рис. 7.13) поступает стационарное случайное напряжение $x(t)$ с нулевым средним значением и корреляционной функцией $B_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}$.

Определить спектральную плотность $S_y(\omega)$, корреляционную функцию $B_y(\tau)$ и дисперсию σ_y^2 напряжения $y(t)$ на выходе фильтра.

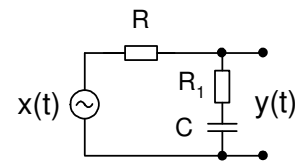


Рис. 7.13.

Решение. Передаточная функция находится из закона Кирхгофа для Фурье-компонент напряжений и тока

$$C_x(\omega) = \left(R + R_1 + \frac{1}{i\omega C} \right) C_I(\omega),$$

который позволяет определить связь между $C_y(\omega)$ и $C_x(\omega)$. Введя обозначение

$$C_y(\omega) = \left(R_1 + \frac{1}{i\omega C} \right) C_I(\omega), \text{ получим}$$

$$C_y(\omega) = \frac{R_1 + \frac{1}{i\omega C}}{R + R_1 + \frac{1}{i\omega C}} C_x(\omega). \quad (1)$$

Таким образом, из (1) имеем

$$K(i\omega) = \frac{1 + i\omega T_1}{1 + i\omega T}, \quad |K(i\omega)|^2 = \frac{1 + \omega^2 T_1^2}{1 + \omega^2 T^2} \quad (2)$$

где $T = C(R + R_1)$; $T_1 = R_1 C$.

Энергетический спектр $S_x(\omega)$ входного сигнала определяется по заданной автокорреляционной функции $B_x(\tau)$ с помощью формулы Винера-Хинчина (6.10):

$$\begin{aligned} S_x(\omega) &= \frac{\sigma_x^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau| - i\omega\tau} d\tau = \frac{\sigma_x^2}{2\pi} \left[\int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau - i\omega\tau} d\tau + \int_{-\infty}^0 e^{\alpha\tau - i\omega\tau} d\tau \right] = \\ &= \frac{\sigma_x^2}{2\pi} \left[\int_0^{\infty} e^{-(\alpha+i\omega)\tau} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-(\alpha-i\omega)\tau} d\tau \right] = \frac{\sigma_x^2}{2\pi} \left[\frac{1}{\alpha+i\omega} + \frac{1}{\alpha-i\omega} \right] = \frac{\sigma_x^2 a}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Интегралы в (3) легко вычисляются с использованием преобразования Лапласа, как это было показано в задаче 4. Таким образом, зная передаточную функцию линейной системы (2) и энергетический спектр (3) на входе, на выходе системы согласно (7.25) получим

$$S_y(\omega) = |K(i\omega)|^2 S_x(\omega) = \frac{1 + \omega^2 T_1^2}{1 + \omega^2 T^2} \cdot \frac{\sigma_x^2 a}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)}. \quad (4)$$

Корреляционная функция флуктуаций напряжения на выходе цепи с учетом (6.10) и (4) может быть записана в виде

$$B_y(\tau) = \alpha \frac{\sigma_x^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2} \cdot \frac{1 + \omega^2 T_1^2}{1 + \omega^2 T^2} \cdot e^{i\omega\tau} d\omega = \alpha \frac{\sigma_x^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) d\omega. \quad (5)$$

Здесь $F(\omega) = \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2} \cdot \frac{1 + \omega^2 T_1^2}{1 + \omega^2 T^2}$. Интеграл в (5) возьмем, как и в задаче 5, с помощью

вычетов. Перейдем в комплексную плоскость $z = \omega + i\theta$, выберем вспомогательный

интеграл от $F(z) = \frac{1}{\alpha^2 + z^2} \cdot \frac{1 + z^2 T_1^2}{1 + z^2 T^2}$ по замкнутому контуру C , расположенному в верхней полуплоскости, если $\tau > 0$ (или в нижней – если $\tau < 0$). Подынтегральная функция в этом интеграле имеет следующие особые точки: $z_{1,2} = \pm ia$, $z_{3,4} = \pm i \frac{1}{T}$ – простые полюсы при $\alpha \neq \frac{1}{T}$ и $z_5 = \infty$ – существенно особая точка. При этом для случая $\tau > 0$ вычисление (5) приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned}
B_y(\tau) &= \alpha \frac{\sigma_x^2}{\pi} \cdot 2\pi i \left[\operatorname{res}_{z=i/T} F(z) + \operatorname{res}_{z=i\alpha} F(z) \right] = \\
&= 2\alpha \sigma_x^2 i \left[\frac{1}{T^2} \cdot \frac{1 + T_1^2 (i/T)^2}{2(i/T)} \cdot \frac{e^{-\frac{\tau}{T}}}{(i/T)^2 + \alpha^2} + \frac{1 + T_1^2 (i\alpha)^2}{1 + T^2 (i\alpha)^2} \cdot \frac{e^{-\alpha\tau}}{2i\alpha} \right] = \\
&= \alpha \sigma_x^2 \left[\frac{1 - T_1^2 / T^2}{T} \cdot \frac{e^{-\frac{\tau}{T}}}{\alpha^2 - 1/T^2} + \frac{1 - \alpha^2 T_1^2}{\alpha(1 - \alpha^2 T^2)} e^{-\alpha\tau} \right] = \\
&= \alpha \sigma_x^2 T \left[1 - \frac{T_1^2 / T^2}{\alpha^2 T^2 - 1} e^{-\frac{\tau}{T}} + \frac{1 - \alpha^2 T_1^2}{\alpha T(1 - \alpha^2 T^2)} e^{-\alpha\tau} \right]. \tag{6}
\end{aligned}$$

Обобщая (6) на случай произвольных значений τ , окончательно получаем

$$B_y(\tau) = \alpha \sigma_x^2 T \left[\frac{1 - T_1^2 / T^2}{\alpha^2 T^2 - 1} e^{-\frac{|\tau|}{T}} + \frac{1 - \alpha^2 T_1^2}{\alpha T(1 - \alpha^2 T^2)} e^{-\alpha|\tau|} \right]. \tag{7}$$

Выражение для дисперсии σ_y^2 получим из (7), положив $\tau=0$

$$\begin{aligned}
\sigma_y^2 &= \alpha \sigma_x^2 T \left[\frac{1 - T_1^2 / T^2}{\alpha^2 T^2 - 1} + \frac{1 - \alpha^2 T_1^2}{\alpha T(1 - \alpha^2 T^2)} \right] = \\
&= \alpha \sigma_x^2 \left[\frac{T_1^2 / T - T}{1 - \alpha^2 T^2} + \frac{1 - \alpha^2 T_1^2}{\alpha(1 - \alpha^2 T^2)} \right] = \alpha \sigma_x^2 \frac{1 - \alpha^2 T_1^2 - \alpha T + \alpha T_1^2 / T}{\alpha(1 - \alpha^2 T^2)} = \tag{8} \\
&= \sigma_x^2 \frac{T - \alpha^2 T_1^2 T - \alpha T^2 + \alpha T_1^2}{T(1 - \alpha^2 T^2)} = \sigma_x^2 \frac{T + \alpha T_1^2}{T(1 + \alpha T)}.
\end{aligned}$$

§ 8. Совместное воздействие сигнала и шума на линейную систему

В этом разделе, пользуясь уже рассмотренным выше аппаратом преобразования сигналов в линейных системах, рассмотрим некоторые вопросы, связанные с приемом и обработкой сигналов в присутствии шума. В экспериментах часто приходится иметь дело с ситуацией, когда мощность полезного сигнала оказывается сравнима или даже меньше мощности шума (говоря о шуме, мы имеем в виду не только шум, приходящий вместе с сигналом, а и собственный шум приемной системы). Прием и обработка сигнала в рассматриваемом случае становится по существу сугубо статистической задачей. В статистической теории приема сигналов на фоне шумов, как правило, выделяют две **основные группы** задач. К первой относятся задачи **обнаружения сигналов на фоне шумов**, а ко второй - задачи **выделения сигналов из шумов**.

Если спектральные кривые сигнала и шума различаются, то для решения поставленных задач используют линейные избирательные системы (линейные фильтры). В этом случае задача оптимизации формулируется следующим образом: **необходимо подобрать частотную характеристику фильтра таким образом, чтобы он подавлял спектральные компоненты шума и в тоже время “подчеркивал” спектральные компоненты полезного сигнала**. В итоге ставится вопрос: как выбрать оптимальный фильтр и как рассчитать его частотную характеристику $K(i\omega)$?

Для ответа на поставленные вопросы нам потребуется вначале провести некоторые обобщения гармонического анализа на случай детерминированных процессов.

8.1. Обобщенный гармонический анализ детерминированных процессов

В предыдущих разделах мы рассмотрели основные правила и приемы гармонического анализа случайных процессов, а также их преобразование в линейных системах. При этом мы определили автокорреляционную функцию $B_{\xi}(\tau)$, энергетический спектр $S_{\xi}(\omega)$ стационарного случайного процесса $\xi(t)$ и нашли связь между $B_{\xi}(\tau)$ и $S_{\xi}(\omega)$ на входе и выходе линейной системы. Оказывается, что аналогичные понятия и приемы могут быть успешно использованы и при исследовании детерминированных процессов, каковыми являются полезные сигналы.

Рассмотрим детерминированный вещественный процесс (сигнал) $S(t)$. Аналогично тому, как мы это делали для эргодических процессов (см. §5), введем понятия среднего значения $\langle S \rangle$:

$$\langle S \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) dt, \quad (8.1)$$

средней мощности:

$$P_s = \langle S^2(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S^2(t) dt, \quad (8.2)$$

временной корреляционной функции:

$$B_s(\tau) = \langle S(t)S(t+\tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t)S(t+\tau) dt \quad (8.3)$$

и энергетического спектра:

$$S_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_s(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (8.4)$$

Обратное к (8.4) преобразование имеет вид

$$B_s(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_s(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (8.5)$$

Так же, как и в случае случайных процессов, будем в дальнейшем рассматривать только процессы с нулевым средним значением ($\langle S \rangle = 0$) и с конечной мощностью ($P_s \neq \infty$). Из формул (8.2), (8.3) и (8.5) следует уже известная нам из теории случайных

процессов связь между средней мощностью, корреляционной функцией и энергетическим спектром:

$$P_s = \langle S^2(t) \rangle = B_s(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_s(\omega) d\omega. \quad (8.6)$$

Кроме перечисленных "статистических" аналогов, для детерминированных процессов естественно пользоваться и обычным понятием амплитудного Фурье-спектра сигнала $C_s(\omega)$:

$$C_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (8.7)$$

$$S(t) = \int_{-\infty}^{\infty} C_s(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

С помощью (8.7) легко определяется связь между полной энергией E_s сигнала и его амплитудным спектром $C_s(\omega)$:

$$\begin{aligned} E_s &= \int_{-\infty}^{\infty} S^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' d\omega'' C_s(\omega') C_s^*(\omega'') e^{it(\omega' - \omega'')} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' d\omega'' C_s(\omega') C_s^*(\omega'') \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{it(\omega' - \omega'')} = \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' d\omega'' C_s(\omega') C_s^*(\omega'') \delta(\omega' - \omega'') = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |C_s(\omega)|^2 d\omega. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Строго говоря, формулы (8.4) и (8.5) требуют, чтобы временная корреляционная функция $B_s(\tau)$ и соответствующий энергетический спектр $S_s(\omega)$ были абсолютно интегрируемыми функциями (см. комментарии к §6). Однако, используя понятие дельта-функции, можно в ряде случаев расширить область применимости данных формул. В качестве примера рассмотрим сигнал в виде одиночного гармонического колебания:

$$S(t) = A_s \cos(\omega_s t + \varphi_s), \quad (8.9)$$

где A_s - амплитуда, ω_s - частота и φ_s - начальная фаза детерминированного процесса. Согласно формулам (8.1) ÷ (8.4) получим следующие выражения для среднего значения, средней мощности, корреляционной функции и энергетического спектра:

$$\begin{aligned} \langle S \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A_s}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(\omega_s t + \varphi_s) dt = 0, \\ P_s &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A_s^2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos^2(\omega_s t + \varphi_s) dt = \frac{A_s^2}{2}, \\ B_s(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A_s^2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(\omega_s t + \varphi_s) \cos(\omega_s t + \omega_s \tau + \varphi_s) dt = \frac{A_s^2}{2} \cos \omega_s \tau, \\ S_s(\omega) &= \frac{A_s^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega_s \tau e^{i\omega \tau} d\tau = \frac{A_s^2}{4} [\delta(\omega + \omega_s) + \delta(\omega - \omega_s)]. \end{aligned} \quad (8.10)$$

8.2. Прохождение гармонического сигнала и шума через линейную систему с постоянными параметрами

Рассмотрим следующую задачу. Пусть на вход линейной системы (см. рис. 8.1) с неизменными во времени параметрами (стационарный фильтр) действует сумма $x(t)$ полезного сигнала $S(t)$ и шума $\xi(t)$:

$$x(t) = S(t) + \xi(t). \quad (8.11)$$

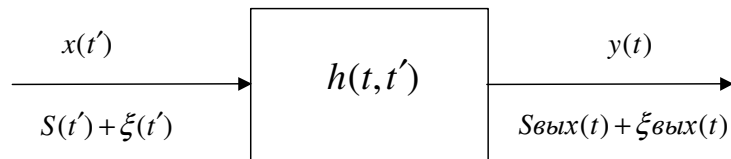


Рис. 8.1.

Здесь и в дальнейшем предполагается, что сигнал и помеха стационарны, имеют нулевые средние ($\langle S(t) \rangle = 0$, $\langle \xi(t) \rangle = 0$) и задаются своими корреляционными функциями $B_s(\tau) = \langle S(t)S(t+\tau) \rangle$, $B_\xi(\tau) = \langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle$ или соответствующими энергетическими Фурье-спектрами $S_s(\omega)$, $S_\xi(\omega)$. Так как фильтр по условию является линейной системой, то на выходе мы также будем иметь сумму колебаний:

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(t')x(t-t')dt' = \int_0^{\infty} h(t')[S(t-t') + \xi(t-t')]dt' = S_{\text{вых}}(t) + \xi_{\text{вых}}(t), \quad (8.12)$$

состоящую из преобразованных полезного сигнала:

$$S_{\text{вых}}(t) = \int_0^{\infty} h(t')S(t-t')dt' \quad (8.13)$$

и шума

$$\xi_{\text{вых}}(t) = \int_0^{\infty} h(t')\xi(t-t')dt'. \quad (8.14)$$

Ставится следующая задача: **каким условиям должны удовлетворять характеристики фильтра, чтобы на выходе системы обеспечить максимальное отношение сигнал/шум?**

Рассмотрим вначале случай, когда входной сигнал представляет собой одиночное гармоническое колебание (8.9). Представив $\cos(\omega_s t + \varphi_s) = \frac{1}{2} [e^{i(\omega_s t + \varphi_s)} + e^{-i(\omega_s t + \varphi_s)}]$, согласно формуле (8.13) получим следующее значение полезного сигнала на выходе:

$$\begin{aligned} S_{\text{вых}}(t) &= \int_0^{\infty} h(t')S(t-t')dt' = \frac{A_s}{2} \int_0^{\infty} h(t') \left\{ e^{i[\omega_s(t-t') + \varphi_s]} + e^{-i[\omega_s(t-t') + \varphi_s]} \right\} dt' = \\ &= \frac{A_s}{2} \left\{ e^{i(\omega_s t + \varphi_s)} K(i\omega_s) + e^{-i(\omega_s t + \varphi_s)} K^*(i\omega_s) \right\} = A_s |K(i\omega_s)| \cos[\omega_s t + \varphi_s + \arg K(i\omega_s)]. \end{aligned} \quad (8.15)$$

При выводе (8.15) мы воспользовались определением (7.18) комплексной передаточной функции $K(i\omega)$ и её представлением $K(i\omega) = |K(i\omega)| \exp\{i \arg K(i\omega)\}$. Видно, что после прохождения через линейную систему вид гармонического сигнала не изменяется. Происходит лишь изменение амплитуды в $|K(i\omega_s)|$ раз и появляется дополнительный набег фазы $\arg K(i\omega_s)$.

Определим теперь средние мощности сигналов на входе и выходе линейной системы. Для детерминированных процессов $S(t)$ и $S_{\text{вых}}(t)$ согласно (8.2) и (8.10) получим

$$P_{S_{\text{вх}}} = \frac{A_s^2}{2}, \quad P_{S_{\text{вых}}} = \frac{A_s^2}{2} |K(i\omega_s)|^2. \quad (8.16)$$

Для случайных процессов $\xi(t)$ и $\xi_{\text{вых}}(t)$ средние мощности определим через соответствующие энергетические спектры $S_\xi(\omega)$ - на входе и $S_{\xi_{\text{вых}}}(\omega)$ - на выходе линейной системы. При этом $S_{\xi_{\text{вых}}}(\omega)$ согласно (7.25) равен

$$S_{\xi_{\text{вых}}}(\omega) = |K(i\omega)|^2 S_\xi(\omega). \quad (8.17)$$

Считая далее, что средняя мощность шума определяется дисперсией случайного процесса, согласно формуле (6.11) получим

$$P_{\xi_{\text{вх}}} = \int_{-\infty}^{\infty} S_\xi(\omega) d\omega, \quad P_{\xi_{\text{вых}}} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi_{\text{вых}}}(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |K(i\omega)|^2 S_\xi(\omega) d\omega. \quad (8.18)$$

Под отношением сигнал/шум понимают отношение соответствующих средних мощностей. Пользуясь формулами (8.16) и (8.18), запишем следующие соотношения:

$$\left(\frac{P_S}{P_\xi} \right)_{\text{вх}} = \frac{A_s^2}{2 \int_{-\infty}^{\infty} S_\xi(\omega) d\omega}, \quad (8.19)$$

$$\left(\frac{P_s}{P_\xi}\right)_{\text{вых}} = \frac{A_s^2 |K(i\omega_s)|^2}{2 \int_{-\infty}^{\infty} |K(i\omega)|^2 S_\xi(\omega) d\omega}, \quad (8.20)$$

$$\frac{(P_s/P_\xi)_{\text{вых}}}{(P_s/P_\xi)_{\text{вх}}} = \frac{|K(i\omega_s)|^2 \int_{-\infty}^{\infty} S_\xi(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |K(i\omega)|^2 S_\xi(\omega) d\omega}. \quad (8.21)$$

Выражение (8.20) показывает, каким требованием должна удовлетворять линейная система (фильтр), чтобы выполнялось условие $(P_s/P_\xi)_{\text{вых}} \gg 1$. Во-первых, частота сигнала должна быть близка к резонансной частоте фильтра ω_0 ($\omega_s \approx \omega_0$). В этом случае $|K(i\omega_s)|^2$ достигает максимальных значений (см., рис. 7.7). Во-вторых, частотная характеристика $|K(i\omega)|^2$ должна быть значительно уже характерной ширины $\Delta\omega_\xi$ спектра шума $S_\xi(\omega)$: чем с большим запасом будет выполняться неравенство

$$\Delta\omega_f \ll \Delta\omega_\xi, \quad (8.22)$$

тем меньше будет знаменатель. Через $\Delta\omega_f$ мы обозначили характерную ширину резонансной кривой фильтра. Данное утверждение легко поясняется с помощью рис. 7.7.

При выполнении условия (8.22) можно считать, что спектральная плотность шума $S_\xi(\omega)$ в пределах резонансной кривой приближенно постоянна ($S_\xi(\omega) \approx S_\xi(\omega_0)$).

В этом случае

$$P_{\xi \text{ вых}} = \int_{-\infty}^{\infty} |K(i\omega)|^2 S_\xi(\omega) d\omega \approx S_\xi(\omega_0) \int_{-\infty}^{\infty} |K(i\omega)|^2 d\omega. \quad (8.23)$$

Заметим, что при поступлении на вход системы белого шума $S_\xi(\omega_0) = S_\xi(\omega) = N/2 = \text{Const}$ и в формуле (8.23) необходимо писать строгое равенство

$$P_{\xi_{\text{вых}}} = \frac{N}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |K(i\omega)|^2 d\omega. \quad (8.24)$$

С учетом вышеизложенного, мы получаем следующее значение отношения сигнал/шум (8.20) на выходе системы:

$$\left(\frac{P_s}{P_{\xi}} \right)_{\text{вых}} \approx \frac{A_s^2 |K(i\omega_0)|^2}{2S_{\xi}(\omega_0) \int_{-\infty}^{\infty} |K(i\omega)|^2 d\omega}. \quad (8.25)$$

Определим характерную ширину $\Delta\omega_f$ спектральной кривой фильтра $|K(i\omega)|^2$ как

$$2\Delta\omega_f = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |K(i\omega)|^2 d\omega}{|K(i\omega_0)|^2}. \quad (8.26)$$

Кроме того, согласно (8.18) и с учетом неравенства (8.22), вычислим мощность шума, приходящуюся на интервал частот $\omega_0 - \Delta\omega_f \leq \omega \leq \omega_0 + \Delta\omega_f$:

$$\Delta P_{\xi_{\text{ex}}} = \int_{\omega_0 - \Delta\omega_f}^{\omega_0 + \Delta\omega_f} S_{\xi_{\text{ex}}}(\omega) d\omega \approx 2S_{\xi_{\text{ex}}}(\omega_0) \Delta\omega_f. \quad (8.27)$$

С помощью введенных определений $\Delta\omega_f$ и $\Delta P_{\xi_{\text{ex}}}$, формула (8.25) принимает вид

$$\left(\frac{P_s}{P_{\xi}} \right)_{\text{вых}} \approx \frac{A_s^2/2}{\Delta P_{\xi_{\text{ex}}}}. \quad (8.28)$$

Таким образом, **пересчет отношения сигнал/шум с входа на выход линейной системы сводится просто к замене полной мощности $P_{\xi_{\text{ex}}}$ на мощность $\Delta P_{\xi_{\text{ex}}}$.**

По аналогии с (8.26) для шума с конечной полосой также можно ввести характерную ширину $\Delta\omega_\xi$ спектральной кривой $S_\xi(\omega)$:

$$2\Delta\omega_\xi = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} S_\xi(\omega) d\omega}{S_\xi(\omega_0)}. \quad (8.29)$$

С учетом определений (8.26) и (8.29) формула (8.21) приобретает простой окончательный вид

$$\frac{\left(\frac{P_s}{P_\xi}\right)_{\text{вых}}}{\left(\frac{P_s}{P_\xi}\right)_{\text{вх}}} = \frac{|K(i\omega_s)|^2 \int_{-\infty}^{\infty} S_\xi(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |K(i\omega)|^2 S_\xi(\omega) d\omega} \approx \frac{|K(i\omega_0)|^2 \int_{-\infty}^{\infty} S_\xi(\omega) d\omega}{S_\xi(\omega_0) \int_{-\infty}^{\infty} |K(i\omega)|^2 d\omega} = \frac{\Delta\omega_\xi}{\Delta\omega_f}. \quad (8.30)$$

Полученная оценка дает возможным образом выбрать полосу фильтра $\Delta\omega_f$ по требуемой величине $\left(\frac{P_s}{P_\xi}\right)_{\text{вых}}$ при условии, что нам известны значение $\left(\frac{P_s}{P_\xi}\right)_{\text{вх}}$ и полоса частот входного шума $\Delta\omega_\xi$.

8.3. Оптимальный линейный фильтр для сигналов конечной длительности

Рассмотрим теперь более реальный случай, когда на вход линейной системы вместе с шумом $\xi(t)$ подается сигнал $S(t)$ конечной длительности и с заданным амплитудным Фурье-спектром $C_s(\omega)$. В процессе прохождения полезного сигнала через линейную систему его спектр преобразуется по закону (см. (7.22)):

$$C_{s \text{ вых}}(\omega) = C_s(\omega) K(i\omega). \quad (8.31)$$

Во временном представлении сигнал на выходе имеет вид

$$S_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{s \text{ вых}}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} C_s(\omega) K(i\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (8.32)$$

а его мгновенная мощность равна

$$P_{s \text{ вых}}(t) = S_{\text{вых}}^2(t) = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} C_s(\omega) K(i\omega) e^{i\omega t} d\omega \right\}^2. \quad (8.33)$$

С другой стороны, среднеквадратичное значение мощности шума на выходе системы по-прежнему определяется формулой (8.18). Отсюда находим отношение мгновенной мощности сигнала к средней мощности шума на выходе системы:

$$r(t) = \left[\frac{P_s(t)}{P_\xi} \right]_{\text{вых}} = \frac{\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} C_s(\omega) K(i\omega) e^{i\omega t} d\omega \right\}^2}{\int_{-\infty}^{\infty} S_\xi(\omega) |K(i\omega)|^2 d\omega}. \quad (8.34)$$

В чисто математическом плане поставленная нами задача сводится к отысканию такого вида передаточной функции $K(i\omega)$, при котором $r(t)$ достигает наибольшего значения. Эта задача была впервые решена Нортон в 1943 г. методами вариационного исчисления. Впоследствии, в 1946 г. Ван-Флек и Д.Мидлтон независимо решили эту же задачу с помощью неравенства Коши-Буняковского. Краткая схема построения решения сводится к следующему.

Пусть $t = t_0$ есть некоторый фиксированный момент времени, в который сигнал на выходе линейной системы имеет соответствующие значения амплитуды $S_{\text{вых}}(t_0)$ и мгновенной мощности $P_{s \text{ вых}}(t_0)$:

$$S_{\text{вых}}(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} C_s(\omega) K(i\omega) e^{i\omega t_0} d\omega, \quad (8.35)$$

$$P_{s \text{ вых}}(t_0) = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} C_s(\omega) K(i\omega) e^{i\omega t_0} d\omega \right\}^2. \quad (8.36)$$

На основе неравенства Коши-Буняковского мгновенную интенсивность на выходе можно оценить так:

$$P_{s \text{ вых}}(t_0) = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} C_s(\omega) K(i\omega) e^{i\omega t_0} d\omega \right\}^2 \leq \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |C_s(\omega)|^2 d\omega \right\} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |K(i\omega)|^2 d\omega \right\}. \quad (8.37)$$

При этом

$$r(t_0) \leq \frac{\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |C_s(\omega)|^2 d\omega \right\} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |K(i\omega)|^2 d\omega \right\}}{\int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}(\omega) |K(i\omega)|^2 d\omega}. \quad (8.38)$$

Равенство в (8.37), т. е достижение $P_{s \text{ вых}}(t_0)$ и, следовательно, $r(t_0)$ максимальных значений, возможно только в том случае, если

$$K(i\omega) = \alpha C_s^*(\omega) e^{-i\omega t_0}, \quad (8.39)$$

где α - произвольный постоянный коэффициент, а

$$C_s^*(\omega) = C_s(-\omega) \quad (8.40)$$

есть комплексно сопряженный Фурье-спектр входного сигнала.

Воспользовавшись полученными ранее оценками (8.23) для средней мощности шума на выходе системы, запишем выражение для максимального отношения сигнал/шум в момент времени $t = t_0$:

$$r_{\max}(t_0) = \frac{1}{S_{\xi}(\omega_0)} \int_{-\infty}^{\infty} |C_s(\omega)|^2 d\omega. \quad (8.41)$$

Учитывая далее определение полной энергии E_s полезного сигнала (8.8) на входе системы, получим

$$r_{\max}(t_0) = \frac{E_s}{2\pi S_{\xi}(\omega_0)}. \quad (8.42)$$

Согласно (8.42) величина $r_{\max}(t_0)$ не зависит от t_0 , если передаточная функция $K(i\omega)$ фильтра выбирается для каждого нового значения t_0 в соответствии с формулой (8.39). Другими словами, **мы можем обеспечить получение максимального отношения сигнал/шум, определяемого формулой (8.42), в любой наперед заданный момент времени t_0 , если выберем передаточную функцию фильтра в виде (8.39)**. Видно, что частотная характеристика (8.39) близка к спектру входного сигнала (поэтому оптимальный фильтр называют также **согласованным фильтром**). Следует, однако, заметить, что в (8.39) входит не сама спектральная амплитуда входного сигнала, а её комплексно сопряженное значение.

Согласно (8.32) сигнал на выходе оптимального фильтра в произвольный момент времени t равен

$$S_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} C_s(\omega) K(i\omega) e^{i\omega t} d\omega = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} |C_s(\omega)|^2 e^{i\omega(t-t_0)} d\omega. \quad (8.43)$$

При $t = t_0$ сигнал $S_{\text{вых}}(t)$ принимает максимальное значение:

$$S_{\text{вых max}}(t_0) = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} |C_s(\omega)|^2 d\omega = \frac{\alpha E_s}{2\pi} \quad (8.44)$$

(мы воспользовались определением полной энергии (8.8) входного сигнала).

Согласно (8.43) сигнал на выходе оптимального фильтра имеет вид симметричного относительно $t = t_0$ импульса, хотя форма импульса входного сигнала может быть произвольной. Таким образом, **при прохождении сигнала через согласованный с ним фильтр его форма изменяется**

8.4. Выделение сигнала из шума. Уравнение Винера-Хопфа

В классической постановке задача выделения сигнала из шума, впервые сформулированная Н.Винером еще в 1941 г., заключается в следующем. Пусть на вход линейной системы с не изменяющимися во времени параметрами поступает сумма (8.11)

сигнала $S(t)$ и шума $\xi(t)$ (см. рис. 8.1). Часто несущий информацию процесс $S(t)$ представляет собой промодулированный человеческой речью радиосигнал. Такой процесс приближенно можно рассматривать как стационарный шум с нулевым средним значением ($\langle S(t) \rangle = 0$). С другой стороны, как и прежде, будем предполагать, что искажающая сигнал помеха $\xi(t)$ также представляет собой стационарный шум с нулевым средним значением ($\langle \xi(t) \rangle = 0$). Таким образом, на вход линейной системы подается два случайных стационарных процесса;

$$x(t) = S(t) + \xi(t), \quad (8.45)$$

причем первый $S(t)$ мы считаем сигналом, а второй $\xi(t)$ - помехой. Предполагаем, что нам известны соответствующие Фурье-представления $C_s(\omega)$ и $C_\xi(\omega)$ процессов (см. (6.2) и (8.7)), заданы их корреляционные функции $B_s(\tau) = \langle S(t)S(t+\tau) \rangle$, $B_\xi(\tau) = \langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle$, а также соответствующие им энергетические спектры $S_s(\omega)$ и $S_\xi(\omega)$. Если процессы $S(t)$ и $\xi(t)$ между собой коррелируют, то полагаются известными их взаимная корреляционная функция $B_{s\xi}(\tau) = \langle S(t)\xi(t+\tau) \rangle$ и соответствующий ей энергетический спектр $S_{s\xi}(\omega)$.

Задачей линейного фильтра наряду с очищением сигнала от помех может быть также какое-либо его линейное преобразование (усиление, дифференцирование, интегрирование и т.д.). Поэтому в общем случае на выходе фильтра при отсутствии помех требуется получить некоторую функцию времени $F(t)$, связанную с сигналом $S(t)$ заданным линейным преобразованием:

$$F(t) = \hat{L}\{S(t)\}, \quad (8.46)$$

где \hat{L} - некоторый линейный оператор. Например:

$$F(t) = \frac{dS(t)}{dt}, \text{ если требуется дифференцирование;}$$

$$F(t) = \int S(t) dt, \text{ если требуется интегрирование;}$$

$F(t) = S(t - \Delta t)$, если требуется сдвиг во времени на величину Δt ;

$F(t) = A \cdot S(t)$, если требуется усиление в A раз;

$F(t) = S(t)$, если требуется простое воспроизведение сигнала.

Колебание $y(t)$ на выходе линейной системы связано с колебанием на входе уже известным нам соотношением (8.12). Требуемое же колебание на выходе фильтра есть $F(t)$. образуем разность

$$\varepsilon(t) = y(t) - F(t), \quad (8.47)$$

которая имеет смысл мгновенной ошибки воспроизведения $F(t)$. Средний квадрат этой ошибки равен

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon^2(t) \rangle &= \langle [y(t) - F(t)]^2 \rangle = \left\langle \left[\int_0^{\infty} dt' h(t') x(t-t') \right]^2 \right\rangle - \\ &- 2 \langle F(t) \int_0^{\infty} dt' h(t') x(t-t') \rangle + \langle F^2(t) \rangle. \end{aligned} \quad (8.48)$$

Преобразуя квадрат первого слагаемого справа в двойной интеграл, внося затем во втором слагаемом множитель $F(t)$ как не зависящий от переменной интегрирования под знак интеграла, получим

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon^2(t) \rangle &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} dt' dt'' h(t') h(t'') \langle x(t-t') x(t-t'') \rangle - \\ &- 2 \int_0^{\infty} dt' h(t') \langle F(t) x(t-t') \rangle + \langle F^2(t) \rangle. \end{aligned} \quad (8.49)$$

Учитывая стационарность всех рассматриваемых процессов, введем в рассмотрение следующие корреляционные функции:

$$\begin{aligned} B_x(t_1, t_2) &= \langle x(t_1) x(t_2) \rangle = B_x(t_1 - t_2), \\ B_{Fx}(t_1, t_2) &= \langle F(t_1) x(t_2) \rangle = B_{Fx}(t_1 - t_2), \\ B_F(t_1, t_2) &= \langle F(t_1) F(t_2) \rangle = B_F(t_1 - t_2). \end{aligned} \quad (8.50)$$

Воспользовавшись далее связью между средней мощностью процесса $F(t)$ и его корреляционной функцией $B_F(t_1, t_2)$ при $t_1 = t_2 = t$: $\langle F^2(t) \rangle = B_F(0)$, перепишем (8.49) в следующем виде:

$$\langle \varepsilon^2(t) \rangle = \int_0^\infty \int_0^\infty dt' dt'' h(t') h(t'') B_x(t' - t'') - 2 \int_0^\infty dt' h(t') B_{xF}(t') + B_F(0). \quad (8.51)$$

Оптимальным считается такой фильтр, у которого величина $\langle \varepsilon^2(t) \rangle$ получается минимальной. Следовательно, математическая задача сводится к отысканию такого вида импульсной переходной функции $h(t)$, при которой величина $\langle \varepsilon^2(t) \rangle$ минимальна. Эта задача была решена Винером методами вариационного анализа. Им было показано, что искомая характеристика $h(t)$ определяется из решения следующего интегрального уравнения:

$$\int_0^\infty B_x(t - t') h(t') dt' = B_{xF}(t), \quad (8.52)$$

которое в дальнейшем получило название **уравнения Винера-Хопфа**.

Доказательство (8.52) проведем путем следующих простых рассуждений. Пусть оптимальный фильтр с импульсной передаточной функцией $h(t)$ обеспечивает минимум среднеквадратичной ошибки $E = \overline{\varepsilon^2}$. Рассмотрим теперь новый фильтр с импульсной передаточной функцией в виде

$$\tilde{h}(t) = h(t) + \gamma g(t), \quad (8.53)$$

где $h(t)$ - по-прежнему, импульсная передаточная функция оптимального фильтра, $g(t)$ - импульсная передаточная функция некоторого произвольного физически осуществимого фильтра, а γ - произвольный вещественный параметр. Заменяя в формулах (8.48) ÷ (8.51) $h(t)$ на $\tilde{h}(t)$, запишем среднеквадратичную ошибку $\tilde{E} = \langle \tilde{\varepsilon}^2 \rangle$ воспроизведения сигнала $F(t)$ на выходе новой линейной системы:

$$\tilde{E} = \langle \tilde{\varepsilon}^2(t) \rangle = \int_0^\infty \int_0^\infty dt' dt'' \tilde{h}(t') \tilde{h}(t'') B_x(t' - t'') - 2 \int_0^\infty dt' \tilde{h}(t') B_{xF}(t') + B_F(0). \quad (8.54)$$

Подставляя теперь сюда выражение (8.53), получим

$$\begin{aligned} \tilde{E} = & \int_0^\infty \int_0^\infty dt' dt'' [h(t') + \gamma g(t')] [h(t'') + \gamma g(t'')] B_x(t' - t'') - \\ & - 2 \int_0^\infty dt' [h(t') + \gamma g(t')] B_{xF}(t') + B_F(0). \end{aligned} \quad (8.55)$$

Раскрыв скобки под знаком интеграла и учитывая определение среднеквадратичной ошибки E оптимального фильтра (8.51), приходим к следующему выражению:

$$\begin{aligned} \tilde{E} - E = & 2\gamma \left\{ \int_0^\infty \int_0^\infty dt' dt'' g(t') h(t'') B_x(t' - t'') - \int_0^\infty dt' g(t') B_{xF}(t') \right\} + \\ & + \gamma^2 \int_0^\infty \int_0^\infty dt' dt'' g(t') g(t'') B_x(t' - t''). \end{aligned} \quad (8.56)$$

При выводе (8.56) мы учли, что для стационарного процесса $x(t)$ корреляционная функция B_x четная, следовательно, $B_x(t' - t'') = B_x(t'' - t')$.

По определению, оптимальный фильтр минимизирует ошибку на выходе. А так, как фильтр с $\tilde{h}(t)$ не является оптимальным, то разность $\tilde{E} - E$ в (8.56) должна быть неотрицательной ($\tilde{E} - E \geq 0$) для любых физически реализуемых $g(t)$ и значениях параметра γ . Не составляет труда показать, что второе слагаемое в правой части (8.56) является величиной положительной:

$$\gamma^2 \int_0^\infty \int_0^\infty dt' dt'' g(t') g(t'') B_x(t' - t'') = \gamma^2 \left\langle \int_0^\infty dt g(t) x(t) \right\rangle^2 \geq 0. \quad (8.57)$$

Неравенство (8.57) приводит к тому, что для выполнения условия $\tilde{E} - E \geq 0$ необходимо потребовать равенства нулю выражения, стоящего в фигурных скобках (8.56):

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} dt' dt'' g(t') h(t'') B_x(t' - t'') - \int_0^{\infty} dt' g(t') B_{xF}(t') = 0. \quad (8.58)$$

Действительно, если выражение (8.58) не равно нулю, то при соответствующем выборе величины произвольного параметра γ (положительных или отрицательных значений) можно добиться того, что разность ошибок в (8.56) станет отрицательной величиной ($\tilde{E} - E < 0$), а по условию задачи это невозможно.

Перепишем (8.58) в следующем виде:

$$\int_0^{\infty} g(t') \left\{ \int_0^{\infty} B_x(t' - t'') h(t'') dt'' - B_{xF}(t') \right\} dt' = 0. \quad (8.59)$$

Равенство (8.59) может выполняться при всех возможных $g(t)$ только в том случае, если

$$\int_0^{\infty} B_x(t' - t'') h(t'') dt'' - B_{xF}(t') = 0. \quad (8.60)$$

Таким образом, мы приходим к формуле Винера (8.52), что и требовалось доказать.

В качестве *примера* рассмотрим случай, когда входной сигнал $S(t)$ и помеха $\xi(t)$ статистически независимы, а $F(t) = S(t)$ (простое воспроизведение входного сигнала). Согласно (8.50) находим соответствующие корреляционные функции:

$$\begin{aligned} B_x(t_1 - t_2) &= \langle [S(t_1) + \xi(t_1)][S(t_2) + \xi(t_2)] \rangle = B_s(t_1 - t_2) + B_\xi(t_1 - t_2), \\ B_{Fx}(t_1 - t_2) &= \langle S(t_1)[S(t_2) + \xi(t_2)] \rangle = B_s(t_1 - t_2), \\ B_F(t_1 - t_2) &= \langle S(t_1)S(t_2) \rangle = B_s(t_1 - t_2). \end{aligned}$$

С учетом данных представлений, уравнение Винера-Хопфа (8.52) принимает вид

$$\int_0^{\infty} [B_s(t-t') + B_{\xi}(t-t')] h(t') dt' = B_s(t). \quad (8.61)$$

Произведя Фурье-преобразование данного выражения по переменной t , с учетом определения передаточной функции линейного фильтра (7.18), получим

$$[S_s(\omega) + S_{\xi}(\omega)] K(i\omega) = S_s(\omega). \quad (8.62)$$

Отсюда находим передаточную функцию оптимального фильтра

$$K(i\omega) = \frac{S_s(\omega)}{S_s(\omega) + S_{\xi}(\omega)}. \quad (8.63)$$

Вычислим теперь среднеквадратичную ошибку $\langle \varepsilon^2(t) \rangle$ воспроизведения сигнала. Для этого выполним Фурье-преобразование выражения (8.47). В результате с учетом связи амплитудных спектров сигнала и шума на входе и выходе линейной системы получим амплитудный спектр мгновенной ошибки воспроизведения:

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}(\omega) &= [C_s(\omega) + C_{\xi}(\omega)] K(i\omega) - C_s(\omega) = \\ &= [K(i\omega) - 1] C_s(\omega) + K(i\omega) C_{\xi}(\omega). \end{aligned} \quad (8.64)$$

Согласно (8.64) корреляционная функция $\langle \tilde{\varepsilon}(\omega) \tilde{\varepsilon}^*(\omega') \rangle$ амплитудного спектра равна

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\varepsilon}(\omega) \tilde{\varepsilon}^*(\omega') \rangle &= \langle \{ [K(i\omega) - 1] C_s(\omega) + K(i\omega) C_{\xi}(\omega) \} \times \\ &\times \{ [K(i\omega') - 1]^* C_s^*(\omega') + K^*(i\omega') C_{\xi}^*(\omega') \} \rangle. \end{aligned} \quad (8.65)$$

Для стационарных процессов $S(t)$ и $\xi(t)$, с учетом их некоррелированности, энергетические и амплитудные спектры на входе линейной системы связаны следующими соотношениями (см. §6):

$$\begin{aligned}
\langle C_s(\omega) C_s^*(\omega') \rangle &= S_s(\omega) \delta(\omega - \omega'), \\
\langle C_\xi(\omega) C_\xi^*(\omega') \rangle &= S_\xi(\omega) \delta(\omega - \omega'), \\
\langle C_s(\omega) C_\xi^*(\omega') \rangle &= \langle C_s^*(\omega) C_\xi(\omega) \rangle = 0.
\end{aligned} \tag{8.66}$$

Из (8.66) видно, что в правой части (8.65) у нас стоит δ - коррелированный процесс. Следовательно, такой же должен быть и в левой части равенства (см. §6). Введя с помощью соотношения $\langle \tilde{\varepsilon}(\omega) \tilde{\varepsilon}^*(\omega') \rangle = S_\varepsilon(\omega) \delta(\omega - \omega')$ энергетический спектр $S_\varepsilon(\omega)$ ошибки, из (8.65) получим для него следующее выражение:

$$S_\varepsilon(\omega) = |K(i\omega) - 1|^2 S_s(\omega) + |K(i\omega)|^2 S_\xi(\omega). \tag{8.67}$$

По найденному энергетическому спектру $S_\varepsilon(\omega)$ среднеквадратичная ошибка измерений $\langle \varepsilon^2(t) \rangle$ определяется так:

$$\langle \varepsilon^2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} S_\varepsilon(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ |K(i\omega) - 1|^2 S_s(\omega) + |K(i\omega)|^2 S_\xi(\omega) \right\} d\omega. \tag{8.68}$$

Подставляя сюда найденную передаточную функцию (8.63) оптимального фильтра, окончательно получаем

$$\langle \varepsilon^2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_s(\omega) S_\xi(\omega)}{S_s(\omega) + S_\xi(\omega)} d\omega. \tag{8.69}$$

8.5. Оптимальные фильтры и корреляторы

Рассмотренные выше методы обнаружения и выделения сигналов особенно эффективны, когда спектры сигнала и шума существенно различаются. В этом случае оптимальные фильтры обеспечивают минимальные ошибки обнаружения и выделения сигналов. Но, как уже отмечалось ранее, в силу того, что энергетические спектры и корреляционные функции связаны между собой через Фурье-преобразование, существенные различия в спектрах сигнала и шума естественно приведут к различиям в их корреляционных функциях. Поэтому в задачах обнаружения и выделения сигналов

наряду с рассмотренными выше методами используются и “сопряженные по Фурье” методы, которые основаны на измерениях автокорреляционных и взаимно-корреляционных функций.

В качестве пояснения вышесказанного снова рассмотрим задачу об обнаружении одиночного гармонического сигнала (8.9) на фоне стационарного шума $\xi(t)$:

$$x(t) = S(t) + \xi(t) = A_s \cos(\omega_s t + \varphi_s) + \xi(t). \quad (8.70)$$

Предполагаем, что сигнал и помеха независимы. Пусть теперь суммарный сигнал $x(t)$ подается на коррелятор, показанный на рис. 8.2.

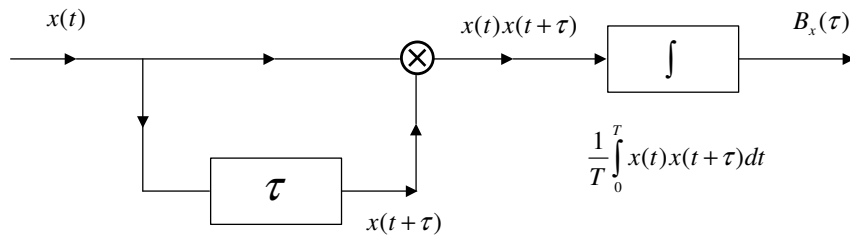


Рис. 8.2.

На выходе коррелятора имеем

$$\begin{aligned} B_x(\tau) &= \langle x(t)x(t+\tau) \rangle = \langle [S(t) + \xi(t)][S(t+\tau) + \xi(t+\tau)] \rangle = \\ &= \langle S(t)S(t+\tau) \rangle + \langle S(t)\xi(t+\tau) \rangle + \langle S(t+\tau)\xi(t) \rangle + \langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle. \end{aligned} \quad (8.71)$$

Принимая во внимание то, что для независимых процессов $\langle S\xi \rangle = \langle S \rangle \langle \xi \rangle = 0$ ($\langle S \rangle = \langle \xi \rangle = 0$), получим

$$B_x(\tau) = B_s(\tau) + B_\xi(\tau) = \frac{A_s^2}{2} \cos \omega_s \tau + B_\xi(\tau). \quad (8.72)$$

При вычислении $B_s(\tau)$ мы воспользовались ранее полученным результатом (8.10).

Как уже отмечалось в §5, корреляционная функция случайного процесса $B_{\xi}(\tau)$ отлична от нуля лишь для времен τ , не превосходящих характерного времени $\tau = \tau_0$ убывания функции $B_{\xi}(\tau)$ (характерное время корреляции). При $\tau \gg \tau_0$ корреляционная функция $B_{\xi}(\tau)$ исчезающе мала ($B_{\xi} \approx 0$) и на выходе прибора, измеряющего корреляционную функцию $B_x(\tau)$ суммарного сигнала, мы получаем

$$B_x(\tau) \approx \frac{A_s^2}{2} \cos \omega_s \tau \quad (8.73)$$

независимо от отношения сигнал/шум на входе. Это значит, что **при больших временах наблюдения появляется возможность обнаружения сколь угодно слабого гармонического сигнала на фоне шума** (см. рис. 8.3).

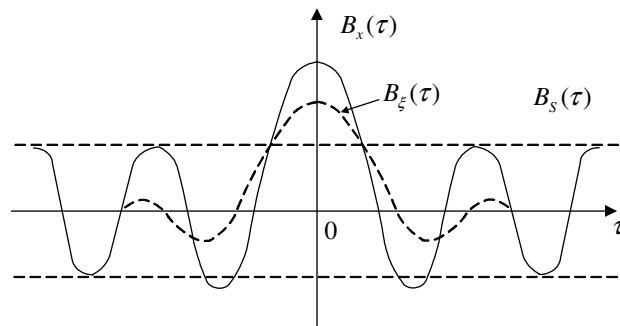


Рис. 8.3.

ЗАДАЧИ

1. Определить связь между амплитудным $C_s(\omega)$ и энергетическим $S_s(\omega)$ спектрами детерминированного сигнала $S(t)$, заданного в виде финитной функции, значения которой отличны от нуля лишь на конечном интервале времени:

$$\begin{aligned} S(t) &\neq 0, \quad -T_s/2 \leq t \leq T_s/2; \\ S(t) &\equiv 0, \quad |t| > T_s/2. \end{aligned} \quad (1)$$

Решение. Согласно формуле (8.7) найдем амплитудный Фурье-спектр $C_s(\omega)$ сигнала $S(t)$:

$$C_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-T_s/2}^{T_s/2} S(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (2)$$

С помощью (8.3) строим далее корреляционную функцию импульсного процесса:

$$B_s(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) S(T + \tau) dt = \frac{1}{T_s} \int_{-T_s/2}^{T_s/2} S(t) S(T + \tau) dt. \quad (3)$$

Произведя теперь в (3) Фурье-преобразование по τ , приходим к следующему выражению, связывающему между собой энергетический $S_s(\omega)$ и амплитудный $C_s(\omega)$ спектры импульсного сигнала:

$$S_s(\omega) = \frac{2\pi}{T_s} |C_s(\omega)|^2. \quad (4)$$

2. Определить форму сигнала на выходе согласованного с ним фильтра (8.39) при прохождении через него прямоугольного импульса

$$S(t) = \begin{cases} S_0, & |t| \leq \tau_0/2, \\ 0, & |t| > \tau_0/2. \end{cases} \quad (1)$$

Решение. Согласно формуле (8.7) определим вначале амплитудный Фурье-спектр для заданного входного прямоугольного импульса (1)

$$C_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{S_0}{2\pi} \int_{-\tau_0/2}^{\tau_0/2} e^{-i\omega t} dt = \frac{S_0 \tau_0}{2\pi} \frac{\sin(\omega \tau_0/2)}{\omega \tau_0/2}. \quad (2)$$

Воспользовавшись соотношением (8.43), определяем форму сигнала на выходе оптимального фильтра. Подставив (5) в (8.43), получаем

$$\begin{aligned}
S_{\text{вых}}(t) &= \alpha \left(\frac{S_0 \tau_0}{2\pi} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\omega \tau_0/2)}{(\omega \tau_0/2)^2} e^{i\omega(t-t_0)} d\omega = \\
&= \alpha \frac{S_0^2}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\sin^2(\omega \tau_0/2)}{\omega^2} \cos \omega t' - i \frac{\sin^2(\omega \tau_0/2)}{\omega^2} \sin \omega t' \right] d\omega.
\end{aligned} \tag{3}$$

В данной формуле введено обозначение $t' = t - t_0$.

Второй интеграл в (3) равен нулю, поскольку подынтегральная функция нечетная, а пределы интегрирования симметричны. Поэтому соотношение (3) можно переписать в виде табличного интеграла для косинус - преобразования Фурье

$$S_{\text{вых}}(t) = \frac{2\alpha S_0^2}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2(\omega \tau_0/2)}{\omega^2} \cos \omega t' d\omega, \tag{4}$$

который равен

$$S_{\text{вых}}(t) = \begin{cases} \frac{\alpha}{2\pi} S_0^2 \tau_0 \left[1 - \frac{|t-t_0|}{\tau_0} \right], & |t-t_0| < \tau_0, \\ 0, & |t-t_0| > \tau_0. \end{cases} \tag{5}$$

Из полученного выражения видно, что оптимальный фильтр преобразует входной прямоугольный сигнал $S(t)$ в некоторый новый $S_{\text{вых}}(t)$ и делает это таким образом, что новый сигнал принимает при $t = t_0$ значение, наибольшее из всех возможных, и тем самым наилучшим образом выделяется на фоне шума (рис. 8.4).

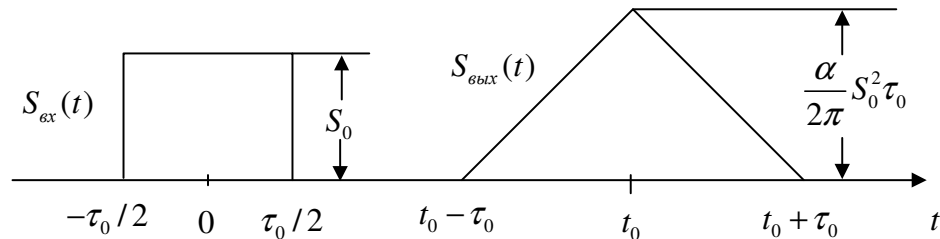


Рис. 8.4.

3. На вход линейного фильтра воздействует аддитивная смесь $x(t) = S(t) + n(t)$, где $n(t)$ – стационарный гауссовский белый шум, а

$$S(t) = \begin{cases} S_0 e^{\beta(t-t_0)}, & t \leq t_0; \\ 0, & t > t_0 \end{cases} \quad (1)$$

– статистически независимый от шума $n(t)$ экспоненциальный видеоимпульс (рис. 8.5).

Определить комплексную частотную характеристику $K(i\omega)$ фильтра, максимизирующего отношение сигнал/шум на выходе в момент времени $t = t_0$.

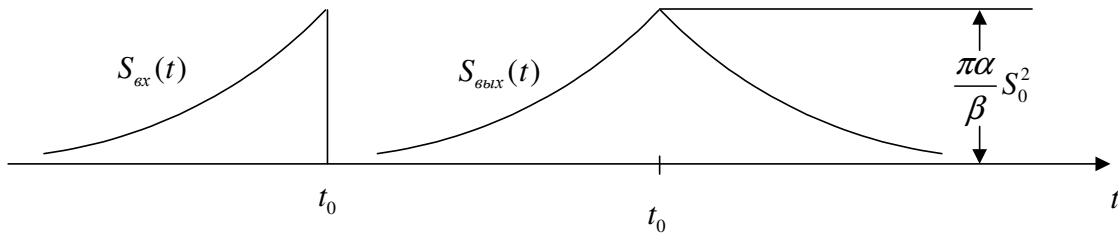


Рис. 8.5

Решение. С помощью формулы (8.7) вычислим амплитудный спектр входного сигнала:

$$C_S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{-i\omega t} dt = S_0 e^{-\beta t_0} \int_{-\infty}^{t_0} e^{(\beta-i\omega)t} dt = \frac{S_0}{(\beta-i\omega)} e^{-i\omega t_0}. \quad (2)$$

Используя далее соотношение (8.39), находим искомую комплексную частотную характеристику оптимального фильтра

$$K(i\omega) = \alpha C_S^*(\omega) e^{-i\omega t_0} = \frac{\alpha S_0}{\beta + i\omega} \quad (3)$$

Согласно (8.43), определяем форму сигнала на выходе найденного оптимального фильтра. Подставив (2) в (8.43), получаем

$$S_{\text{вых}}(t) = \alpha S_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega(t-t_0)}}{\beta^2 + \omega^2} d\omega = \frac{\pi \alpha S_0^2}{\beta} e^{-\beta|t-t_0|}.$$

Видно, что на выходе оптимального фильтра мы получили симметричный, относительно времени $t = t_0$, сигнал (см. рис. 8.5-б)

Передаточную функцию найденного вида (3) можно легко реализовать, например, с помощью простой RC -цепочки, показанной на рис. 8.6, если выберем $RC = 1/\beta$.

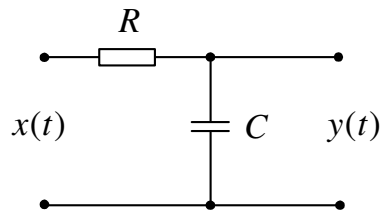


Рис. 8.6.

ФЛУКТУАЦИОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ В РАДИОТЕХНИКЕ

§ 9. Броуновское движение

Привлекая методы теории случайных функций для исследования флуктуационных явлений в электрических цепях, мы до сих пор не интересовались физической природой этих флуктуаций. В основном речь шла только о способах описания флуктуационных токов и напряжений с помощью абстрактных случайных процессов и о законах их преобразования при прохождении через простейшие радиотехнические цепи. Возникновение же этих флуктуаций может быть обусловлено различными физическими явлениями. Одной из самых распространенных причин флуктуаций в электрических цепях является хаотическое тепловое движение микроскопических носителей электрического заряда. Это тепловое движение приводит к флуктуациям макроскопических параметров – токов и напряжений в различных элементах цепи, точно так же, как столкновения с нейтральными атомами и молекулами являются причиной **броуновского движения** взвешенных в жидкости или газе макроскопических частиц. Дальше мы увидим, что отмеченная аналогия является настолько глубокой, что эти физические процессы описываются одними и теми же математическими уравнениями. Исследование же броуновского движения значительно проще в методическом отношении, так как основано только на простых уравнениях механики, а не электродинамики. Кроме того, описание броуновского движения значительно нагляднее и очевиднее в буквальном смысле – это движение действительно можно увидеть с помощью простейшего микроскопа. Впервые эти движения наблюдал в 1828 г. Роберт Браун, рассматривая в микроскоп взвешенную в воде пыльцу растений. Отдельные пылинки двигались в воде без всякой видимой причины, и создавалось впечатление, что они живые. Оказалось, что точно так же ведут себя частички буквально всех веществ, если только они достаточно малы.

9.1. Оценки скорости движения броуновской частицы

Попробуем оценить характерную скорость движения V броуновской частицы с массой M , которую она приобретает из-за столкновения с микроскопическими частицами (молекулами) с массой m (рис.9.1).

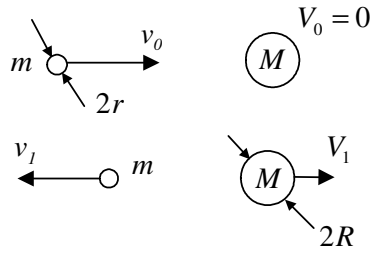


Рис. 9.1.

Запишем закон сохранения импульса для системы микро- и макрочастицы, рассматривая для простоты лобовое столкновение:

$$m v_0 + M V_0 = m v_1 + M V_1,$$

где v_0, V_0 и v_1, V_1 соответственно - значения скоростей микро- и макрочастиц до и после столкновения. Если до столкновения макрочастица M покоилась ($V_0 = 0$), то легкая микрочастица m ($m \ll M$), налетающая на макрочастицу со скоростью v_0 , отскочит в противоположном направлении приблизительно с той же скоростью $v_1 \approx -v_0$, как от бесконечно тяжелой стенки. При этом импульс частицы m становится равным $m v_1 \approx -m v_0$ и, следовательно, броуновская частица M приобретает в результате столкновения импульс

$$M V_1 \approx 2m v_0. \quad (9.1)$$

С целью упрощения записей в дальнейшем будем опускать индексы для рассматриваемых скоростей ($v_0 \equiv v$, $V_1 \equiv V$). Согласно (9.1) в результате лобового столкновения макроскопическая частица приобретает скорость

$$V \approx 2v \frac{m}{M}. \quad (9.2)$$

Характерная скорость движения v микрочастиц (молекул) определяется температурой T , при которой они находятся. Величину v можно оценить по средней кинетической энергии молекул

$$\frac{m v^2}{2} = \frac{3}{2} kT,$$

где $k = 11,38 \cdot 10^{-16}$ эрг/град – **постоянная Больцмана**. Полагая для оценок $m \approx 10^{-22}$ г, $T \approx 300$ К, получаем

$$v = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \approx 3 \cdot 10^4 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}. \quad (9.3)$$

Для оценки отношения масс m/M будем считать, что характерный линейный размер броуновской частицы приблизительно равен $R \approx 10^{-3}$ см, размер молекул $r \approx 10^{-7}$ см, а средняя "плотность" масс макро и микрочастиц примерно одинакова, так что

$$\frac{m}{M} \approx \left(\frac{r}{R}\right)^3 \approx 10^{-12}. \quad (9.4)$$

Подставляя (9.3) и (9.4) в (9.2), получаем **“механическую”** оценку:

$$V_{\text{мех}} \approx 6 \cdot 10^{-8} \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}, \quad (9.5)$$

которая более чем на три порядка оказывается меньше экспериментально наблюдаемой (визуально) величины $V_{\text{эксн}} \approx 6 \cdot 10^{-4} \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$. Ясно, что причина этого расхождения в том, что мы учли столкновение только с одной молекулой, а на самом деле они непрерывно бомбардируют крупную частицу, в результате чего она приобретает кинетическую энергию, равную средней тепловой энергии каждой молекулы (макрочастицу можно рассматривать как очень большую молекулу, находящуюся в термодинамическом равновесии с окружающей средой):

$$M \frac{V^2}{2} = m \frac{v^2}{2} = \frac{3}{2} kT.$$

Отсюда следует **“термодинамическая”** оценка:

$$V_{терм} = v \sqrt{\frac{m}{M}} \approx 3 \cdot 10^{-2} \text{ см/с.} \quad (9.6)$$

Результат этого расчета также является удручающим – он более чем на два порядка превосходит экспериментальное значение $V_{эксп} \approx 6 \cdot 10^{-4} \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$ (рис. 9.2).

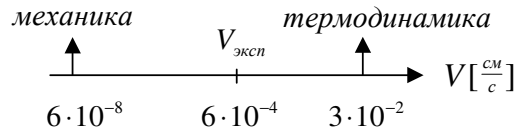


Рис. 9.2.

В чем же причина этих расхождений? Исчерпывающий ответ дает кинетическая теория броуновского движения, разработанная в начале нашего века Эйнштейном, Смолуховским (1905) и Ланжевром (1908). Некоторые вопросы этой теории мы рассмотрим в последующих разделах данного параграфа.

9.2. Аналогия между движением броуновской частицы и флуктуациями тока в электрической цепи

Для установления аналогии между движением броуновской частицы и флуктуациями в электрических цепях нам достаточно рассмотреть только одномерное движение частицы, например, вдоль оси OX . Пусть $x(t)$ – координата частицы в момент времени t . Движение частицы описывается вторым законом Ньютона:

$$M \frac{dV}{dt} = f(t), \quad (9.7)$$

где $V = dx/dt$, а $f(t)$ – **случайная сила**, действующая на частицу со стороны всех молекул. Ясно, что среднее значение этой силы, вообще говоря, отлично от нуля. Действительно, известно, что на макроскопический объект, движущийся в среде со скоростью V , действует регулярная сила трения $f_{тр}$, пропорциональная скорости V и противоположно ей направленная:

$$f_{тр} = -\gamma V. \quad (9.8)$$

Коэффициент пропорциональности γ между силой трения и скоростью называют **коэффициентом вязкого трения**. Например, для твердой сферической частицы радиуса R при ламинарном обтекании ее жидкостью с коэффициентом вязкости μ имеет место формула Стокса

$$\gamma = 6\pi\mu R. \quad (9.9)$$

Обозначим через $F(t)$ флуктуирующую часть случайной силы $f(t)$:

$$F(t) = f(t) - f_{mp}(t), \quad \langle F(t) \rangle = 0. \quad (9.10)$$

Используя (9.8), формулу (9.7) можно переписать в виде

$$M \frac{dV}{dt} + \gamma V = F(t). \quad (9.11)$$

Заметим теперь, что точно таким же уравнением описываются флуктуации силы тока $I(t)$ в простейшей электрической цепи, изображенной на рис. 9.3:

$$L \frac{dI}{dt} + RI = E(t). \quad (9.12)$$

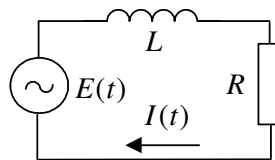


Рис. 9.3.

Здесь в роли случайной силы $F(t)$, вызывающей флуктуации скорости V броуновской частицы, выступает **случайная ЭДС** - $E(t)$, обязанная своим происхождением случайным движениям носителей заряда (электронов, ионов и т.д.). Сравнивая эти два уравнения, легко установить взаимно-однозначное соответствие между величинами,

относящимися к броуновскому движению и к флуктуациям в электрической цепи (см. рис. 9.3). Это соответствие представлено в виде табл. 9.1.

Таблица 9.1

Броуновское движение		Электрическая цепь	
Масса частицы	M	Индуктивность цепи	L
Коэффициент трения	γ	Активное сопротивление	R
Скорость частицы	$V(t)$	Сила тока	$I(t)$
Смещение частицы за время t	$x(t) = \int_0^t V(t') dt'$	Перенесенный заряд за время t	$q(t) = \int_0^t I(t') dt'$
Случайная сила	$F(t)$	Случайная ЭДС	$E(t)$

Исходя из найденной аналогии, **любые результаты, полученные при теоретическом анализе броуновского движения, могут быть перенесены в область тепловых флуктуаций в электрических цепях просто путем соответствующих переобозначений.** Если, например, мы сможем рассчитать дисперсию скорости σ_V^2 , то сразу же получим выражение для дисперсии тока σ_I^2 и т.д.

9.3. Анализ уравнения движения броуновской частицы

Обратимся теперь к решению уравнения (9.11). Разделим левую и правую части на M и введем обозначения: $\tau_M = M/\gamma$ - **время релаксации**, $a(t) = F(t)/M$ - **случайное ускорение**, которое приобретает макрочастица в результате столкновений с микрочастицами. После этого уравнение (9.11) приобретает вид:

$$\frac{dV}{dt} + \frac{V}{\tau_M} = a(t). \quad (9.13)$$

Согласно методу вариации произвольной постоянной сначала решаем однородное уравнение с $a(t) = 0$:

$$V(t) = Ce^{-t/\tau_M}.$$

Затем предполагаем, что постоянная интегрирования есть функция времени $t: C = C(t)$.

И, наконец, после подстановки искомого вида решения

$$V(t) = C(t)e^{-t/\tau_M} \quad (9.14)$$

в (9.13) получаем уравнение для неизвестной функции $C(t)$:

$$e^{-t/\tau_M} \frac{dC}{dt} = a(t). \quad (9.15)$$

Из (9.15) следует, что

$$C(t) = \int_0^t a(t')e^{t'/\tau_M} dt' + Const, \quad (9.16)$$

где $Const$ - постоянная интегрирования. Подставляя (9.16) в (9.14) с учетом начальных условий $V(t)|_{t=0} = V_0$, получаем окончательно:

$$V(t) = V_0 e^{-t/\tau_M} + \int_0^t \exp\left\{\frac{t'-t}{\tau_M}\right\} a(t') dt'. \quad (9.17)$$

Формула (9.17) решает так называемую динамическую часть поставленной задачи, устанавливая связь между интересующей нас скоростью частицы и случайной силой, действующей на нее. Функциональный вид ускорения $a(t)$, испытываемого броуновской частицей в результате столкновений с молекулами, нам, конечно, неизвестен. Поэтому мы не имеем возможности в явном виде вычислить входящий в (9.17) интеграл от $a(t)$. Мы можем пока только сказать, что $V(t)$, так же, как и $a(t)$, является случайной функцией времени и может быть описана только статистически. Таким образом, мы приходим к необходимости решения статистической задачи.

9.4. Определение статистических моментов флуктуаций скорости

Для вычисления моментов и спектра флуктуаций функции $V(t)$ необходимо иметь некоторую априорную информацию о статистических параметрах ускорения $a(t) = F(t)/M$ (случайной силы, действующей на частицу с единичной массой).

Во-первых, очевидно (в силу определения $F(t)$ по формуле (9.10)), что среднее значение ускорения $a(t)$ равно нулю, молекулы с равной вероятностью "толкают" броуновскую частицу как влево, так и вправо:

$$\langle a(t) \rangle = 0. \quad (9.18-a)$$

Во-вторых, если внешние макроскопические условия (давление, температура, плотность и т.д.) остаются постоянными, то **случайный процесс $a(t)$ является стационарным** и, следовательно, автокорреляционная функция ускорения зависит только от разности времен $t'' - t'$:

$$\langle a(t')a(t'') \rangle = B_a(t'' - t'). \quad (9.18-b)$$

Усредняя (9.17) по ансамблю реализаций случайной функции $a(t)$, получаем:

$$\langle V(t) \rangle = V_0 e^{-t/\tau_M} + \int_0^t \exp\left\{\frac{t' - t}{\tau_M}\right\} \langle a(t') \rangle dt' = V_0 e^{-t/\tau_M}. \quad (9.19)$$

Отсюда следует, что при любой начальной скорости частицы V_0 среднее значение $\langle V(t) \rangle$ при $t \rightarrow \infty$ стремится к нулю, причем характерное время этого процесса совпадает со временем релаксации τ_M . Вычитая (9.19) из (9.17), приходим к формуле для флуктуаций скорости δV :

$$\delta V(t) = V(t) - \langle V(t) \rangle = \int_0^t \exp\left\{\frac{t' - t}{\tau_M}\right\} a(t') dt'. \quad (9.20)$$

Возводя (9.20) в квадрат и усредняя, получаем выражение для **дисперсии** флуктуаций скорости:

$$\sigma_V^2(t) = \langle [\delta V(t)]^2 \rangle = \int_0^t dt' \int_0^t dt'' \exp \left\{ \frac{t' - t}{\tau_M} + \frac{t'' - t}{\tau_M} \right\} B_a(t'' - t'). \quad (9.21)$$

Скорость изменения по переменным t' и t'' экспоненциальных функций под знаком интеграла (9.21) определяется временем релаксации τ_M . Это макроскопическое время: оно характеризует, как мы видели из (9.19), инерцию тяжелой частицы в вязкой среде и тем больше, чем больше масса M броуновской частицы;. Характерное же время, с которым изменяется случайное ускорение $a(t)$, определяется временем τ_m столкновений отдельных молекул с макрочастицей. Это время намного меньше τ_M ($\tau_m \ll \tau_M$) и является по сути "микроскопическим". Отсюда следует, что время корреляции случайного процесса $a(t)$ можно считать пренебрежимо малым по сравнению с τ_M и, в результате, корреляционную функцию $B_a(t'' - t')$ под интегралом (9.21) можно заменить на δ - функцию:

$$B_a(t'' - t') = A\delta(t'' - t'). \quad (9.22)$$

Здесь A – неизвестная пока константа. Подставим (9.22) в (9.21) и выполним интегрирование:

$$\sigma_V^2(t) = A e^{-2t/\tau_M} \int_0^t e^{2t'/\tau_M} dt' = \frac{A\tau_M}{2} (1 - e^{-2t/\tau_M}). \quad (9.23)$$

Из (9.19) и (9.23) следует, что при $t \gg \tau_M$ средняя скорость макрочастицы $\bar{V} \rightarrow 0$, а дисперсия флуктуаций скорости σ_V^2 не зависит от времени и совпадает со средним квадратом скорости:

$$\sigma_V^2 = \langle (V - \bar{V})^2 \rangle = \overline{V^2} - \bar{V}^2 \approx \overline{V^2} = \frac{1}{2} A\tau_M. \quad (9.24)$$

С другой стороны, в состоянии термодинамического равновесия средняя кинетическая энергия ε_T частицы равна $\frac{1}{2}kT$ (в одномерном случае мы имеем дело с поступательным движением с одной степенью свободы, на которую и приходится энергия $\frac{1}{2}kT$):

$$\varepsilon_T = \frac{M\overline{V^2}}{2} = \frac{M\sigma_V^2}{2} = \frac{1}{2}kT. \quad (9.25)$$

Сравнивая (9.24) и (9.25), получаем для постоянной A следующее выражение:

$$A = \frac{2kT}{M\tau_M} = \frac{2kT}{M^2}\gamma. \quad (9.26)$$

Выясним теперь, как изменяется со временем средняя кинетическая энергия частицы. Учитывая, что согласно (9.24) $\overline{V^2} = \overline{V}^2 + \sigma_V^2$ и пользуясь формулами (9.19) и (9.23), получаем:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \frac{M}{2}(\overline{V^2} + \sigma_V^2) = \frac{M}{2} \left[V_0^2 e^{-2t/\tau_M} + \frac{kT}{M} (1 - e^{-2t/\tau_M}) \right] = \\ &= \left(\frac{MV_0^2}{2} - \frac{kT}{2} \right) e^{-2t/\tau_M} + \frac{kT}{2} = (\varepsilon_0 - \varepsilon_T) e^{-2t/\tau_M} + \varepsilon_T. \end{aligned} \quad (9.27)$$

Поведение $\varepsilon(t)$ для двух случаев, когда начальная кинетическая энергия частицы $\varepsilon_0 = MV_0^2/2$ больше или меньше средней тепловой энергии $\varepsilon_T = kT/2$ приведено на рис. 9.4.

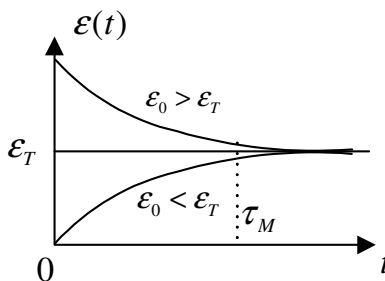


Рис. 9.4.

Видно, что время установления термодинамического равновесия между броуновской частицей и окружающей средой и есть время релаксации τ_M . Другими словами, за время τ_M частица либо отдает молекулам излишек своей первоначальной энергии ε_0 относительно средней тепловой ε_T (верхняя кривая на рис. 9.4), либо получает от них недостающую энергию до тепловой (нижняя кривая на рис. 9.4). Можно еще сказать, что за время τ_M частица "забывает" о своей начальной скорости благодаря многократным столкновениям с молекулами.

9.5. Статистические характеристики смещения частицы

Имея решение динамической задачи (9.17) для скорости $V(t)$, легко получить формулу и для смещения $x(t)$. Пусть в начальный момент времени $t=0$ частица находилась в точке $x=0$ и имела скорость V_0 . Тогда из определения $V = dx/dt$ следует:

$$x(t) = \int_0^t V(t') dt'. \quad (9.28)$$

Среднее значение смещения $\langle x(t) \rangle$ получается отсюда с помощью (9.19):

$$\langle x(t) \rangle = \int_0^t \langle V(t') \rangle dt' = V_0 \int_0^t e^{-t'/\tau_M} dt' = V_0 \tau_M (1 - e^{-t/\tau_M}). \quad (9.29)$$

Согласно (9.29) при $t \ll \tau_M$ столкновения с молекулами практически не влияют на движение макрочастицы. Она движется свободно и проходит в среднем путь

$$\langle x(t) \rangle \approx V_0 t \quad (t \ll \tau_M). \quad (9.30)$$

При $t \gg \tau_M$ это регулярное смещение замедляется (ср. с (9.19) и в пределе $t \rightarrow \infty$ вообще прекращается, так что за бесконечное время частица в среднем смещается на конечное расстояние:

$$\langle x(t) \rangle = V_0 \tau_M \quad (t \gg \tau_M). \quad (9.31)$$

Но благодаря флуктуации скорости происходят беспорядочные смещения частицы из "положения равновесия", так называемые случайные блуждания. Флуктуации смещения частицы δx из положения равновесия $\langle x \rangle$ определяем по формуле, следующей из (9.28) с учетом (9.20):

$$\begin{aligned}\delta x(t) &= x(t) - \langle x(t) \rangle = \int_0^t [V(t_1) - \bar{V}(t_1)] dt_1 = \\ &= \int_0^t \delta V(t_1) dt_1 = \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} \exp\left\{\frac{t' - t_1}{\tau_M}\right\} a(t') dt'.\end{aligned}\quad (9.32)$$

Интеграл по dt_1 легко вычисляем путем интегрирования по частям:

$$\begin{aligned}\delta x(t) &= \int_0^t e^{-t_1/\tau_M} dt_1 \int_0^{t_1} e^{t'/\tau_M} a(t') dt' = -\tau_M e^{-t_1/\tau_M} \int_0^{t_1} e^{t'/\tau_M} a(t') dt' \Bigg|_{t_1=0}^{t_1=t} + \\ &+ \tau_M \int_0^t a(t_1) dt_1 = \tau_M \int_0^t \left[1 - \exp\left\{-\frac{t' - t}{\tau_M}\right\}\right] a(t') dt'.\end{aligned}\quad (9.33)$$

После этого для дисперсии смещений с учетом (9.22) имеем

$$\begin{aligned}\sigma_x^2(t) &= \langle |\delta x(t)|^2 \rangle = \tau_M^2 \int_0^t \int_0^t dt' dt'' \left[1 - \exp\left\{-\frac{t' - t}{\tau_M}\right\}\right] \left[1 - \exp\left\{-\frac{t'' - t}{\tau_M}\right\}\right] B_a(t'' - t') = \\ &= A \tau_M^2 \int_0^t \left[1 - \exp\left\{-\frac{t' - t}{\tau_M}\right\}\right]^2 dt'.\end{aligned}\quad (9.34)$$

Вводя новую переменную интегрирования $z = (t' - t)/\tau_M$, получаем:

$$\sigma_x^2(t) = A \tau_M^3 \int_{-t/\tau_M}^0 [1 - e^z]^2 dz = A \tau_M^3 \left[\frac{t}{\tau_M} - \frac{3}{2} + 2e^{-t/\tau_M} - \frac{1}{2}e^{-2t/\tau_M} \right]. \quad (9.35)$$

Для малых времен, когда $t \ll \tau_M$, можно разложить экспоненциальные функции в (9.35) в ряд Тейлора (вплоть до членов третьего порядка малости по параметру $t/\tau_M \ll 1$). В результате получим

$$\sigma_x^2(t) = \frac{1}{3} At^3. \quad (9.36)$$

В обратном предельном случае $t \gg \tau_M$ в формуле (9.35) достаточно оставить только первое слагаемое:

$$\sigma_x^2(t) = A\tau_M^2 t = \frac{2kT}{\gamma} t. \quad (9.37)$$

Мы воспользовались выражением (9.26) для A и определением $\tau_M = M/\gamma$. Из полученных выше формул видно, что случайный процесс $x(t)$ заведомо является нестационарным, так как его дисперсия σ_x^2 возрастает со временем: сначала по кубическому закону $\propto t^3$, а затем по линейному $\propto t$ (рис. 9.5).

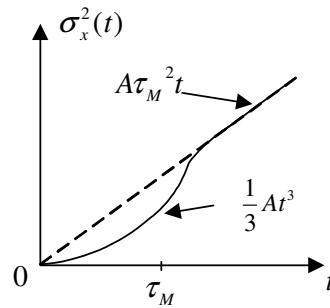


Рис. 9.5.

9.6. Плотности распределения вероятностей скорости и смещения частицы

Дифференциальным уравнением (9.13) и формулой (9.28) определяются две случайные функции $V(t)$ и $x(t)$. Проведенные выше вычисления позволили нам определить только первые два момента этих случайных функций, вопрос же о виде плотностей распределения вероятностей $W(V,t)$ и $W(x,t)$ пока оставался открытым. Обратимся к формуле (9.20), из которой видно, что в каждый момент времени t

флуктуация скорости $\delta V(t)$ может быть представлена как сумма (в пределе - интеграл) большого числа независимых слагаемых - толчков, испытываемых броуновской частицей со стороны молекул за время t . Так как τ_M - макроскопическое время, то число таких толчков огромно, а сила каждого из них в среднем одинакова: мы предположили, что ускорения $a(t)$ являются стационарным процессом. Это позволяет воспользоваться центральной предельной теоремой и утверждать, что функция $\delta V(t)$ распределена по нормальному закону, который при $t \gg \tau_M$ (когда $\langle V(t) \rangle = 0$ и $\delta V \approx V$) имеет вид

$$W(V) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_V} e^{-V^2/2\sigma_V^2}.$$

Если учесть теперь, что согласно (9.24) $\sigma_V^2 = A\tau_M/2 = kT/M$, то мы приходим к распределению

$$W(V) = \sqrt{\frac{M}{2\pi kT}} \exp\left\{-\frac{MV^2}{2kT}\right\}, \quad (9.38)$$

которое есть ничто иное, как **распределение Максвелла** для скоростей частиц в системе при одномерном движении.

Случайный процесс $x(t)$ связан с нормальным случайным процессом $V(t)$ линейным преобразованием (9.28) и, следовательно, также имеет нормальное распределение:

$$W(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma_x^2}}. \quad (9.39)$$

При $t \gg \tau_M$ из (9.37) следует:

$$\sigma_x^2 = Dt,$$

где $D = 2kT/\gamma$ имеет смысл **коэффициента диффузии**. Действительно, легко убедиться, что (9.39) является решением одномерного уравнения

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{2} D \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \quad (9.40)$$

которое называется **уравнением диффузии**. Обычный вывод (9.40) основан на феноменологических соображениях и по своей сути является макроскопическим. Примененный же нами микроскопический подход, основанный на решении уравнений движения (9.13), позволяет связать коэффициент диффузии D с физическими параметрами среды - ее температурой и вязкостью.

9.7. Энергетический спектр флуктуаций скорости броуновской частицы

Для объяснения наблюдаемой величины $V_{эксн}$ вычислим энергетический спектр флуктуаций скорости броуновской частицы. Как было показано выше, при $t \gg \tau_M$ средняя скорость макрочастицы стремится к нулю ($\bar{V} \rightarrow 0$), а дисперсия перестает зависеть от времени ($\sigma_V^2 = Const$). Это говорит о том, что случайный процесс $V(t)$ для таких времен можно считать стационарным (по крайней мере, в широком смысле) и к нему применим спектральный анализ, рассмотренный в §6. Из уравнения (9.11) для Фурье-компонент получим следующее соотношение:

$$(i\omega M + \gamma)C_V(\omega) = C_F(\omega), \quad (9.41)$$

откуда

$$C_V(\omega) = \frac{C_F(\omega)}{i\omega M + \gamma}.$$

Построим теперь коррелятор Фурье - компонент

$$\langle C_V(\omega') C_V^*(\omega'') \rangle = \frac{\langle C_F(\omega') C_F^*(\omega'') \rangle}{(i\omega' M + \gamma)(-i\omega'' M + \gamma)}. \quad (9.42)$$

Для стационарного процесса

$$\langle C_F(\omega')C_F^*(\omega'') \rangle = S_F(\omega')\delta(\omega' - \omega''),$$

где $S_F(\omega)$ - энергетический спектр силы. Из δ - коррелированности правой части (9.42) следует, что и в левой части также должен стоять δ - коррелятор вида $\langle C_V(\omega')C_V^*(\omega'') \rangle = S_V(\omega')\delta(\omega' - \omega'')$. Отсюда находим энергетический спектр скорости $S_V(\omega)$ броуновской частицы:

$$S_V(\omega) = \frac{S_F(\omega)}{(\omega^2 M^2 + \gamma^2)}. \quad (9.43)$$

Энергетический спектр силы $S_F(\omega)$ с помощью формулы Винера-Хинчина определяется через автокорреляционную функцию $B_F(\tau) = \langle F(t)F(t+\tau) \rangle$:

$$S_F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_F(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (9.44)$$

В свою очередь, с учетом связи между силой и ускорением $a(t) = F(t)/M$ согласно (9.22) имеем

$$B_F(\tau) = M^2 B_a(\tau) = AM^2 \delta(\tau) = 2kT\gamma\delta(\tau). \quad (9.45)$$

Следовательно,

$$S_F(\omega) = \frac{kT}{\pi} \gamma, \quad (9.46)$$

и энергетический спектр скорости (9.43) определяется как

$$S_V(\omega) = \frac{kT}{\pi\gamma} \frac{1}{1 + \omega^2 \tau_M^2}, \quad (9.47)$$

где $\tau_M = M/\gamma$.

Теперь мы в состоянии ответить на вопрос: почему оценки скорости броуновской частицы, проведенные в начале параграфа на основе термодинамического подхода и приведшие к формуле (9.6), дают значения, более чем на два порядка превышающие экспериментально наблюдаемые. Анализ найденного нами энергетического спектра $S_V(\omega)$ показывает, что он простирается до очень больших частот $\omega = \omega_M \approx 1/\tau_M \approx 10^5 \text{ c}^{-1}$. С другой стороны, в качестве регистрирующего устройства в эксперименте выступает человеческий глаз, который обладает достаточно большой инерционностью. Он фиксирует лишь медленные перемещения броуновской частицы и не фиксирует быстрые. Характерное время фиксации глазом перемещения можно оценить как $\tau_{\text{гл}} \approx 1/16 \text{ c}$ (при частоте 16 и более кадров в секунду мы уже не различаем отдельных кадров - движение на экране нам кажется непрерывным). В этом смысле наш глаз, как прибор, регистрирующий смещения броуновской частицы, можно уподобить некоторой линейной системе (фильтру нижних частот) с передаточной функцией $K(i\omega)$. Для линейных систем энергетический спектр на выходе $S_{V_{\text{набл}}}(\omega)$ (спектр наблюдаемых флуктуаций скорости $V_{\text{набл}} \equiv V_{\text{эксн}}$) связан со спектром входного сигнала $S_V(\omega)$ соотношением (7.25):

$$S_{V_{\text{набл}}}(\omega) = |K(i\omega)|^2 S_V(\omega). \quad (9.48)$$

Для простоты положим, что

$$|K(i\omega)| = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 \leq \omega \leq \omega_{\text{гл}}; \\ 0, & \text{при } \omega > \omega_{\text{гл}}; \end{cases}$$

где $\omega_{\text{гл}} \approx 1/\tau_{\text{гл}} \approx 10 \text{ c}^{-1}$ - верхняя частота фиксации глазом движения. В результате, для дисперсии флуктуаций наблюдаемой скорости приходим к следующему выражению:

$$\sigma_{V_{\text{набл}}}^2 = 2 \int_0^{\infty} S_{V_{\text{набл}}}(\omega) d\omega = 2 \int_0^{\omega_{\text{гл}}} S_V(\omega) d\omega = \frac{2kT}{\pi\gamma} \int_0^{\omega_{\text{гл}}} \frac{d\omega}{1 + \omega^2 \tau_M^2}. \quad (9.49)$$

Так как $\omega_{\text{эл}}\tau_M \ll 10^{-4} \ll 1$, подынтегральную функцию в (9.49) можно заменить единицей, и мы получаем оценку

$$\sigma_{V_{\text{набл}}}^2 = \frac{2kT}{\pi\gamma} \omega_{\text{эл}} = \frac{2}{\pi} \sigma_V^2 \omega_{\text{эл}} \tau_M \quad (9.50)$$

(мы учли, что $\gamma = M/\tau_M$ и $\sigma_V^2 = kT/M$).

Таким образом, наблюдаемые характерные значения скорости $V_{\text{набл}} \approx \sigma_{V_{\text{набл}}}$ отличаются от тепловой (термодинамической) $V_{\text{терм}} = \sqrt{\sigma_V^2} = \sqrt{kT/M}$ на величину

$$V_{\text{набл}} \approx V_{\text{терм}} \sqrt{\omega_{\text{эл}}\tau_M} \approx 10^{-2} V_{\text{терм}} \approx 3 \cdot 10^{-4} \text{ см/с}. \quad (9.51)$$

Этот результат находится в хорошем согласии с экспериментом, как видно из рис. 9.2.

Полученную из уравнений механики оценку (9.5) для скорости $V_{\text{мех}} \approx 6 \cdot 10^{-8} \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$ также можно подправить, если учесть, что в каждый момент времени с броуновской частицей сталкивается не одна, а много (N) молекул, так что результирующая скорость

$$V = \sum_{i=1}^N V_i, \quad (9.52)$$

где V_i - изменение скорости броуновской частицы за счет столкновения с одной молекулой, определяемое по формуле (9.2). Так как столкновения молекул можно считать независимыми и средние значения скоростей V_i равными нулю ($\langle V_i \rangle = 0$), то для дисперсии суммы (9.52) имеем:

$$\sigma_V^2 = N \sigma_{V_i}^2, \quad \text{где } \sigma_{V_i} \approx V_{\text{мех}} \approx 2\nu \frac{m}{M} \approx 6 \cdot 10^{-8} \text{ см/с}. \quad (9.53)$$

Следовательно, наблюдаемая скорость $V_{\text{набл}} \approx V_{\text{мех}} \sqrt{N}$. Число же молекул N , одновременно сталкивающихся с частицей, можно грубо оценить как отношение их площадей поперечного сечения:

$$N \approx \left(\frac{R}{r}\right)^2 \approx 10^8 \quad (9.54)$$

(для оценок так же, как и в (9.4) мы выбирали значения $R \approx 10^{-3} \text{ см}$ и $r \approx 10^{-7} \text{ см}$). Таким образом, $V_{\text{набл}} \approx 10^4 V_{\text{мех}} \approx 6 \cdot 10^{-4} \text{ см/с}$, что также хорошо соответствует экспериментальным данным.

ЗАДАЧИ

1. Используя законы сохранения импульса и энергии, показать, что формула (9.1) справедлива только при $\frac{m}{M} \ll 1$.

Решение. Из закона сохранения импульса при начальной скорости макрочастицы $V_0 = 0$ следует

$$mv_0 = mv_1 + MV_1. \quad (1)$$

Здесь v_0 и v_1 – скорости микроскопической частицы до и после соударения соответственно. Из (1) определяем квадрат скорости макрочастицы после соударения:

$$V_1^2 = \left(\frac{m}{M}\right)^2 (v_0 - v_1)^2. \quad (2)$$

Запишем теперь закон сохранения энергии для данной системы:

$$mv_0^2 = mv_1^2 + MV_1^2. \quad (3)$$

Из (3) находим

$$V_1^2 = \frac{m}{M} (v_0^2 - v_1^2) = \frac{m}{M} (v_0 + v_1) (v_0 - v_1). \quad (4)$$

Приравнивая правые части (2) и (4), имеем:

$$\begin{aligned} \left(\frac{m}{M}\right)^2 (v_0 - v_1)^2 &= \frac{m}{M} (v_0 + v_1) (v_0 - v_1), \\ \frac{m}{M} v_0 - \frac{m}{M} v_1 &= v_0 + v_1, \\ -v_0 \left(1 - \frac{m}{M}\right) &= v_1 \left(1 + \frac{m}{M}\right). \end{aligned} \quad (5)$$

При $\frac{m}{M} \ll 1$ из выражения (5) получаем $v_1 \approx -v_0$.

2. Вычислить дисперсию флуктуаций скорости частицы для одномерного броуновского движения, считая, что автокорреляционная функция (АКФ) случайного ускорения гауссова:

$$B_a(\tau) = \overline{a(t'')a(t')} = \sigma_a^2 \exp\left(-\frac{\tau^2}{T_a^2}\right), \quad (1)$$

где $\sigma_a^2 = \overline{a^2}$ - дисперсия, T_a - характерный масштаб убывания АКФ случайного ускорения $a(t)$, а $\tau = t'' - t'$.

Решение. Воспользуемся формулой (9.21) для дисперсии флуктуаций скорости броуновской частицы

$$\sigma_V^2(t) = \int_0^t dt' \int_0^t dt'' \exp\left\{-\frac{2t}{\tau_M} + \frac{t' + t''}{\tau_M}\right\} B_a(t'' - t') \quad (2)$$

и перейдем в ней к новым суммарным $q = t' + t''$ и разностным $\tau = t'' - t'$ переменным. При этом, как легко показать, якобиан перехода I равен

$$I = \frac{\partial(t', t'')}{\partial(q, \tau)} = \begin{vmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{vmatrix} = 1/2. \quad (3)$$

Отсюда в новых переменных выражение (2) записывается так:

$$\begin{aligned}
\sigma_V^2(t) &= \frac{e^{-2t/\tau_M}}{2} \left\{ \int_{-t}^0 B_a(\tau) d\tau \int_{-\tau}^{\tau+2t} e^{q/\tau_M} dq + \int_0^t B_a(\tau) d\tau \int_{\tau}^{-\tau+2t} e^{q/\tau_M} dq \right\} = \\
&= \frac{\tau_M}{2} e^{-2t/\tau_M} \left\{ \int_{-t}^0 B_a(\tau) \left[e^{(\tau+2t)/\tau_M} - e^{-\tau/\tau_M} \right] d\tau + \int_0^t B_a(\tau) \left[e^{(-\tau+2t)/\tau_M} - e^{\tau/\tau_M} \right] d\tau \right\} = \\
&= \tau_M e^{-2t/\tau_M} \int_0^t B_a(\tau) \left[e^{(-\tau+2t)/\tau_M} - e^{\tau/\tau_M} \right] d\tau = \\
&= \tau_M \left\{ \int_0^t B_a(\tau) e^{-\tau/\tau_M} d\tau - e^{-2t/\tau_M} \int_0^t B_a(\tau) e^{\tau/\tau_M} d\tau \right\}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Подставив в (4) конкретный вид АКФ (1) случайного ускорения, получим

$$\sigma_V^2(t) = \sigma_a^2 \tau_M \left\{ \int_0^t e^{-\tau^2/T_a^2 - \tau/\tau_M} d\tau - e^{-2t/\tau_M} \int_0^t e^{-\tau^2/T_a^2 + \tau/\tau_M} d\tau \right\}. \tag{5}$$

По определению T_a - это характерное время изменения АКФ $B_a(\tau)$. Оно определяется временем столкновений отдельных молекул с броуновской макрочастицей. Время же τ_M - есть характерное время релаксации скорости макрочастицы. Поэтому всегда можно считать выполненным условие $\tau_M \gg T_a$. При этом в интегралах (5) можно в показателях экспонент пренебречь слагаемыми $\pm \tau/\tau_M$: $e^{-\tau^2/T_a^2 \pm \tau/\tau_M} \approx e^{-\tau^2/T_a^2}$. Если к тому же мы будем рассматривать времена $t \gg \tau_M$ ($T_a \ll \tau_M \ll t$), то вычисление интегралов можно проводить в бесконечных пределах. В результате получим

$$\sigma_V^2(t) \approx \sigma_a^2 \tau_M \left(1 - e^{-2t/\tau_M}\right) \int_0^\infty e^{-\rho^2/T_a^2} d\rho = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sigma_a^2 T_a \tau_M \left(1 - e^{-2t/\tau_M}\right). \tag{6}$$

Учитывая далее, что $t \gg \tau_M$, окончательно получим

$$\sigma_V^2 \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sigma_a^2 T_a \tau_M.$$

§ 10. Тепловые флуктуации в электрических цепях

Отмеченная в предыдущем параграфе аналогия между тепловыми флуктуациями в электрических цепях и случайными смещениями броуновских частиц (см. таблицу 9.1) позволяет, воспользовавшись формулами $\sigma_V^2 = kT/M$ и $\sigma_x^2 = 2kTt/\gamma$, сразу написать формулы для дисперсии флуктуаций тока $I(t)$ и переносимого электрического заряда $q(t)$ в цепи, изображенной на рис. 9.3:

$$\sigma_I^2 = \frac{kT}{L}, \quad (10.1)$$

$$\sigma_q^2 = \frac{2kT}{R} t. \quad (10.2)$$

Эти и следующие ниже формулы относятся к достаточно большим значениям времени t , намного превышающим время релаксации $\tau_0 = L/R$ (**постоянную времени** цепи), когда всеми переходными процессами можно пренебречь и, не ограничивая общности полученных ниже результатов, считать, что

$$\bar{I}(t) = \frac{d\bar{q}(t)}{dt} = 0. \quad (10.3)$$

10.1. Формула Найквиста

Средняя мощность тепловых флуктуаций тока, выделяемая на сопротивлении R , равна

$$P = R \langle I^2 \rangle = R \sigma_I^2 = \frac{kTR}{L}. \quad (10.4)$$

Так как все реальные радиотехнические устройства имеют конечную ширину полосы пропускаемых частот, то, естественно, возникает вопрос о том, в какой полосе частот выделяется мощность P , определяемая формулой (10.4)? Для ответа на поставленный вопрос необходимо рассчитать **энергетический спектр флуктуаций тока**

$$S_I(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle I(t)I(t+\tau) \rangle e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad (10.5)$$

через который полная мощность P выражается формулой

$$P = R\sigma_I^2 = R \int_{-\infty}^{\infty} S_I(\omega) d\omega = R \int_0^{\infty} S_I^{(+)}(\omega) d\omega, \quad (10.6)$$

где мы ввели энергетический спектр положительных частот:

$$S_I^{(+)} = \begin{cases} 2S_I, & \omega \geq 0; \\ 0, & \omega < 0. \end{cases}$$

Мощность, выделяемая в полосе частот от ω до $\omega + d\omega$, равна

$$S_P(\omega) d\omega = R S_I^{(+)}(\omega) d\omega. \quad (10.7)$$

Таким образом, полную мощность, выделяемую на сопротивлении R , можно определить в виде интеграла

$$P = \int_0^{\infty} S_P(\omega) d\omega \quad (10.8)$$

Для определения энергетического спектра $S_I(\omega)$ флуктуаций тока в цепи воспользуемся законом Кирхгофа (см. 9.12 и рис. 9.3):

$$L \frac{dI}{dt} + RI = E(t), \quad (10.9)$$

который для Фурье-компонент имеет вид

$$(i\omega L + R)C_I(\omega) = C_E(\omega). \quad (10.10)$$

Здесь $C_I(\omega)$ и $C_E(\omega)$ - соответственно Фурье-трансформанты тока $I(t)$ и ЭДС в цепи $E(t)$. Введем в рассмотрение **комплексное сопротивление (импеданс)** цепи:

$$Z(i\omega) = i\omega L + R. \quad (10.11)$$

Тогда из (10.10) следует, что

$$C_I(\omega) = \frac{C_E(\omega)}{Z(i\omega)}. \quad (10.12)$$

Формула (10.12), являясь следствием закона Ома в комплексной форме, справедлива не только для простейшей электрической цепи, представленной на рис. 9.3, а и в самом общем случае квазистационарных электрических цепей, для которых $Z(i\omega)$ может иметь намного более сложный вид, чем (10.11). Формула (10.12) совпадает с выражением (7.22), которым описываются преобразования сигналов в произвольных линейных системах, причем роль передаточной функции $K(i\omega)$ играет отношение $1/Z(i\omega)$. Воспользовавшись (7.25), получаем связь между энергетическим спектром флуктуации тока $S_I(\omega)$ и случайной ЭДС $S_E(\omega)$:

$$S_I(\omega) = \frac{S_E(\omega)}{|Z(i\omega)|^2}. \quad (10.13)$$

Для определения спектра $S_E(\omega)$ вспомним, что $E(t)$ в случае броуновского движения соответствовала случайная сила $F(t) = Ma(t)$, корреляционная функция которой имела вид (см. формулы (9.22) и (9.45)):

$$\langle F(t')F(t'') \rangle = M^2 \langle a(t')a(t'') \rangle = AM^2 \delta(t'' - t') = AM^2 \delta(\tau),$$

а энергетический спектр $S_F(\omega)$ определялся формулой (9.46):

$$S_F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle F(t)F(t+\tau) \rangle e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{AM^2}{2\pi} = \frac{kT}{\pi} \gamma. \quad (10.14)$$

Учитывая, что коэффициенту трения γ соответствует активное сопротивление R в простейшей цепи, представленной на рисунке 9.3, а в общем случае под R следует понимать $\text{Re}Z(i\omega)$, из (10.14) получаем **формулу Найквиста** для энергетического спектра тепловых флуктуаций случайных ЭДС в электрических цепях:

$$S_E(\omega) = \frac{kT}{\pi} \cdot \text{Re}Z(i\omega). \quad (10.15)$$

Подставляя эту формулу в (10.13), получаем

$$S_I(\omega) = \frac{kT}{\pi} \cdot \frac{\text{Re}Z(i\omega)}{|Z(i\omega)|^2}. \quad (10.16)$$

Для простейшей цепи, изображенной на рис. 9.3, эти формулы приобретают вид:

$$S_E = \frac{kT}{\pi} R, \quad (10.17-a)$$

$$S_I(\omega) = \frac{kT}{\pi R} \cdot \frac{1}{1 + \omega^2 \tau_0^2}. \quad (10.17-b)$$

Здесь $\tau_0 = L/R$ - **постоянная времени цепи**. Таким образом, спектр $S_E(\omega)$ оказывается постоянным на всех частотах (и, следовательно, $E(t)$ является белым шумом), а спектр флуктуации тока $S_I(\omega)$ сосредоточен в полосе частот $|\omega| \leq 1/\tau_0$. На рис. 10.1 схематически изображен спектр $S_I(\omega)$ в области $\omega > 0$.

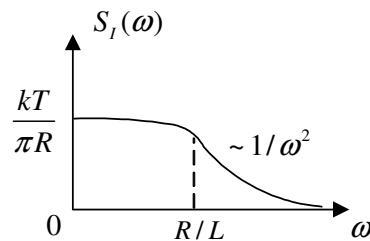


Рис. 10.1.

Видно, что на высоких частотах ($\omega\tau_0 \gg 1$) спектр $S_I(\omega)$ достаточно быстро убывает как $S_I(\omega) \propto \omega^{-2}$.

Определим теперь дисперсию флуктуаций тока, вычисляя площадь под спектральной кривой $S_I(\omega)$:

$$\sigma_I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_I(\omega) d\omega = \frac{kT}{\pi R} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{1 + \omega^2 \tau_0^2} = \frac{kT}{L}. \quad (10.18)$$

Этот результат, как и следовало ожидать, совпадает с (10.1).

Формула (10.17-а) для $S_E(\omega)$ при внимательном рассмотрении может вызвать недоумение: из нее следует, что при $R \rightarrow \infty$ спектральная плотность $S_E(\omega)$ также стремится к бесконечности, т.е. в разомкнутой цепи ($R \rightarrow \infty$) должны возникать бесконечно большие флуктуации ЭДС. Для разрешения этого парадокса следует учесть, что любое сопротивление R имеет собственную индуктивность L и собственную емкость C , причем собственной емкостью шунтирует активное сопротивление, как показано на рис. 10.2.

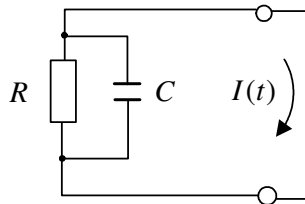


Рис. 10.2.

Импеданс такой цепи рассчитывается как полное сопротивление при параллельном соединении элементов:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + i\omega C. \quad (10.19)$$

Отсюда получаем

$$Z(i\omega) = \frac{R}{1 + i\omega RC},$$

$$\operatorname{Re} Z(i\omega) = \frac{R}{1 + \omega^2 R^2 C^2}. \quad (10.20)$$

Для цепи, изображенной на рис 10.2, имеем, следовательно:

$$S_E(\omega) = \frac{kT}{\pi} \cdot \frac{R}{1 + \omega^2 R^2 C^2}, \quad S_I(\omega) = \frac{kT}{\pi R}. \quad (10.21)$$

Таким образом, при $R \rightarrow \infty$ $S_E(\omega)$ и $S_I(\omega)$ обращаются в нуль, как и должно быть для разомкнутой цепи.

10.2. Спектральный анализ процессов со стационарным приращением

Энергетический спектр флуктуаций заряда $q(t)$, переносимого через LR -цепь (см. рис.9.3), можно найти, если учесть, что по определению:

$$I(t) = \frac{dq(t)}{dt}. \quad (10.22)$$

Следовательно, Фурье-компоненты тока - $C_I(\omega)$ и заряда - $C_q(\omega)$ связаны соотношением $C_I(\omega) = i\omega C_q(\omega)$, откуда вытекает связь между энергетическими спектрами $S_I(\omega)$ и $S_q(\omega)$ (ср. с формулой (7.36)):

$$S_q(\omega) = \frac{S_I(\omega)}{\omega^2} = \frac{kT}{\pi R} \cdot \frac{R}{\omega^2(1 + \omega^2 \tau^2)}. \quad (10.23)$$

Попытка вычислить дисперсию σ_q^2 флуктуаций заряда $q(t)$ путем интегрирования $S_q(\omega)$ по всем частотам ω приводит к расходимости, т.е. $\sigma_q^2 \rightarrow \infty$. Этот результат не должен нас удивлять: аналогом $q(t)$ в задаче о броуновском движении является нестационарный процесс - смещение $x(t)$, дисперсия которого растет со временем как $\sigma_x^2 = Dt$. Таким образом, мы приходим к выводу о том, что и процесс $q(t)$ является нестационарным. В свою очередь, известно, что для расчета дисперсии σ_ξ^2 нестационарного процесса $\xi(t)$ нельзя использовать формулу

$$\sigma_{\xi}^2 = B_{\xi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}(\omega) d\omega,$$

которая справедлива только для стационарных процессов.

Предполагая для простоты, что в начальный момент времени ($t=0$) заряд $q(t) = 0$, перепишем формулу (10.22) в виде

$$q(t) = \int_0^t I(t_1) dt_1. \quad (10.24)$$

Согласно (10.24) заряд $q(t)$ - есть интеграл от стационарного процесса $I(t)$, т.е. приращение $I(t)\Delta t$ процесса $q(t)$ за конечное (фиксированное) время Δt есть стационарный процесс. Такой процесс, как было показано в §5, называется **процессом со стационарным приращением**, и для его анализа необходимо пользоваться структурной функцией $D_q(\tau)$, так как автокорреляционной функции, и, следовательно, дисперсии такого процесса не существует. Тем не менее, структурная функция для $q(t)$ оказывается конечной и зависящей только от разности времен $\tau = t - t'$:

$$\langle [q(t) - q(t')]^2 \rangle = D_q(t - t') = D_q(\tau). \quad (10.25)$$

Чтобы убедиться в этом, выразим (10.25) через корреляционную функцию тока $B_I(\tau)$:

$$\langle [q(t) - q(t')]^2 \rangle = \left\langle \left[\int_{t'}^t I(t_1) dt_1 \right]^2 \right\rangle = \int_{t'}^t dt_1 \int_{t'}^t dt_2 \langle I(t_1) I(t_2) \rangle = \int_{t'}^t dt_1 \int_{t'}^t dt_2 B_I(t_2 - t_1). \quad (10.26)$$

После замены переменных интегрирования $\tau' = t_2 - t_1$ и $\tau'' = t_1 - t'$ получим

$$\langle [q(t) - q(t')]^2 \rangle = \int_0^{t-t'} d\tau'' \int_{-\tau''}^{t-t'-\tau''} d\tau' B_I(\tau') = D_q(t - t') = D_q(\tau). \quad (10.27)$$

Установим теперь связь между структурной функцией $D_q(\tau)$ и энергетическим спектром $S_q(\omega)$ нестационарного процесса $q(t)$. Учитывая, что стационарный процесс является частным случаем более общего процесса со стационарным приращением (но не наоборот), эту связь удобнее всего проследить на примере стационарного процесса $\xi(t)$. Согласно (5.29) структурная $D_\xi(\tau)$ и корреляционная $B_\xi(\tau)$ функции стационарного процесса $\xi(t)$ связаны следующим соотношением:

$$D_\xi(\tau) = 2[\sigma_\xi^2 - B_\xi(\tau)].$$

Подставляя сюда представления дисперсии σ_ξ^2 и корреляционной функции $B_\xi(\tau)$ через энергетический спектр $S_\xi(\omega)$, получаем

$$\begin{aligned} D_\xi(\tau) &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} [1 - e^{i\omega\tau}] S_\xi(\omega) d\omega = \\ &= 8 \int_0^{\infty} S_\xi(\omega) \sin^2 \frac{\omega\tau}{2} d\omega \end{aligned} \quad (10.28)$$

(мы воспользовались четностью $S_\xi(\omega)$). Продифференцируем верхнюю строчку в (10.28) по τ

$$\frac{dD_\xi}{d\tau} = -2i \int_{-\infty}^{\infty} \omega S_\xi(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (10.29)$$

Применяя теперь обратное преобразование Фурье, получим представление энергетического спектра $S_\xi(\omega)$ через производную от структурной функции $dD_\xi/d\tau$:

$$S_\xi(\omega) = \frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{\infty} \frac{dD_\xi}{d\tau} \sin \omega\tau d\tau. \quad (10.30)$$

При выводе (10.30) мы учли, что $D_\xi(\tau)$ есть четная функция.

Формулы (10.28) и (10.30) оказываются справедливыми и для широкого круга нестационарных процессов, а именно: процессов со стационарными (первыми) приращениями. Их можно рассматривать как определение связи между структурными функциями $D_\xi(\tau)$ и энергетическими спектрами $S_\xi(\omega)$. Удобство использования формул (10.28) и (10.30) заключается в том, что они позволяют анализировать нестационарные процессы, имеющие особенности в энергетических спектрах. Так, например, особенность типа ω^{-2} в спектре $S_q(\omega)$ (10.23) при $\omega \rightarrow 0$ компенсируется обращением в ноль множителя $\sin^2 \frac{\omega\tau}{2}$. При этом расходимости интеграла в (10.28) не происходит.

10.3. Анализ тепловых флуктуаций в колебательном контуре

Проанализируем изображенный на рис. 10.3 колебательный контур по изложенной выше схеме. Вначале определим импеданс цепи:

$$Z(i\omega) = i\omega L + \frac{1}{iC\omega} + R \quad (10.31)$$

и квадрат его модуля:

$$|Z(i\omega)|^2 = R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2. \quad (10.32)$$

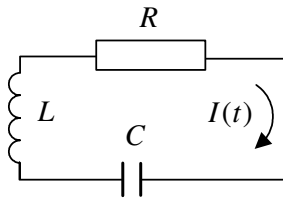


Рис. 10.3.

Подставляя эту формулу в (10.16) и учитывая, что $\text{Re} Z(i\omega) = R$, получаем для энергетического спектра флуктуаций тока в контуре следующее выражение:

$$S_I(\omega) = \frac{kT}{\pi} \cdot \frac{R}{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2} = \frac{kT}{\pi R} \cdot \frac{\omega^2}{\tau_0^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2}. \quad (10.33)$$

Схематический график функции $S_I(\omega)$ представлен на рис. 10.4.

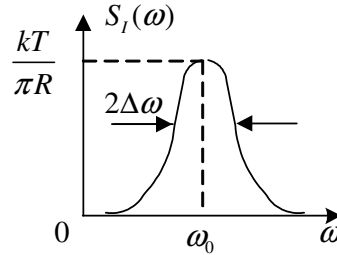


Рис. 10.4.

Видно, что максимум тепловых шумов приходится на собственную резонансную частоту контура $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, значение $S_I(\omega)$ в максимуме равно $kT/\pi R$, а ширина кривой вблизи максимума $\Delta\omega \approx 1/\tau_0$, где $\tau_0 = L/R$ - постоянная времени контура. Таким образом, спектр собственных тепловых шумов оказывается сосредоточенным именно в той области частот $\omega = \omega_0$, где этот контур и призван работать, например, как полосовой фильтр. Интегрируя формулу (10.33) по всем частотам ω , можно найти дисперсию флуктуации σ_I^2 , которая как и LR -цепи, оказывается равной kT/L . Отсюда находим, что средняя энергия магнитного поля, запасенная в контуре (точнее - в индуктивности L), равна

$$W_L = \frac{L}{2} \langle I^2 \rangle = \frac{L}{2} \sigma_I^2 = \frac{L}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S_I(\omega) d\omega = \frac{kT}{2}. \quad (10.34)$$

Этот результат согласуется с тем, что среднее значение кинетической энергии в системе с одной степенью свободы в состоянии термодинамического равновесия равно $kT/2$. Путем аналогичных вычислений можно убедиться в том, что средняя энергия электрического поля W_C , запасенная в емкости C , также равна $kT/2$:

$$W_C = \frac{\langle q^2 \rangle}{2C} = \frac{kT}{2}. \quad (10.35)$$

При этом дисперсия флуктуаций заряда $\sigma_q^2 = \langle q^2 \rangle$, в отличие от рассмотренного ранее примера LR -цепи, оказывается конечной за счет того, что на низких частотах $S_I(\omega) \sim \omega^2$, и интеграл по частотам ω от $S_q(\omega) = S_I(\omega)/\omega^2$ уже не расходится:

$$\sigma_q^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_I(\omega) \frac{d\omega}{\omega^2} = kTC. \quad (10.36)$$

Физическая причина такого различия, по сравнению с LR -цепью также совершенно очевидна: расходимость интеграла от спектральной зависимости вида (10.23) была связана с особенностью спектра флуктуации $S_q(\omega)$ при $\omega \rightarrow 0$, т.е. с прохождением постоянного тока, а в контуре (см. рис. 10.3) за счет последовательного включения в цепь емкости C постоянный ток вообще течь не может. Поэтому $S_q(\omega) \sim \omega^2 \rightarrow 0$ при $\omega \rightarrow 0$.

Так как разность потенциалов U между обкладками конденсатора равна q/C , то дисперсия ее флуктуаций определяется простой формулой, следующей из (10.36):

$$\sigma_U^2 = \frac{\sigma_q^2}{C^2} = \frac{kT}{C}.$$

10.4. Эквивалентная шумовая температура

Полученные выше формулы для спектра тепловых флуктуаций позволяют мощность любого источника (не обязательно теплового) описывать с помощью понятия эквивалентной шумовой температуры. Вводится оно следующим образом. Обозначим через $S_P(\omega)d\omega$ мощность, отдаваемую источником в полосе частот $d\omega$ нагрузке с сопротивлением R (рис. 10.5-а).

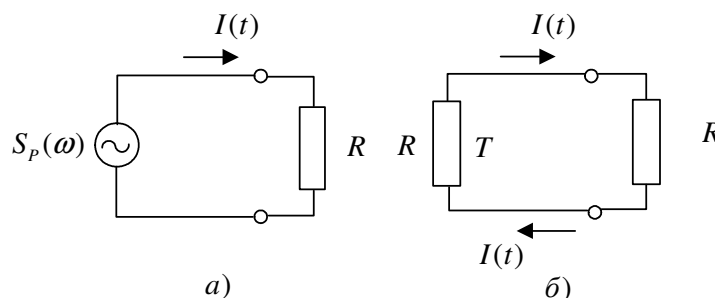


Рис. 10.5.

Заменим теперь источник согласованным с нагрузкой сопротивлением R (рис. 10.5-б), находящимся при температуре T , и потребуем, чтобы мощность тепловых флуктуаций, отдаваемая этим сопротивлением в нагрузку в полосе $d\omega$, совпадала с $S_p(\omega)d\omega$, т.е. (см. формулу (10.7)):

$$S_p(\omega) = RS_I^{(+)}(\omega). \quad (10.37)$$

При расчете $S_I^{(+)}(\omega)$ отметим следующее: поскольку источником тепловой ЭДС в цепи служит только одно сопротивление (левое на рис. 10.5-б, заменившее источник), то энергетический спектр флуктуаций ЭДС равен $S_E(\omega) = \frac{kT}{\pi}R$. Полное же сопротивление цепи Z равно $2R$, так что

$$S_I^{(+)}(\omega) = \frac{S_E^{(+)}(\omega)}{|Z|^2} = \frac{2S_E(\omega)}{4R^2} = \frac{kT}{2\pi R}. \quad (10.38)$$

Подставляя (10.38) в (10.37), получаем

$$S_p(\omega) = \frac{kT}{2\pi}. \quad (10.39)$$

Температуру T , при которой выполняется это соотношение, называют **эквивалентной шумовой температурой** источника на частоте ω .

10.5. Область применимости формулы Найквиста

Перечислим теперь все условия и ограничения, при которых была получена формула Найквиста (10.15):

1. **Электрическая цепь предполагалась квазистационарной**, излучение электромагнитных волн из нее не учитывалось, т.е. длина волны λ излучения на всех рассматриваемых частотах ω считалась значительно больше линейных размеров системы a ($\lambda \gg a$). Переходя по формуле $\lambda = 2\pi c/\omega$ от λ к ω , получаем ограничение сверху на частоты, при которых имеет место квазистационарность: $\omega \ll 2\pi c/a$.

2. Случайные ЭДС в цепи считались δ - коррелированными, как и силы, действующие со стороны молекул на макроскопическую частицу в теории броуновского движения.

3. Рассматривались только термодинамически равновесные флуктуации, т.е. предполагалось, что все переходные процессы в электрической цепи уже закончились.

4. При нахождении спектра флуктуации тепловой ЭДС в цепи мы предполагали, что на каждую поступательную степень свободы в состоянии термодинамического равновесия приходится энергия $kT/2$ (см. формулу (9.25)), т.е. **пользовались результатом классической статистической физики, а не квантовой**. Это допустимо только тогда, когда энергия кванта $\hbar\omega$ значительно меньше тепловой энергии:

$$\hbar\omega \ll kT. \quad (10.40)$$

5. Рассматривались только цепи с постоянными параметрами R, C, L в отсутствие дисперсии (т.е. предполагалось, что эти параметры не зависят от частоты ω).

6. **Не учитывалась дискретность электрического заряда** – в отличие от смещения броуновской частицы $x(t)$, электрический заряд $q(t)$ не может изменяться непрерывно, а только порциями, кратными заряду электрона.

Обобщение полученных результатов на случай квантовых флуктуаций

- Отказ от условия п.4 и неравенства (10.40) можно легко провести, если учесть, что на квантовом уровне на каждую колебательную степень свободы с собственной частотой ω приходится не энергия kT , как в классической теории, а средняя энергия осциллятора:

$$kT \rightarrow \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} = \frac{\hbar\omega}{2} \cdot \text{cth} \frac{\hbar\omega}{2kT} = \Theta(\omega T). \quad (10.41)$$

Если в формуле Найквиста (10.15) (и следующей из нее (10.16) и т.д.) сделаем замену (10.41), то она будет применима и в квантовом случае $\hbar\omega \geq kT$.

- Частотная дисперсия параметров цепи (условие п.5) также легко учитывается, если в формуле Найквиста считать $R=R(\omega)$, $L=L(\omega)$, $C=C(\omega)$. При этом мы не должны выходить за рамки условия квазистационарности ($\omega \ll 2\pi c/a$).

- Наконец, дискретность электрического заряда приводит к специфическим флуктуациям тока, не связанным с тепловым движением,- так называемому **дробовому шуму**, исследованию которого посвящен следующий параграф.

10.6. Флуктуационно-диссипационная теорема (ФДТ)

В заключение этого параграфа следует указать на то, что формула Найквиста как в классическом виде (10.15), так и в квантовом (с учетом замены (10.41)), является частным случаем одной очень важной теоремы, обладающей чрезвычайно большой степенью общности, - так называемой флуктуационно-диссипационной теоремы (Г.Каллен, Т.Вельтон, 1951г.). Из самого названия теоремы видно, что она связывает флуктуационные явления с диссипативными свойствами системы. Под **диссипацией** следует понимать преобразование любых нетепловых видов энергии и движения в тепловую. Скорость этого преобразования определяется диссипативными параметрами (при броуновском движении в роли такого параметра выступает коэффициент трения γ), и формула (10.14) устанавливает связь между энергетическим спектром $S_F(\omega)$ флуктуаций случайной силы F , вызывающей случайные изменения смещения $x(t)$ и скорости $V(t)$ броуновской частицы, с диссипативным параметром γ :

$$S_F(\omega) = \frac{kT}{\pi} \gamma. \quad (10.42)$$

Аналогичный вид имеет и формула Найквиста (10.15), которая описывает преобразование электрической энергии в тепловую. Процесс диссипации в этом случае определяется активным сопротивлением цепи $\text{Re}Z(i\omega)$, а роль сил, вызывающих, например, флуктуации тока, играют случайные ЭДС $E(t)$. Таким образом, по своей физической сути тепловые флуктуации и в механической системе (броуновское движение) и в электрических цепях оказываются настолько близкими, что описываются, по сути, одинаковыми формулами. Ясно, что это обстоятельство не может быть случайным совпадением, а должно являться проявлением какого-то общего физического закона. Именно об этом общем законе, "управляющем" флуктуациями, и идет речь во флуктуационно-диссипационной теореме (ФДТ), суть которой сводится к следующему.

Рассмотрим произвольную физическую систему, находящуюся в состоянии термодинамического равновесия. Пусть $x(t)$ - какой-то макроскопический физический

параметр, описывающий состояние системы и играющий роль **обобщенной координаты**. В случае броуновской частицы в качестве $x(t)$ можно выбрать координату ее смещения - $x(t)$ или любой другой параметр, например, скорость $V(t)$, ускорение $a(t)$ и т.д. Точно также для электрической цепи в качестве $x(t)$ можно выбрать и перенесенный через цепь заряд $q(t)$, и силу тока в цепи $I(t)$, и, например, разность потенциалов $U(t)$ на обкладках конденсатора (см. рис. 10.3) и т.д.

Рассматриваемая теорема позволяет связать энергетический спектр $S_x(\omega)$ флуктуаций обобщенной координаты $x(t)$

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle x(t) \cdot x(t+\tau) \rangle e^{-i\omega\tau} d\tau$$

со скоростью диссипации энергии в системе (в механической системе - с коэффициентом трения, в электрической - с мощностью джоулевых потерь и т.д.). Мы не будем здесь строго доказывать эту теорему, а приведем только ход рассуждений и окончательную формулу Каллена-Вельтона для $S_x(\omega)$, которую можно рассматривать как формулировку ФДТ.

Наряду с обобщенной координатой $x(t)$ введем сопряженную с ней **обобщенную силу**:

$$F(t) = -\partial U / \partial x, \quad (10.43)$$

где U - **энергия системы**. Если $x(t)$ – это действительная координата, то $F(t)$ - сила в обычном смысле этого слова. Будем формально рассматривать флуктуации $x(t)$ как результат действия на систему внешних сил $F(t)$. Отклик системы $x(t)$ связан с $F(t)$ в общем случае нелинейными уравнениями типа

$$x(t) = \Phi\{F(t)\}, \quad (10.44)$$

но при достаточно малых F эту связь всегда можно считать линейной, причем, не ограничивая общности, положить $x=0$, если $F=0$. Общая форма линейной связи с

учетом принципа причинности и в предположении о стационарности системы (система находится в тепловом равновесии, и все моменты времени физически эквивалентны и именно в этом смысле здесь употребляется термин "стационарность") описывается формулой (7.7). Это приводит к тому, что Фурье-компоненты $C_x(\omega)$ и $C_F(\omega)$ оказываются пропорциональными:

$$C_x(\omega) = \alpha(\omega) C_F(\omega). \quad (10.45)$$

Сравнив (10.45) с (7.22), видим, что $\alpha(\omega)$ - есть не что иное, как передаточная функция системы $K(i\omega)$ в радиотехнике, а в физике же ее называют **обобщенной восприимчивостью**.

С учетом стационарности процесса из (10.45) следует связь между энергетическими спектрами:

$$S_x(\omega) = |\alpha(\omega)|^2 S_F(\omega). \quad (10.46)$$

Воспользуемся тем, что мы уже вывели формулу Найквиста, и рассмотрим в качестве обобщенной координаты $x(t)$ переносимый заряд $q(t)$. Тогда в роли обобщенной силы $F(t)$ будет выступать ЭДС $E(t)$, энергетический спектр флуктуаций которой известен:

$$S_E(\omega) = \frac{kT}{\pi} \operatorname{Re} Z(i\omega). \quad (10.47)$$

Выясним теперь, что играет роль обобщенной восприимчивости $\alpha(\omega)$ в данном конкретном случае. Так как $I(t) = dq/dt$, то $C_q(\omega) = C_I(\omega)/i\omega$. С другой стороны, согласно закону Кирхгофа, имеем $C_I(\omega) = C_E(\omega)/Z(i\omega)$. Следовательно,

$$C_q(\omega) = \frac{1}{i\omega Z(i\omega)} C_E(\omega). \quad (10.48)$$

Сравнивая эту связь с (10.45), определяем $\alpha(\omega)$:

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{i\omega Z(i\omega)}. \quad (10.49)$$

Перейдем теперь в формуле Найквиста (10.47) от $Z(i\omega)$ к $\alpha(\omega)$, введя предварительно обозначения α' и α'' для вещественной и мнимой частей α соответственно: $\alpha = \alpha' + i\alpha''$. Тогда

$$S_E(\omega) = \frac{kT}{\pi} \operatorname{Re} \frac{1}{i\omega\alpha(\omega)} = -\frac{kT}{\pi\omega} \frac{\alpha''(\omega)}{|\alpha(\omega)|^2}. \quad (10.50)$$

Подставляя (10.50) в правую часть (10.46), получаем

$$S_x(\omega) = -\frac{kT\alpha''(\omega)}{\pi\omega}. \quad (10.51)$$

Следует заметить, что знак “-” в (10.51) связан с тем, что зависимость от времени в “прямом” преобразовании Фурье мы рассматривали в виде $e^{i\omega t}$. Если бы мы выбрали $e^{-i\omega t}$, то в (10.51) необходимо было бы писать знак “+”.

Формула (10.51) и является, по сути, формулировкой флуктуационно-диссипационной теоремы, утверждающей, что **спектр флуктуации $S_x(\omega)$ произвольной обобщенной координаты $x(t)$** (а не только заряда $q(t)$ в электрической цепи) **связан с мнимой частью α'' обобщенной восприимчивости и температурой системы T** . Из (10.45) видно, что наличие у α мнимой части - α'' как раз и означает присутствие диссипации в системе. В случае квантовых флуктуаций, как отмечалось выше, достаточно заменить $kT \rightarrow \Theta(\omega, T)$ по формуле (10.41).

Продемонстрируем применение формулы (10.51) к флуктуациям координаты $x(t)$ смещения броуновской частицы. Роль уравнения (10.44) в данном случае играет уравнение движения

$$M \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} = F(t). \quad (10.52)$$

Переходя к Фурье-компонентам, имеем:

$$(-M\omega^2 + i\omega\gamma)C_x(\omega) = C_F(\omega). \quad (10.53)$$

Откуда находим обобщенную восприимчивость:

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{i\omega\gamma - M\omega^2} \quad (10.54)$$

и ее мнимую (ответственную за диссипацию) часть:

$$\alpha'' = -\frac{1}{\omega\gamma(1 + \omega^2\tau_M^2)}, \quad \tau_M = \frac{M}{\gamma}. \quad (10.55)$$

Пользуясь (10.51), получаем

$$S_x(\omega) = \frac{kT}{\pi\gamma\omega^2} \cdot \frac{1}{1 + \omega^2\tau_M^2}. \quad (10.56)$$

Спектр флуктуаций скорости $V(t)$ можно определить с помощью (10.56), если учесть, что $C_V(\omega) = i\omega C_x(\omega)$ и, следовательно,

$$S_V(\omega) = \omega^2 S_x(\omega) = \frac{kT}{\pi\gamma} \cdot \frac{1}{1 + \omega^2\tau_M^2}. \quad (10.57)$$

Этот результат совпадает с полученной ранее формулой (9.47).

Обобщение формул Каллена-Вельтона на случай нескольких флуктуирующих величин $x_m(t)$ ($m = 1, 2, \dots$) заключается в установлении связи взаимного спектра флуктуаций

$$S_{x_{mk}}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle x_m(t) \cdot x_k(t+\tau) \rangle e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (10.58)$$

с антиэрмитовой частью матрицы обобщенной восприимчивости α_{mk} , которая вводится следующим образом.

Сначала определяют обобщенные силы

$$F_m(t) = -\partial U / \partial x_m, \quad (10.59)$$

а затем в линейном приближении связывают Фурье-компоненты $C_{xm}(\omega)$ и $C_{Fk}(\omega)$:

$$C_{xm}(\omega) = \sum_k \alpha_{mk}(\omega) C_{Fk}(\omega). \quad (10.60)$$

В результате оказывается, что имеет место следующая общая формула:

$$S_{x_{mk}}(\omega) = \frac{kT}{2\pi\omega} [\alpha_{mk}(\omega) - \alpha_{km}^*(\omega)], \quad (10.61)$$

которая, как легко убедиться, в одномерном случае ($m = k = 1$, $\alpha_{mk} = \alpha\delta_{mk}$) переходит в (10.51).

ЗАДАЧИ

1. Определить спектральные плотности ЭДС и тока для цепи, состоящей из сопротивления R с незамкнутыми выводами (рис. 10.6).

Решение. Пользуясь формулами Найквиста (10.15) и (10.16), получаем

$$S_E(\omega) = \frac{kT}{\pi} \operatorname{Re} Z(\omega) = \frac{kT}{\pi} R,$$

$$S_I(\omega) = \frac{kT}{\pi} \frac{\operatorname{Re} Z(\omega)}{|Z(\omega)|^2} = \frac{kT}{\pi} \frac{R}{(R + \infty)^2} = 0.$$

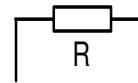


Рис. 10.6.

При вычислении $S_I(\omega) = \frac{S_E(\omega)}{|Z(\omega)|^2}$ в качестве $Z(\omega)$ нужно брать полное комплексное сопротивление цепи, по которой протекает шумовой ток. В рассматриваемом случае $|Z(\omega)| = R + \infty$. Физически равенство $S_I(\omega) = 0$ определяется отсутствием в цепи тока, поскольку цепь разомкнута.

2. Определить спектральные плотности ЭДС и тока для короткозамкнутого сопротивления R (рис. 10.7).

Решение. Пользуясь (10.15) и (10.16), находим

$$S_E(\omega) = \frac{kT}{\pi} R ,$$

$$S_I(\omega) = \frac{kT}{\pi} \frac{R}{(R+0)^2} = \frac{kT}{\pi} \frac{1}{R} .$$

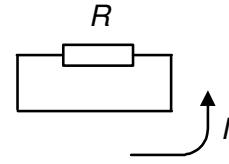


Рис. 10.7.

3. Определить спектральные плотности ЭДС и тока для контура, состоящего из параллельно соединенных сопротивления R и емкости C (рис. 10.8).

Решение. Последовательность решения этой задачи та же, что и предыдущей.

$$Z = R + \frac{1}{i\omega C} ;$$

$$\operatorname{Re} Z(\omega) = R ;$$

$$|Z(\omega)| = \sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}} = \sqrt{\frac{1 + (\omega CR)^2}{\omega^2 C^2}} ;$$

$$|Z(\omega)|^2 = \frac{1 + (\omega CR)^2}{\omega^2 C^2} .$$

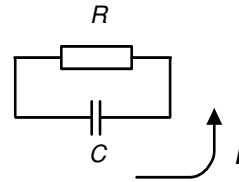


Рис. 10.8.

Теперь, согласно формулам Найквиста, имеем

$$S_E(\omega) = \frac{kT}{\pi} R ;$$

$$S_I(\omega) = \frac{kT}{\pi} \frac{R\omega^2 C^2}{1 + (\omega CR)^2} .$$

§ 11. Дробовый шум

Одним из наиболее важных примеров нетепловых флуктуаций в электрических цепях является дробовый шум – флуктуации тока в цепи, вызванные дискретностью переносимого заряда. В обычных электровакуумных приборах время пролета одного электрона имеет порядок $\tau_{np} \approx 10^{-9} \text{ с}$. Это и есть длительность элементарного импульса тока, переносящего заряд, равный заряду e одного электрона. При среднем токе $\bar{I} \approx 5 \text{ мА}$ за одну секунду пролетает громадное количество электронов $N \approx 3 \cdot 10^{16}$, а за время длительности одного импульса τ_{np} - $N\tau_{np} \approx 3 \cdot 10^7$ электронов. Таким образом, импульсы тока, вызванные пролетом каждого электрона, густо перекрываются. На рис.11.1 жирной линией изображен импульс тока $i_v(t)$ за счет пролета одного электрона, вылетевшего с катода (если речь идет об электронной лампе) в момент времени t_v .

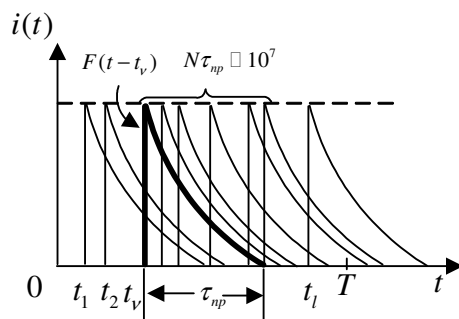


Рис. 11.1.

Импульсы тока за счет электронов, вылетающих в последующие моменты времени от t_v до $t_v + \tau_{np}$, изображены тонкими линиями. Из-за того, что импульсы тока очень сильно перекрываются, суммарный ток будет слабо флуктуировать около среднего значения \bar{I} (рис. 11.2). Эти флуктуации тока называют **дробовым шумом** или **дробовым током**.

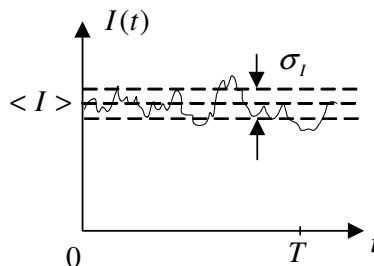


Рис. 11.2.

Обозначим, как и в § 3, через n число электронов, вылетевших с катода за время T . Перенесенный ими заряд есть $q_T = ne$, а значение тока за это время равно

$$I_T = \frac{q_T}{T} = \frac{ne}{T} \quad (11.1)$$

Как мы установили в § 3, случайная величина n распределена по закону Пуассона:

$$P(n) = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}}, \quad (11.2)$$

где $\bar{n} = n_1 T$, а n_1 - среднее число электронов, вылетающих с катода в единицу времени – величина, определяющая средний ток в цепи:

$$\langle I_T \rangle = \frac{e}{T} \bar{n} = n_1 e. \quad (11.3)$$

Для вычисления дисперсии флуктуаций дробового тока $I_{op} = I_T - \langle I_T \rangle$

$$\sigma_{I_T}^2 = \langle (I_T - \langle I_T \rangle)^2 \rangle = \langle I_{op}^2 \rangle = \frac{e^2}{T^2} \langle (n - \bar{n})^2 \rangle, \quad (11.4)$$

воспользуемся формулой (3.28), определяющей дисперсию флуктуаций случайной величины n : $\sigma_n^2 = \langle (n - \bar{n})^2 \rangle = \bar{n}$. В результате получаем

$$\sigma_{I_T}^2 = \frac{e^2}{T^2} \bar{n} = \frac{e}{T} \langle I_T \rangle. \quad (11.5)$$

Таким образом, дисперсия флуктуаций дробового тока оказывается пропорциональной средней силе тока $\langle I_T \rangle$ и обратно пропорциональной времени усреднения T . В дальнейшем индекс T для величины тока I будем опускать ($I \equiv I_T$).

Обратимся теперь к вычислению автокорреляционной функции и спектра флуктуаций дробового шума. Мгновенное значение полного тока I в момент времени t , создаваемое всеми электронами, вылетевшими за время T в моменты времени t_1, t_2, \dots, t_n , очевидно, есть сумма всех элементарных токов:

$$I(t) = \sum_{\nu=1}^n i_{\nu}(t) = e \sum_{\nu=1}^n F(t - t_{\nu}). \quad (11.6)$$

Здесь e - заряд электрона, а $F(t - t_{\nu})$ - форма элементарного импульса тока $i_{\nu}(t)$, которая описывается детерминированной (неслучайной) функцией. Учитывая, что за все время прохождения импульса $i_{\nu}(t)$ переносится элементарный заряд e , получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} i_{\nu}(t) dt = e, \quad (11.7)$$

откуда следует, что $F(t - t_{\nu})$ нормирована условием:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t - t_{\nu}) dt = 1. \quad (11.8)$$

Формулой (11.6) определяется некоторая случайная функция $I(t)$. Случайными величинами являются как моменты вылета t_{ν} каждого электрона, так и полное число n вылетевших за время T электронов. Так как все моменты времени в интервале $0 \leq t \leq T$ физически эквивалентны, каждая из случайных величин t_{ν} распределена равномерно с плотностью вероятностей:

$$W_1(t_{\nu}) = \frac{1}{T}, \quad 0 \leq t_{\nu} \leq T. \quad (11.9)$$

Из независимости актов вылета отдельных электронов следует, что и случайные величины t_{ν} независимы, т. е. их совместная плотность распределения вероятностей распадается на произведение

$$W_n(t_1, t_2, \dots, t_n) = \prod_{v=1}^n W_1(t_v) = \frac{1}{T^n}. \quad (11.10)$$

Так как случайная величина n распределена по закону Пуассона, функцию $I(t)$ называют **пуассоновским случайным процессом**, а совокупность независимых случайных событий, заключающихся в вылете отдельных электронов в моменты времени t_v , - **пуассоновским потоком событий**.

11.1. Определение статистических характеристик силы тока

При определении статистических характеристик случайного процесса (11.6) усреднение удобно проводить в два этапа: сначала провести усреднение по всем t_v (обозначим его $\langle \dots \rangle_{t_v}$), а затем усреднять по случайному параметру n . Таким образом, например, вычисление первого момента $\langle I(t) \rangle_{t_v}$ сводится к вычислению среднего от суммы:

$$\langle I(t) \rangle_{t_v} = \langle e \sum_{v=1}^n F(t-t_v) \rangle_{t_v} = e \sum_{v=1}^n \langle F(t-t_v) \rangle_{t_v} = e \sum_{v=1}^n \int_0^T dt_v W_1(t_v) F(t-t_v). \quad (11.11)$$

Если время наблюдения T значительно превосходит длительность элементарного импульса тока - τ_{np} , то интеграл по dt_v в (11.11) можно заменить на интеграл в бесконечных пределах и воспользоваться формулой (11.8):

$$\langle I(t) \rangle_{t_v} \approx \frac{e}{T} \sum_{v=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} F(t-t_v) dt = \frac{e}{T} n. \quad (11.12)$$

Таким образом, мы приходим к формуле (11.1), окончательное усреднение которой по n с распределением вида (11.2), дает выражение (11.3).

Для определения автокорреляционной функции

$$B_I(t, t') = \langle I(t)I(t') \rangle - \langle I(t) \rangle^2 \quad (11.13)$$

необходимо вычислить второй двухточечный момент $\langle I(t)I(t') \rangle$. Для этого проведем сначала усреднение по моментам вылета электронов t_ν при постоянном их общем числе n :

$$\begin{aligned} \langle I(t)I(t') \rangle_{t_{\nu,\mu}} &= e^2 \left\langle \sum_{\nu=1}^n F(t-t_\nu) \sum_{\mu=1}^n F(t'-t_\mu) \right\rangle_{t_{\nu,\mu}} = \\ &= e^2 \sum_{\nu,\mu=1}^n \langle F(t-t_\nu)F(t'-t_\mu) \rangle_{t_{\nu,\mu}}. \end{aligned} \quad (11.14)$$

Выделим в (11.14) слагаемые с $\nu = \mu$ и учтем независимость t_ν и t_μ при $\nu \neq \mu$:

$$\begin{aligned} \langle I(t)I(t') \rangle_{t_{\nu,\mu}} &= e^2 \sum_{\nu=1}^n \langle F(t-t_\nu)F(t'-t_\nu) \rangle_{t_\nu} + e^2 \sum_{\nu \neq \mu}^n \langle F(t-t_\nu) \rangle_{t_\nu} \langle F(t'-t_\mu) \rangle_{t_\mu} = \\ &= e^2 \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{T} \int_0^T F(t-t_\nu)F(t'-t_\nu) dt_\nu + \sum_{\nu \neq \mu}^n \frac{1}{T^2} \int_0^T dt_\nu F(t-t_\nu) \int_0^T dt_\mu F(t'-t_\mu). \end{aligned} \quad (11.15)$$

Считая, как и раньше, что $T \gg \tau_{np}$, пределы интегрирования в (11.15) можно растянуть до бесконечности. Учитывая далее, что двойная сумма в (11.15) состоит из $n(n-1)$ одинаковых слагаемых, и проводя окончательное усреднение по n , получаем:

$$\langle I(t)I(t') \rangle = \frac{e^2 \bar{n}}{T} \int_{-\infty}^{\infty} F(t-t_1)F(t'-t_1) dt_1 + \frac{e^2}{T^2} (\overline{n^2} - \bar{n}). \quad (11.16)$$

Но из (3.28) следует, что $\overline{n^2} - \bar{n}^2 = \bar{n}$, т.е. второе слагаемое в (11.16) преобразуется к виду $e^2 \bar{n}^2 / T^2 = \langle I \rangle^2$. Подставляя (11.16) в (11.13), после замены переменной интегрирования $t-t_1 = \theta$ приходим к формуле:

$$B_I(t, t') = e \langle I \rangle \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta) F(t'-t+\theta) d\theta. \quad (11.17)$$

Отсюда видно, что B_I зависит только от разности $t-t'$, т.е. процесс $I(t)$ является стационарным в широком смысле. В частности, если считать длительность τ_{np} элементарных импульсов пренебрежимо малой, т.е. положить $F(t) = \delta(t)$, то интеграл (11.17) вычисляется и процесс $I(t)$ оказывается δ -коррелированным, т.е. белым шумом:

$$B_I(t, t') = e \langle I \rangle \delta(t - t'). \quad (11.18)$$

11.2. Энергетический спектр дробового шума

Преобразование Фурье от формулы (11.17) по разностной переменной $\tau = t' - t$ приводит к следующему выражению для энергетического спектра дробового шума:

$$S_I(\omega) = \frac{e \langle I \rangle}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta) F(\tau + \theta) d\theta. \quad (11.19)$$

Поменяем в (11.19) порядок интегрирования и введем амплитудный спектр $C_F(\omega)$ импульса тока $F(t)$:

$$C_F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (11.20)$$

Тогда $S_I(\omega)$ преобразуется к виду

$$\begin{aligned} S_I(\omega) &= \frac{e \langle I \rangle}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta) d\theta \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau + \theta) e^{-i\omega\tau} d\tau = \\ &= \frac{e \langle I \rangle}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta) e^{i\omega\theta} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta') e^{-i\omega\theta'} d\theta' = 2\pi e \langle I \rangle |C_F(\omega)|^2. \end{aligned} \quad (11.21)$$

При вычислении внутреннего интеграла мы воспользовались заменой переменной $\theta' = \tau + \theta$.

Для предельно низких частот, когда $\omega\tau_{np} \ll 1$, множитель $e^{-i\omega t}$ в (11.20) можно заменить на единицу. В результате получим

$$\tilde{F}(\omega) \approx \frac{1}{2\pi}, \quad |\omega| \ll 1/\tau_{np}. \quad (11.22)$$

Подставляя эту оценку в (11.21), приходим к **формуле Шоттки**:

$$S_I(\omega) = \frac{e \langle I \rangle}{2\pi}. \quad (11.23)$$

Таким образом, **спектр низкочастотных флуктуаций ($\omega\tau_{np} \ll 1$) дробового шума определяется только величиной среднего тока $\langle I \rangle$ и не зависит от частоты.**

Пример

Поведение спектра $S_I(\omega)$ на более высоких частотах согласно (11.21) полностью определяется формой элементарного импульса тока $F(t)$, характерного для рассматриваемого электровакуумного прибора. В качестве простейшего примера определим вид $F(t)$ при движении электрона от катода к аноду в плоском диоде (рис.11.3).

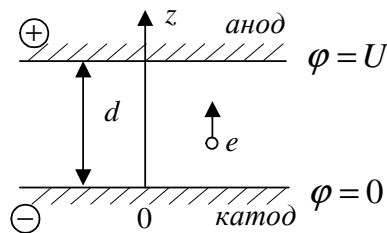


Рис. 11.3.

Обозначим через d расстояние, а через U - разность потенциалов между катодом и анодом. Для определения силы, действующей на электрон в пространстве между катодом и анодом, необходимо вначале вычислить **напряженность электростатического поля $\vec{E} = -\nabla\varphi$** , где φ - **электростатический потенциал** внутри

конденсатора. Распределение φ находится из решения уравнения Пуассона с заданными условиями на границах (обкладках конденсатора):

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0, \\ \varphi_{z=0} = 0, \\ \varphi_{z=d} = U. \end{cases} \quad (11.24)$$

При условии, что линейные размеры L плоского конденсатора намного превосходят расстояние между его обкладками ($L \gg d$), можно считать, что потенциал φ зависит только от z -й координаты. При этом $\Delta\varphi = \frac{d^2\varphi}{dz^2}$ и решение уравнение Пуассона (11.24) имеет простой вид $\varphi(z) = \frac{U}{d}z$. В результате для напряженности электростатического поля и силы, действующей на электрон ($\vec{F} = -e\vec{E}$) получаем следующие выражения:

$$\vec{E} = -E\vec{e}_z, \quad E = \frac{U}{d}; \quad \vec{F} = F\vec{e}_z, \quad F = eE = e\frac{U}{d}. \quad (11.25)$$

Из (11.25) видно, что сила, действующая на электрон, всюду направлена вдоль положительного направления оси z , постоянна и равна eE . Электрон, двигаясь вдоль оси z , на интервале пути dz приобретает энергию $dW = Fdz = eEdz$ и мощность

$$P(t) = dW/dt = eE(dz/dt) = eEV(t), \quad (11.26)$$

где $V(t) = dz/dt$ - скорость движения электрона.

С другой стороны, при своем движении электрон наводит на обкладках конденсатора (диола) индуцированный заряд q , изменения которого во времени приводят к появлению в электрической цепи импульса тока $i(t)$. При этом мощность в электрической цепи равна произведению тока $i(t)$ на разность потенциалов U :

$$P(t) = i(t)U. \quad (11.27)$$

Из сравнения (11.26) и (11.27) получим, что

$$i(t) = \frac{e}{d} V(t). \quad (11.28)$$

Скорость электрона $V(t)$ можно найти из одномерного уравнения движения:

$m \frac{dV}{dt} = F = eE$. Из предположения, что в момент вылета электрон имел нулевую скорость ($V(t)|_{t=0} = 0$), получаем

$$V(t) = \frac{eE}{m} t. \quad (11.29)$$

Видно, что зависимость $i(t)$ оказывается линейной:

$$i(t) = \frac{e^2 E}{md} t. \quad (11.30)$$

Из очевидного соотношения

$$\int_0^{\tau_{np}} V(t) dt = d, \quad (11.31)$$

определим **время пролета** τ_{np} электрона от катода к аноду. Подставляя в (11.31) найденную зависимость (11.29) и интегрируя по t , находим

$$d = \frac{eE}{2m} \tau_{np}^2. \quad (11.32)$$

Заменив d в (11.30) на выражение (11.32) и введя функцию формы $F(t) = i(t)/e$, приходим к следующему результату:

$$F(t) = \frac{2t}{\tau_{np}^2}, \quad (0 \leq t \leq \tau_{np}). \quad (11.33)$$

Определим теперь $C_F(\omega)$ по формуле (11.20), учитывая, что $F(t) = 0$ вне интервала $[0, \tau_{np}]$:

$$C_F(\omega) = \frac{1}{\pi\tau_{np}^2} \int_0^{\tau_{np}} te^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\pi\theta^2} [e^{-i\theta}(1+i\theta) - 1]. \quad (11.34)$$

Здесь $C_F(\omega)$ представлено в виде функции **пролетного угла** $\theta = \omega\tau_{np}$. В результате для энергетического спектра $S_I(\omega)$ флуктуаций тока (11.21) получаем

$$S_I(\omega) = \frac{2e \langle I \rangle}{\pi\theta^4} \{2 + \theta^2 - 2\cos\theta - 2\theta\sin\theta\}. \quad (11.35)$$

Легко убедиться, что при малых пролетных углах ($\theta \ll 1$) (низкие частоты) из (11.35) мы приходим к формуле Шоттки (11.23).

11.3. Эквивалентное шумовое сопротивление

Дробовый шум в анодной цепи (рис. 11.4) иногда удобно рассматривать как результат тепловых флуктуаций ЭДС в цепи сетки, возникающих в **эквивалентном шумовом сопротивлении** R_c , находящемся при температуре T .

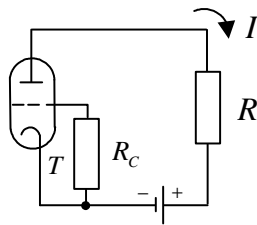


Рис. 11.4.

Флуктуации $E(t)$ в сеточной цепи вызывают в анодной цепи флуктуации тока $I(t) = SE(t)$, где S – крутизна анодной характеристики лампы. Поскольку согласно формуле Найквиста, спектр тепловых флуктуаций ЭДС в цепи сетки равен $S_E = \frac{kT}{\pi} R_c$, то спектр флуктуаций тока $S_I(\omega)$ в анодной цепи имеет вид

$$S_I(\omega) = S^2 S_E = \frac{kT}{\pi} R_c S^2. \quad (11.36)$$

Приравнявая эту величину выражению для $S_I(\omega)$, определенному формулой Шоттки (11.23), получаем:

$$R_c = \frac{e \langle I \rangle}{2kTS^2}. \quad (11.37)$$

Формула (11.37) и определяет величину эквивалентного шумового сопротивления.

ЗАДАЧИ

1. Найти корреляционную функцию и проанализировать энергетический спектр дробового тока при заданной функции формы одиночного импульса:

$$F(t) = \begin{cases} \frac{2t}{\tau_{np}}, & 0 \leq t \leq \tau_{np} \\ t < 0, & t > \tau_{np}. \end{cases} \quad (1)$$

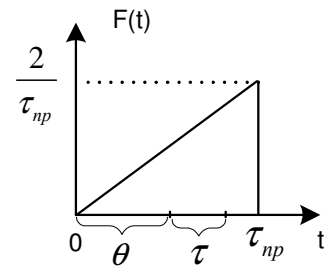


Рис. 11.5.

Решение. По условию задачи $F(t)$ имеет вид, изображенный на рис. 11.5. Согласно (11.17) корреляционная функция тока $B_I(\tau)$, записанная в переменных θ и τ , представляется как

$$B_I(\tau) = e \bar{I} \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta) F(\theta + \tau) d\theta, \quad (2)$$

где \bar{I} – среднее значение тока. Пределы интегрирования в (2) выбираются, исходя из заданного вида (1) функции $F(t)$. Текущая точка определяется координатой θ , τ – временная сдвигка для определения корреляции (см. рис. 11.5). Эта сдвигка может быть как положительной, так и отрицательной.

Рассмотрим вначале случай $\tau > 0$. По условию задачи $F(t) = 0$ при $t < 0$ и $t > \tau_{np}$. Следовательно, $B_I(\tau)$ будет отличной от нуля при выполнении следующих неравенств (см. (2)):

$$0 < \theta < \tau_{np} \text{ и } 0 < (\theta + \tau) < \tau_{np}.$$

Преобразуем эти неравенства к виду:
 $0 < \theta < \tau_{np}$, $-\tau < \theta < \tau_{np} - \tau$. Изобразим крайние точки этих неравенств на оси. Из рисунка 11.6 видно, что оба неравенства одновременно будут выполняться лишь при нахождении θ в интервале $0 < \theta < \tau_{np} - \tau$ (заштрихованная область). Таким образом, мы приходим к следующему определению:

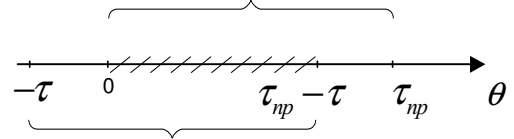


Рис. 11.6.

$$B_I(\tau) = e\bar{I} \int_0^{\tau_{np}-\tau} \frac{2\theta}{\tau_{np}^2} \frac{2(\theta+\tau)}{\tau_{np}^2} d\theta = \frac{2e\bar{I}}{3\tau_{np}^4} (\tau_{np} - \tau)^2 (\tau + 2\tau_{np}), \quad (3)$$

которое справедливо для $0 \leq \tau \leq \tau_{np}$. Аналогичным образом получается и выражение для $B_I(\tau)$ при отрицательных значениях τ : $-\tau_{np} \leq \tau \leq 0$. В этом

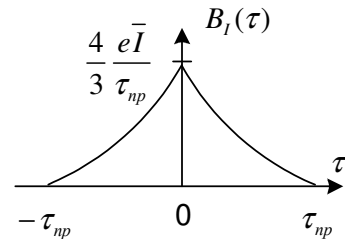


Рис. 11.7.

случае, однако, удобней продолжить четным образом (3) в область отрицательных τ ($\tau < 0$). В результате получаем следующее окончательное выражение:

$$B_I(\tau) = \frac{2e\bar{I}}{3\tau_{np}^4} (\tau_{np} - |\tau|)^2 (|\tau| + 2\tau_{np}). \quad (4)$$

График зависимости $B_I(\tau)$ представлен на рис. 11.7. Видно, что $B_I(\tau)$ имеет максимальное значение при $\tau = 0$, а при $\tau = \pm\tau_{np}$ принимает минимальные значения, равные нулю.

Энергетический спектр $S_I(\omega)$ для рассматриваемого вида функции $F(t)$ определяется согласно (11.35):

$$S_I(\theta) = \frac{2e\bar{I}}{\pi\theta^4} (2 + \theta^2 - 2\cos\theta - 2\theta\sin\theta), \quad (5)$$

где $\theta = \omega\tau_{np}$ – безразмерный пролетный угол. Проанализируем данное выражение при различных значениях θ (частоты ω). При $\theta \ll 1$ (низкие частоты), представив $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24}$ и $\sin\theta \approx \theta - \frac{\theta^3}{6}$, получим

$$S_I(\theta) \approx \frac{e\bar{I}}{2\pi}. \quad (6)$$

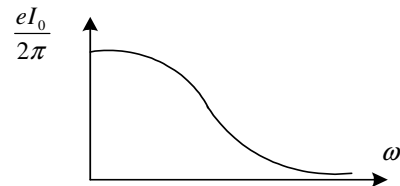


Рис. 11.8.

При больших $\theta \gg 1$ (высокие частоты) в формуле (4) можно оставить в скобках лишь слагаемое θ^2 , в результате чего получаем

$$S_I(\theta) = \frac{2e\bar{I}}{\pi\theta^2}. \quad (7)$$

Отсюда следует, что на высоких частотах $S_I(\omega) \propto 1/\omega^2$. График $S_I(\omega)$ показан на рис. 11.8.

2. Найти корреляционную функцию и энергетический спектр дробового тока импульсного пуассоновского случайного процесса

$$I(t) = e \sum_{\nu} F_{\nu}(t),$$

где $F_{\nu}(t) = \delta(t - t_{\nu})$, t_{ν} – пуассоновский поток событий, причем среднее число импульсов в единицу времени равно n_1 .

Решение. Производя вычисления, аналогичные предыдущей задаче и используя свойства δ -функции, получаем

$$B_l(\tau) = e\bar{I} \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta) F(\theta + \tau) d\theta = e\bar{I} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\theta) \delta(\theta + \tau) d\theta = e\bar{I} \delta(\tau),$$

$$S_l(\omega) = \frac{e\bar{I}}{2\pi},$$

где $\bar{I} = en_1$.

§ 12. Флуктуации в автоколебательных системах

Рассмотренные в предыдущих параграфах тепловые и дробовые флуктуации являются причиной появления шумов и в более сложных радиотехнических схемах, в частности, в генераторах колебаний. Различают генераторы с самовозбуждением и с внешним возбуждением. Генераторы с самовозбуждением называют также автогенераторами. Для возбуждения колебаний в них используется положительная обратная связь или активный прибор, имеющий участок характеристики с отрицательным наклоном. Характерные схемы автогенераторов с индуктивной обратной связью, в которых используются различные активные элементы, показаны на рис. 12.1 (а- на биполярном транзисторе, б - на полевом транзисторе, в - электронной лампе). Для исследования статистических характеристик флуктуаций в автоколебательных системах мы рассмотрим ставший уже классическим пример простейшего генератора на трех электродной электронной лампе с индуктивной обратной связью и колебательным контуром в анодной цепи (рис.12.1-в).

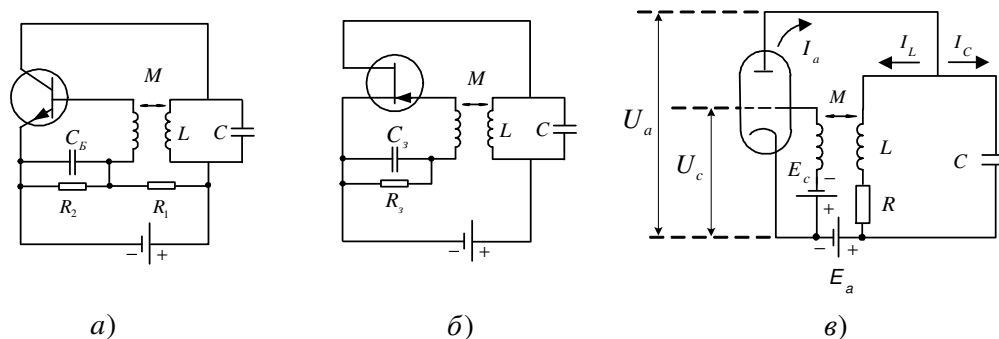


Рис. 12.1.

12.1. Построение замкнутого уравнения для силы тока

Пусть в колебательном контуре в анодной цепи (рис.12.1-в) по какой-либо причине возникли колебания; тогда они будут иметь место во всех цепях рассматриваемого генератора. Обозначим через I_L и I_C соответственно токи через индуктивную и емкостную цепочки контура. Учитывая, что активное сопротивление R в контуре является источником тепловой флуктуационной ЭДС $E(t)$, согласно закону Кирхгофа имеем

$$L \frac{dI_L}{dt} + RI_L - \frac{1}{C} \int I_C(t') dt' = E(t). \quad (12.1)$$

С другой стороны, условие равенства токов в узле дает

$$I_L + I_C = I_a. \quad (12.2)$$

Продифференцировав (12.1) по t , с учетом (12.2) получим

$$L \frac{d^2 I_L}{dt^2} + R \frac{dI_L}{dt} + \frac{1}{C} I_L - \frac{1}{C} I_a = \frac{dE(t)}{dt}. \quad (12.3)$$

Учтем теперь, что анодный ток I_a подвержен флуктуациям за счет дробового шума. Обозначим через J_a составляющую анодного тока без учета дробовых флуктуаций. Тогда суммарный анодный ток I_a представится как

$$I_a = J_a + I_{др}. \quad (12.4)$$

Составляющая J_a зависит от разности потенциалов между сеткой и катодом U_c , а также анодом и катодом U_a . Из теории электровакуумных устройств известно, что J_a есть функция так называемого **управляющего напряжения**:

$$U_y = U_c + D U_a, \quad (12.5)$$

где D ($D < 1$) - параметр, называемый **проницаемостью**. Величина D зависит от экранирующего действия сетки и определяется, главным образом, её плотностью: чем гуще сетка, тем большее число силовых линий поля анода она перехватывает и тем меньше проницаемость лампы. Зависимость $J_a(U_y)$ обычно нелинейная и имеет характерный вид, показанный на рис. 12.2. Соответствующим подбором постоянного смещения $U_y = U_0$ выбирается требуемый режим работы лампы. Точка P на характеристике лампы, соответствующая режиму отсутствия колебаний, называется **“точкой покоя”**.

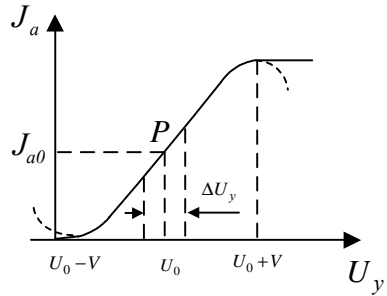


Рис. 12.2.

Пусть точка покоя совмещена с точкой перегиба кривой $J_a(U_y)$ ($d^2J_a(U_0)/dU_y^2 = 0$). В этом случае, для незначительных отклонений $\Delta U_y = U_y - U_0$ управляющего сигнала U_y от значения U_0 , изменения анодного тока $J_a(U_y)$ можно приближенно определить, представив характеристику лампы полиномом третьей степени:

$$J_a(U_y) \approx J_{a0} + S \left[\Delta U_y - \frac{(\Delta U_y)^3}{3V^2} \right]. \quad (12.6)$$

Здесь $J_{a0} = J_a(U_0)$ - постоянный анодный ток, соответствующий рабочей точке; $S = dJ_a(U_0)/dU_y$ - крутизна характеристики в точке P ; а

$$V = \left[-\frac{2S}{d^3J_a(U_0)/d^3U_y} \right]^{1/2} -$$

- параметр, имеющий размерность напряжения и характеризующий нелинейность кривой в точке покоя. Замена истинной кривой $J_a(U_y)$ (она показана сплошной линией на рис. 12.2) на приближенную зависимость (12.6) (штриховая линия), с одной стороны достаточно хорошо описывает преобразование небольших колебаний в лампе, а с другой - позволяет учитывать нелинейные процессы.

Если омическим сопротивлением контура можно пренебречь, то управляющее напряжение в рабочей точке U_0 связано с ЭДС в цепях сетки E_c и анода E_a следующим соотношением:

$$U_0 = E_c + DE_a. \quad (12.7)$$

Согласно рис. 12.1-в анодное напряжение U_a равно ЭДС в анодной цепи E_a , за вычетом падения напряжения на индуктивной цепочке контура:

$$U_a = E_a - \left(L \frac{dI_L}{dt} + RI_L \right). \quad (12.8)$$

Напряжение на сетке U_c , в свою очередь, за счет обратной связи M , определяется ЭДС в сеточной цепи E_c и скоростью изменения тока I_L в контуре:

$$U_c = E_c + M \frac{dI_L}{dt}. \quad (12.9)$$

Подставляя (12.8 ÷ 12.9) в формулу для управляющего напряжения (12.5), получим

$$U_y = U_c + DU_a = E_c + DE_a + (M - DL) \frac{dI_L}{dt} - DRI_L = U_0 + (M - DL) \frac{dI_L}{dt} - DRI_L.$$

Отсюда, согласно определению $\Delta U_y = U - U_0$, находим переменную составляющую управляющего напряжения:

$$\Delta U_y = (M - DL) \frac{dI_L}{dt} - DRI_L. \quad (12.10)$$

Если пренебречь реакцией анодной нагрузки, т.е. положить $D = 0$, то последнее выражение упрощается и принимает вид

$$\Delta U_y = M \frac{dI_L}{dt}. \quad (12.11)$$

Для упрощения дальнейшего анализа, мы будем пользоваться приближенной формулой (12.11). Заметим только, что учет реакции анодной нагрузки сводится в основном к формальной замене M на $M' = M - DL$.

Введем теперь в рассмотрение переменную составляющую тока $I = I_L - J_{a0}$ и перепишем исходное уравнение (12.3) с учетом определений (12.4), (12.6), а также связи между ΔU_y и I_L (12.11):

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \left\{ I - SM \frac{dI}{dt} \left[1 - \frac{M^2}{3V^2} \left(\frac{dI}{dt} \right)^2 \right] \right\} = \frac{dE(t)}{dt} + \frac{1}{C} I_{op}. \quad (12.12)$$

Разделим обе части уравнения (12.12) на L и введем собственную частоту контура $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. После этого, перенеся в правую часть нелинейные по I слагаемые, появление которых связано с нелинейностью анодной характеристики лампы (12.6), и неконсервативное слагаемое $R \frac{dI}{dt}$, благодаря которому учитываются тепловые потери в системе, приходим к уравнению вида

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \omega_0^2 I = \omega_0^2 SM \frac{dI}{dt} \left\{ 1 - \frac{RC}{SM} - \frac{M^2}{3V^2} \left(\frac{dI}{dt} \right)^2 \right\} + \frac{1}{L} \frac{dE}{dt} + \omega_0^2 I_{op}. \quad (12.13)$$

Введем в рассмотрение безразмерное время $t' = \omega_0 t$, дифференцирование по которому будем обозначать точкой сверху:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{dI}{dt'} \cdot \frac{dt'}{dt} = \omega_0 \overset{\square}{I}. \quad (12.14)$$

С учетом (12.14) уравнение (12.13) приобретает вид

$$\overset{\square}{I} + I = \mu \overset{\square}{I} \left(p - \frac{4}{3} \frac{\overset{\square}{I}^2}{I_0^2} \right) + \frac{1}{L\omega_0} \overset{\square}{E} + I_{op}, \quad (12.15)$$

где использованы следующие обозначения:

$$\mu = \omega_0 SM ; \quad p = 1 - \frac{RC}{SM} ; \quad I_0 = \frac{2V}{\omega_0 M}. \quad (12.16)$$

Наконец, разделим обе части уравнения (12.15) на I_0 и введем безразмерный ток $x = I/I_0$:

$$\ddot{x} + x = \mu x \left(p - \frac{4}{3} x^2 \right) + \mu F(t'). \quad (12.17)$$

Через $\mu F(t')$ мы обозначили “**внешние силы**”, вызывающие флуктуации в данной колебательной системе - **тепловые и дробовые шумы**:

$$\mu F(t') = \frac{1}{I_0} \left\{ \frac{1}{L\omega_0} \ddot{E}(t') + I_{dp}(t') \right\} \quad (12.18)$$

12.2. Укороченные уравнения Ван-дер-Поля

При $\mu = 0$ уравнение (12.17) переходит в уравнение для идеального гармонического осциллятора

$$\ddot{x} + x = 0, \quad (12.19)$$

которое описывает незатухающие гармонические колебания тока в контуре с бесконечно высокой добротностью:

$$x(t') = r \cos(t' + \varphi). \quad (12.20-a)$$

Постоянные интегрирования r и φ имеют смысл амплитуды и фазы колебаний соответственно. Если внешние силы $\mu F(t')$, нелинейные и диссипативные слагаемые являются достаточно малыми ($\mu \ll 1$), то колебания, описываемые уравнением (12.17), будут мало отличаться от гармонических колебаний (12.20-a). В этом случае решение уравнения (12.17) можно искать в виде

$$x(t') = r(\theta) \cos[t' + \varphi(\theta)], \quad (12.20-b)$$

где амплитуда r и фаза φ являются функциями “медленного времени” $\theta = \mu t'$.

Прежде чем проводить анализ решения, сделаем некоторые замечания относительно исходного уравнения (12.17), которое мы перепишем в более общей форме:

$$\ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x}) + \mu F(t'), \quad (12.21)$$

где $\mu \ll 1$, а $f(x, \dot{x})$ - некоторая детерминированная нелинейная функция x и \dot{x} , определяемая типом автоколебательной системы. Для рассматриваемого простейшего генератора

$$f(x, \dot{x}) = x \left(p - \frac{4}{3} x^2 \right). \quad (12.22)$$

К виду (12.21) сводятся уравнения, описывающие колебания в широком классе автоколебательных “почти гармонических” устройств (ламповые генераторы, генераторы на полупроводниковых элементах, квантовые и оптические генераторы и т. д.). Системы, в которых под действием малых нелинейных и диссипативных членов ($\mu \ll 1$) происходят почти гармонические колебания, называются **томсоновскими**. Решение описывающих их дифференциальных уравнений можно проводить в рамках приближенного (асимптотического) **метода Ван-дер-Поля**, или, как его называют иначе, **метода медленных возмущений**.

Для выбранного вида решения (12.20-б) вычислим вторую производную \ddot{x} с точностью до линейных по $\mu \ll 1$ членов:

$$\ddot{x} = -r \sin(t' + \varphi) + \mu \frac{dr}{d\theta} \cos(t' + \varphi) - \mu r \frac{d\varphi}{d\theta} \sin(t' + \varphi), \quad (12.23)$$

$$\ddot{x} \approx -r \cos(t' + \varphi) - 2\mu \frac{dr}{d\theta} \sin(t' + \varphi) - 2\mu r \frac{d\varphi}{d\theta} \cos(t' + \varphi). \quad (12.24)$$

Подставим (12.24) в уравнение (12.21). Слагаемые нулевого порядка по μ , как и следовало ожидать, сокращаются, а линейные члены приводят к уравнению

$$-2 \left[\frac{dr}{d\theta} \sin(t' + \varphi) + r \frac{d\varphi}{d\theta} \cos(t' + \varphi) \right] = f(x, \dot{x}) + F(t'), \quad (12.25)$$

причем в правой части этой формулы в аргументах функции f следует учитывать только главные по малому параметру μ слагаемые:

$$x = r \cos(t' + \varphi); \quad x = -r \sin(t' + \varphi) \quad (12.26)$$

Функция $f(x, x)$ является периодической функцией от переменной $\Theta = t' + \varphi$ с периодом 2π , так как ее аргументы x и x есть тригонометрические функции (12.26) от Θ . Поэтому $f(x, x)$ может быть разложена в ряд Фурье на интервале $0 \leq \Theta \leq 2\pi$:

$$f(x, x) = f(r \cos \Theta, -r \sin \Theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(r) \cos n\Theta + b_n(r) \sin n\Theta]. \quad (12.27)$$

Здесь $a_n(r)$ и $b_n(r)$ - коэффициенты разложения:

$$\begin{cases} a_n(r) \\ b_n(r) \end{cases} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(r \cos \Theta, -r \sin \Theta) \begin{cases} \cos n\Theta \\ \sin n\Theta \end{cases} d\Theta. \quad (12.28)$$

Для систем с достаточно высокой добротностью колебания происходят лишь в небольшой окрестности резонансной частоты $\omega = \omega_0$. Действительно, амплитуда r и фаза φ колебаний являются функциями медленного времени $\theta = \mu t'$. Последнее означает, что резонансная кривая рассматриваемого колебательного контура имеет ширину полосы $\Delta_{рез} = |\omega/\omega_0| \approx 2\mu \ll 1$ (см. рис. 12.3). Данное обстоятельство позволяет нам произвести еще ряд упрощений. Во-первых, в правой части уравнения (12.25) достаточно учесть только резонансные слагаемые функции $f(x, x)$ - члены с $n=1$ в формуле (12.27). Во-вторых, из всего широкого энергетического спектра $S_F(\omega)$ случайной внешней силы $F(t')$ в уравнении (12.25) можно оставить только участок спектра, примыкающий к частоте собственных колебаний системы $\omega = \omega_0$ (см. рис. 12.3).

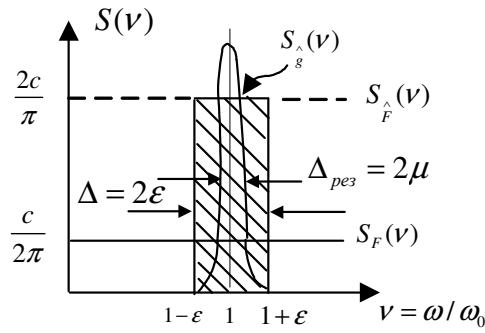


Рис. 12.3.

Согласно определению (12.18), случайная сила $F(t')$, являясь суперпозицией тепловых и дробовых флуктуаций, - близка к белому шуму. Вырежем из ее энергетического спектра $S_F(\omega)$ некоторую полосу частот шириной $\Delta = |\omega/\omega_0| = 2\varepsilon$, удовлетворяющую следующему условию:

$$\mu \ll \varepsilon \ll 1. \quad (12.29)$$

С учетом малости ε истинный случайный процесс $F(t')$ можно заменить на узкополосный - $g(t')$, который, как мы знаем из §6, может быть представлен в виде суммы двух квадратурных компонент:

$$g(t') \approx F_{\square}(\theta) \cos(t' + \varphi) + F_{\perp}(\theta) \sin(t' + \varphi). \quad (12.30)$$

Подставляя (12.30) в (12.25) и приравнявая коэффициенты при каждой из двух линейно независимых функций $\cos(t' + \varphi)$ и $\sin(t' + \varphi)$, приходим к **системе уравнений Ван-дер-Поля** для определения медленных изменений амплитуд $r(\theta)$ и фазы $\varphi(\theta)$:

$$-2 \frac{dr}{d\theta} = b_1(r) + F_{\perp}(\theta), \quad (12.31-a)$$

$$-2r \frac{d\varphi}{d\theta} = a_1(r) + F_{\square}(\theta). \quad (12.31-b)$$

Уравнения (12.31) называют еще **укороченными уравнениями** - они действительно проще и “короче” исходного уравнения (12.21).

Вернемся к нашему конкретному примеру - простейшей автоколебательной системе, для которой $f(x, \dot{x})$ имеет вид

$$f(x, \dot{x}) = -r \sin \Theta \left[p - \frac{4}{3} r^2 \sin^2 \Theta \right]. \quad (12.32)$$

Из данного выражения следует, что f - есть нечетная функция от Θ , поэтому интеграл (12.28) для $a_1(r)$ обращается в нуль, а для $b_1(r)$ имеем:

$$b_1(r) = -\frac{r}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \Theta \left(p - \frac{4}{3} r^2 \sin^2 \Theta \right) d\Theta. \quad (12.33)$$

Нахождение $b_1(r)$ сводится к вычислению двух интегралов:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \Theta d\Theta = 1 \quad \text{и} \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 \Theta d\Theta = \frac{3}{4},$$

в результате чего получаем:

$$b_1(r) = -r(p - r^2). \quad (12.34)$$

С учетом (12.34), уравнения Ван-дер-Поля (12.31) принимают вид

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{2}(p - r^2) - \frac{1}{2}F_{\perp}(\theta), \quad (12.35-a)$$

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = -\frac{1}{2r}F_{\parallel}(\theta). \quad (12.35-b)$$

Таким образом, исследование флуктуаций в автоколебательной системе свелось к решению системы двух дифференциальных уравнений для амплитуды и фазы колебаний, которые можно рассматривать как уравнения движения динамической системы, описываемой двумя параметрами r и φ , под действием случайных внешних

сил F_{\square} и F_{\perp} . Легко увидеть довольно близкую аналогию между уравнениями (12.35) и уравнением движения броуновской частицы (9.11).

12.3. Анализ решения уравнений Ван-дер-Поля

Обратимся сначала к анализу решения уравнений (12.35) в случае отсутствия внешних сил $F_{\perp} = F_{\square} = 0$, т. е. исследуем характер колебаний в автономной системе (но, по-прежнему, нелинейной и неконсервативной):

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{2}(p - r^2), \quad (12.36-a)$$

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = 0. \quad (12.36-b)$$

Из (12.36-b) следует, что $\varphi = \varphi_0 = const$, а что касается решения нелинейного уравнения (12.36-a), то мы проведем его лишь на качественном уровне. Для наглядности состояние рассматриваемой динамической системы будем изображать точкой на плоскости с полярными координатами r (расстояние до начала координат) и φ (азимутальный угол) – **плоскости Ван-дер-Поля**. Из (12.36-b) следует, что угол φ остается постоянным, так что точка, изображающая состояние системы, может двигаться только по лучу $\varphi = \varphi_0$. Характер эволюции системы существенно зависит от знака параметра p , который был введен в (12.16):

$$p = 1 - \frac{RC}{SM}. \quad (12.37)$$

Величина SM есть произведение крутизны характеристики лампы - S и коэффициента обратной связи - M . Чем больше SM , тем легче система самовозбуждается. Параметр же RC учитывает диссипативные потери в системе (аналог механического трения).

При $p < 0$ (диссипация преобладает над обратной связью) правая часть (12.36-a) - отрицательна при любых r , так как всегда $r > 0$. Следовательно, в этом случае $dr/d\theta < 0$, т. е. точка на плоскости Ван-дер-Поля движется по лучу $\varphi = \varphi_0$ к началу координат, пока не достигнет состояния равновесия $r = 0$, где $dr/d\theta = 0$ (см. рис.12.4). Для перехода от плоскости Ван-дер-Поля к **фазовой плоскости**, на которой состояние

системы задается значением “координаты” x и “скорости” \dot{x} согласно формулам (12.26), необходимо плоскость Ван-дер-Поля вращать вокруг начала координат с единичной угловой скоростью против часовой стрелки. При этом фазовая точка будет двигаться по часовой стрелке по спирали к началу координат (рис.12.5) – амплитуда колебаний в системе будет уменьшаться до тех пор, пока колебания не затухнут полностью ($r = 0$).

В противоположном предельном случае $p > 0$ (обратная связь преобладает над диссипацией) знак производной $dr/d\theta$, как следует из (12.36-а), зависит от амплитуды колебаний r : при $r > r_0 = \sqrt{p}$ правая часть (12.36-а) будет по-прежнему отрицательной ($dr/d\theta < 0$) и точка A на плоскости Ван-дер-Поля будет двигаться по лучу $\varphi = \varphi_0$ к началу координат (рис. 12.6); при $r < r_0$, наоборот, $dr/d\theta > 0$ и точка B (рис. 12.6) двигается по радиусу от начала координат. Очевидно, что при $p > 0$ есть два положения равновесия: $dr/d\theta = 0$ при $r = 0$ и $r = r_0$. Простейшее исследование на устойчивость показывает, что только $r = r_0$ соответствует устойчивому равновесию. На фазовой плоскости траектории, описываемые точками A и B , имеют вид спиралей, приближающихся к окружности $r = r_0$, которую называют **предельным циклом** (рис. 12.7).

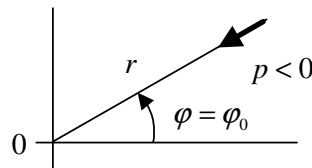


Рис. 12.4.

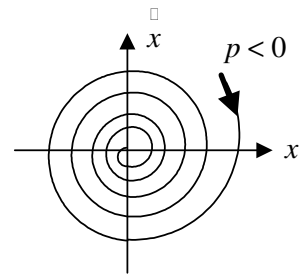


Рис. 12.5.

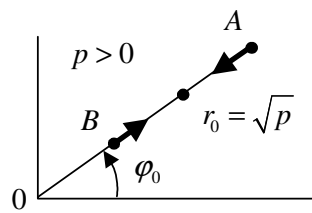


Рис. 12.6.

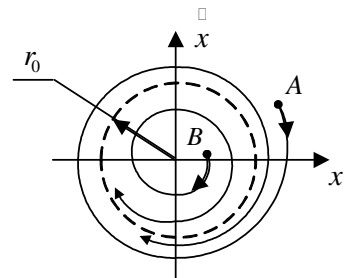


Рис. 12.7.

Таким образом, при $p > 0$ система из любого начального состояния выходит на стационарный режим гармонических колебаний с постоянными амплитудой r_0 и фазой φ_0 :

$$x_0(t') = r_0 \cos(t' + \varphi_0).$$

12.4. Учет случайных факторов

Обратимся теперь к основному интересующему нас вопросу: как изменяются автоколебания в системе при наличии теплового и дробового шума? Для ответа на этот вопрос надо решить уравнения (12.35) при наличии внешних случайных сил $F_{\perp}(\theta)$ и $F_{\square}(\theta)$. Наибольший интерес при этом представляет установившийся автоколебательный режим $p > 0$, когда система вышла уже на предельный цикл $r = r_0$. С качественной точки зрения роль внешней силы F_{\perp} в (12.35) сводится к “сталкиванию” фазовой точки с предельного цикла (рис. 12.8), т. е. к увеличению или уменьшению амплитуды r колебаний - сила F_{\perp} действует как бы “перпендикулярно” к фазовой траектории системы (мы не зря ввели значок \perp , обозначающий перпендикулярность). Другая же “проекция” силы - $F_{\square}(\theta)$ действует по касательной к траектории, замедляя и ускоряя вращение фазовой точки вокруг начала координат, так что за равные промежутки времени t' фазовая точка описывает не равные углы (на рис. 12.8 радиусы из начала координат проведены к фазовой точке через равные промежутки времени).

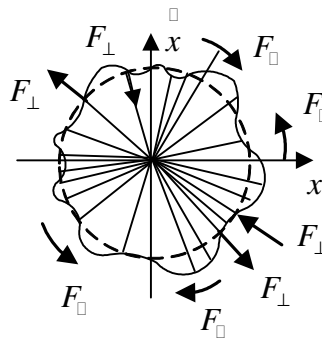


Рис. 12.8.

Таким образом, наличие случайных сил должно приводить к флуктуациям, как амплитуды колебаний r , так и их фазы φ и, следовательно, частоты - $d\varphi/d\theta$. Будем считать, что в результате воздействия “слабых” сил ($|F_{\square}(\theta)| \ll 1$, $|F_{\perp}(\theta)| \ll 1$) в

автоколебательной системе возникают малые флуктуации. Это означает, что амплитуду колебаний можно искать по формуле $r(\theta) = r_0 + \rho(\theta)$, причем $|\rho| \ll r_0$. Подставив данный вид решения в (12.35-а) и, учитывая только линейные по $|\rho|/r_0 \ll 1$ и $|F_{\perp}(\theta)| \ll 1$ слагаемые, получим

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{d\rho}{d\theta} \approx -p\rho - \frac{1}{2}F_{\perp}(\theta). \quad (12.38)$$

В правой части уравнения (12.35-б), учитывая малость внешних сил ($|F_{\square}(\theta)| \ll 1$), можно r заменить на r_0 . В результате, в линейном приближении приходим к уравнениям:

$$\frac{d\rho}{d\theta} + p\rho = -\frac{1}{2}F_{\perp}(\theta), \quad (12.39-а)$$

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = -\frac{1}{2r_0}F_{\square}(\theta). \quad (12.39-б)$$

В качестве начальных условий к этой системе уравнений удобно выбрать следующие: а) $\rho = 0$ при $\theta = -\infty$ (адиабатическое включение возмущений в бесконечно далеком прошлом); б) $\varphi = 0$ при $\theta = 0$ (фазу колебаний можно отсчитывать от произвольного значения и, в частности, от ее значений при $\theta = 0$). С уравнением (12.39-а) мы уже встречались в теории броуновского движения (см. формулу (9.13)), так что мы можем воспользоваться готовым решением (9.17):

$$\rho(\theta) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\theta} e^{p(\theta_1 - \theta)} F_{\perp}(\theta_1) d\theta_1. \quad (12.40-а)$$

Уравнение (12.39-б) также элементарно интегрируется:

$$\varphi(\theta) = -\frac{1}{2r_0} \int_0^{\theta} F_{\square}(\theta_1) d\theta_1. \quad (12.40-б)$$

Полученные формулы (12.40) решают динамическую часть поставленной задачи - выражают интересующие нас флуктуации амплитуды r и фазы φ через случайные силы F_{\perp} и F_{\square} . Очевидно, что для решения статистической задачи необходимо задаться статистическими параметрами этих случайных сил. В частности, считая, что $\langle F_{\perp} \rangle = \langle F_{\square} \rangle = 0$, получаем $\langle \rho \rangle = \langle \varphi \rangle = 0$.

Для определения **дисперсий** флуктуаций амплитуды и фазы:

$$\langle \rho^2(\theta) \rangle = \frac{1}{4} e^{-2\rho\theta} \int_{-\infty}^{\theta} \int_{-\infty}^{\theta} e^{\rho(\theta_1+\theta_2)} \langle F_{\perp}(\theta_1)F_{\perp}(\theta_2) \rangle d\theta_1 d\theta_2, \quad (12.41-a)$$

$$\langle \varphi^2(\theta) \rangle = \frac{1}{4r_0^2} \int_0^{\theta} \int_0^{\theta} \langle F_{\square}(\theta_1)F_{\square}(\theta_2) \rangle d\theta_1 d\theta_2, \quad (12.41-b)$$

нам понадобятся автокорреляционные функции $\langle F_{\perp}(\theta_1)F_{\perp}(\theta_2) \rangle$ и $\langle F_{\square}(\theta_1)F_{\square}(\theta_2) \rangle$. Для их нахождения предварительно построим автокорреляционную функцию силы $F(t')$, введенную формулой (12.18). Считая, что флуктуации тепловой ЭДС $E(t')$ и дробового тока $I_{op}(t')$ между собой не коррелируют, согласно (12.18) получим

$$\langle F(t'_1)F(t'_2) \rangle = \frac{1}{\mu^2 I_0^2} \left\{ \frac{1}{\omega_0^2 L^2} \langle E(t'_1)E(t'_2) \rangle + \langle I_{op}(t'_1)I_{op}(t'_2) \rangle \right\}. \quad (12.42)$$

Если ограничиться не слишком большими частотами флуктуаций, для которых справедлива формула Шоттки (11.23), то для автокорреляционной функции дробового тока имеем:

$$\langle I_{op}(t_1)I_{op}(t_2) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} S_I(\omega) e^{i\omega(t_2-t_1)} d\omega \approx eJ_a \delta(t_2-t_1). \quad (12.43)$$

Здесь мы учли, что входящее в формулу Шоттки среднее значение $\langle I \rangle$ согласно определению (12.4) равно J_a . Переходя теперь к безразмерному времени $t' = \omega_0 t$ и

учитывая, что $\delta(\omega_0 t) = \frac{1}{\omega_0} \delta(t)$, получаем:

$$\langle I_{op}(t'_1)I_{op}(t'_2) \rangle = eJ_a\omega_0\delta(t'_2-t'_1). \quad (12.44)$$

Для коррелятора производных от флуктуаций тепловой ЭДС $E(t')$, используя формулу Найквиста (10.15), имеем

$$\begin{aligned} \langle E'(t'_1)E'(t'_2) \rangle &= \frac{1}{\omega_0^2} \left\langle \frac{dE(t_1)}{dt_1} \cdot \frac{dE(t_2)}{dt_2} \right\rangle = -\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2}{d\tau^2} R_E(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \cdot S_E(\omega) e^{i\omega(t_2-t_1)} d\omega \approx \\ &\approx \int_{-\infty}^{\infty} S_E(\omega) e^{i\omega(t_2-t_1)} d\omega = \langle E(t_1)E(t_2) \rangle = 2kTR\delta(t_2-t_1) = 2kTR\omega_0\delta(t'_2-t'_1). \end{aligned} \quad (12.45)$$

Мы учли, что, из-за высокой добротности рассматриваемой колебательной системы, под знаком интеграла в (12.45) можно приближенно положить $\omega/\omega_0 \approx 1$ (см. рис.12.3).

Подставляя (12.44) и (12.45) в (12.42) приходим к выводу о том, что случайная сила $F(t')$ приближенно дельта-коррелирована, т. е. является белым шумом:

$$\langle F(t'_1)F(t'_2) \rangle = C\delta(t'_2-t'_1), \quad (12.46)$$

где $C = C_{op} + C_{менл}$, причем

$$C_{op} = \frac{eJ_a\omega_0}{\mu^2 I_0^2}, \quad C_{менл} = \frac{2kTR}{\mu^2 I_0^2 \omega_0 L^2}. \quad (12.47)$$

Из (12.46) следует, что энергетический спектр $S_F(\nu)$ силы $F(t')$ постоянен на всех частотах ($-\infty < \nu < \infty$):

$$S_F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle F(t')F(t'+\tau') \rangle e^{-i\nu\tau'} d\tau' = \frac{C}{2\pi}. \quad (12.48)$$

Здесь $\nu = \omega/\omega_0$ - безразмерная частота, соответствующая безразмерному времени $t' = \omega_0 t$.

Поставим $F(t')$ в соответствие аналитический сигнал $\hat{F}(t')$. Его энергетический спектр - $S_{\hat{F}}(\nu)$ согласно (6.51) равен

$$S_{\hat{F}}(\nu) = \begin{cases} 4S_F(\nu) = \frac{2C}{\pi}, & \nu \geq 0; \\ 0, & \nu < 0. \end{cases} \quad (12.49)$$

С другой стороны, узкополосный случайный процесс $g(t')$ (12.30) также можно рассматривать как вещественную часть $g = \text{Re } \hat{g}$ аналитического сигнала $\hat{g}(t')$:

$$\hat{g}(t') = [F_{\square}(t') - iF_{\perp}(t')] e^{i(t'+\varphi)}, \quad (12.50)$$

энергетический спектр которого - $S_{\hat{g}}(\nu)$ отличен от нуля только в узкой полосе частот $1 - \varepsilon < \nu < 1 + \varepsilon$, где он совпадает со спектром $S_{\hat{F}}(\nu)$ (см. рис. 12.3). Несмотря на то, что ширина 2ε энергетического спектра $S_{\hat{g}}(\nu)$ предполагается достаточно малой ($\varepsilon \ll 1$), для того, чтобы $\hat{g}(t')$ можно было считать узкополосным, тем не менее, она должна быть выбрана существенно больше, чем ширина энергетического спектра флуктуаций тока в контуре $x(t')$, которая приблизительно равна 2μ (см. неравенство (12.29) и рис. 12.3). Поэтому, при $\varepsilon \gg \mu$ случайный процесс $\hat{g}(t')$ действует на ток в колебательном контуре так же, как и белый шум со спектральной плотностью $S_{\hat{g}}(\nu) = 2C/\pi$.

По известному спектру $S_{\hat{g}}(\nu)$ можно определить корреляционную функцию

$$\langle \hat{g}(t'_1) \hat{g}^*(t'_2) \rangle = \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} S_{\hat{F}}(\nu) e^{i\nu(t'_1-t'_2)} d\nu.$$

Учитывая снова неравенство (12.29), пределы интегрирования можно растянуть от $-\infty$ до $+\infty$, после чего получим

$$\langle \hat{g}(t'_1) \hat{g}^*(t'_2) \rangle = 4C\delta(t'_2 - t'_1), \quad (12.51-a)$$

т.е. аналитический сигнал $\hat{g}(t')$ так же, как и $F(t')$ приближенно дельта-коррелирован (сравни с (12.46)). Из теории аналитического сигнала имеет место также равенство (см. (6.52) и (6.53))

$$\langle \hat{g}(t'_1)\hat{g}(t'_2) \rangle = 0. \quad (12.51-б)$$

Что же касается квадратурных составляющих F_{\square} и F_{\perp} , то их автокорреляционные функции находятся из (12.51), с учетом представления \hat{g} в виде (12.50):

$$\langle F_{\square}(\theta_1)F_{\square}(\theta_2) \rangle = \langle F_{\perp}(\theta_1)F_{\perp}(\theta_2) \rangle = 2C\delta(t'_1 - t'_2) = 2C\mu\delta(\theta_1 - \theta_2), \quad (12.52)$$

где $\theta_1 = \mu t'_1$ и $\theta_2 = \mu t'_2$. Используем теперь (12.52) для вычисления дисперсий флуктуаций амплитуды и фазы по формулам (12.41):

$$\langle \rho^2(\theta) \rangle = \frac{C\mu}{2} e^{-2p\theta} \int_{-\infty}^{\theta} \int_{-\infty}^{\theta} e^{p(\theta_1 + \theta_2)} \delta(\theta_1 - \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 = \frac{C\mu}{4p}, \quad (12.53-а)$$

$$\langle \varphi^2(\theta) \rangle = \frac{C\mu}{2r_0^2} \int_0^{\theta} \int_0^{\theta} \delta(\theta_1 - \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 = \frac{C\mu}{2p} \theta. \quad (12.53-б)$$

Выводы

1. Следует обратить внимание на тот факт, что дисперсия флуктуаций амплитуды оказалась не зависящей от времени. Если бы, наряду с $\langle \rho^2 \rangle$, мы тем же способом рассчитали автокорреляционную функцию $\langle \rho(\theta_1)\rho(\theta_2) \rangle$, то убедились бы, что она зависит только от разности времен $\theta_1 - \theta_2$, т.е. $\rho(\theta)$ является стационарным случайным процессом (по крайней мере, в широком смысле).

2. Случайный процесс $\varphi(\theta)$ - не является стационарным, так как величина $\langle \varphi^2(\theta) \rangle$ растет линейно при увеличении времени θ . Это, как мы видели при исследовании броуновского движения, является характерным признаком случайных процессов диффузионного типа (см. §9), причем роль коэффициента диффузии D играет отношение:

$$D = \frac{\langle \varphi^2(\theta) \rangle}{2t} = \frac{C\mu^2\omega_0}{4\rho} \quad (12.54)$$

(мы учли, что $\theta = \mu t' = \mu\omega_0 t$).

3. Из (12.53) видно также, что флуктуации амплитуды и фазы возрастают при уменьшении параметра ρ , т.е. при приближении к критическому значению $\rho = 0$, отделяющему автоколебательный режим ($\rho > 0$ - режим генерации) от релаксационного ($\rho < 0$, режим затухающих колебаний). Вблизи $\rho = 0$ состояние системы является неустойчивым и по этой причине флуктуации могут оказаться настолько большими, что формулы (12.53), полученные при условии $|\rho| \ll r_0 = \sqrt{p}$, уже будут неприменимы.

4. Наконец, отметим, что тепловые флуктуации и дробовый шум дают аддитивный вклад в величину флуктуаций амплитуды и фазы. Их относительная роль определяется отношением:

$$\frac{C_{др}}{C_{тепл}} = \frac{e}{2kT} U_C, \quad (12.55)$$

где U_C - амплитуда колебаний разности потенциалов на обкладках конденсатора C в колебательном контуре:

$$U_C = \frac{J_a L}{RC}. \quad (12.56)$$

При $T = 300K$ из (12.55) следует:

$$\frac{C_{др}}{C_{тепл}} \approx 17U_C. \quad (12.57)$$

Таким образом, если $U_C > 1/17V$, то преобладает дробовый шум, в обратном случае – тепловые флуктуации.

ОСНОВЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ И РАССЕЙЯНИЯ ВОЛН

§ 13. Случайные поля и волны

В предыдущих параграфах мы имели дело с однопараметрическими случайными функциями $\xi(\alpha)$, где в качестве параметра α , как правило, выступало время t . Зависимости $\xi(\alpha)$ называются **случайными процессами**. Если же речь идет о случайной функции более чем одного параметра $\xi(\alpha, \beta, \dots)$, то ее называют **случайным полем** (в пространстве параметров α, β, \dots). В задачах распространения волн, как правило, достаточно рассмотрения всего четырех параметров: времени t и трех пространственных координат, например, $\vec{R} = (x, y, z)$. Поле $\xi(t, \vec{R})$ можно рассматривать как поле в четырехмерном пространстве, но в нерелятивистских задачах обычно говорят о переменном (зависящем от t) поле в трехмерном пространстве (x, y, z) .

Случайное поле может описываться не одной, а N функциями $\xi^{(m)}(t, \vec{R})$, $m = 1, 2, \dots, N$. В этом случае $\xi^{(m)}(t, \vec{R})$ называется N -**мерным случайным полем в пространстве (четырех) параметров t, \vec{R}** . Например, три компоненты напряженности электрического поля $\vec{E} \{E_x(t, \vec{R}), E_y(t, \vec{R}), E_z(t, \vec{R})\}$ образуют трехмерное случайное поле. С другой стороны, с чисто математической точки зрения компоненты $\xi^{(m)}(t, \vec{R})$ могут быть чем угодно и даже не обязаны обладать одинаковой размерностью.

13.1. Статистическое описание случайных полей

Для краткости через $Q = (t, \vec{R})$ будем обозначать точку в четырехмерном пространстве. Полное задание одномерного случайного поля $\xi(Q)$ означает, что известны все его n -мерные, или, как часто говорят, n -точечные ($n = 1, 2, \dots$), плотности вероятностей, т.е. для любого числа n произвольно выбранных точек Q_i известны функции

$$W_n \{x_1, Q_1; \dots; x_n, Q_n\} dx_1 \dots dx_n = P \left\{ x_v < \xi(Q_v) \leq x_v + dx_v \quad (v=1, 2, \dots, n) \right\}, \quad (13.1)$$

где $P\{x_v < \xi(Q_v) \leq x_v + dx_v\}$ - вероятность того, что случайная величина $\xi(Q)$ в точке $Q = Q_v$ приняла значение, лежащее в интервале $(x_v, x_v + dx_v]$.

Аналогично полное статистическое задание (описание) N - мерного поля $\xi^{(m)}(Q)$ дается совокупностью nN - мерных плотностей вероятностей

$$\begin{aligned} W_{nN} \{x_1^{(1)}, Q_1; \dots; x_n^{(1)}, Q_n; x_1^{(2)}, Q_1; \dots; x_n^{(2)}, Q_n; \dots; x_1^{(N)}, Q_1; \dots; x_n^{(N)}, Q_n\} dx_1^{(1)} \cdot dx_1^{(2)} \cdot \dots \cdot dx_n^{(N)} = \\ = P \left\{ x_v^{(m)} < \xi^{(m)}(Q_v) \leq x_v^{(m)} + dx_v^{(m)} \quad (v=1, 2, \dots, n, \quad m=1, 2, \dots, N) \right\}. \end{aligned} \quad (13.2)$$

Аналогично рассмотренным ранее случайным процессам можно показать, что плотности вероятностей должны подчиняться условиям **неотрицательности, симметрии, согласованности и нормировки.**

13.2. Моменты случайного поля

Зная многомерные плотности вероятностей, можно вычислить моменты случайного поля ξ любого порядка. В общем случае эти моменты будут функциями координат: $Q_v = (t_v, \vec{R}_v)$. Во многих вопросах наибольший интерес представляют наинизшие моменты (первого и второго порядка), с которыми оперирует корреляционная теория случайных полей.

Среднее значение случайного поля $\xi(Q)$ (момент первого порядка) вычисляется при помощи одномерной плотности вероятностей $W_1(x, Q)$:

$$\langle \xi(Q) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x W_1(x, Q) dx. \quad (13.3)$$

Флуктуационную часть случайного поля ξ будем обозначать как

$$\delta\xi \equiv \xi - \langle \xi \rangle \equiv \xi - \bar{\xi}. \quad (13.4)$$

Смешанный момент второго порядка R_ξ вычисляется при помощи двумерной плотности вероятностей $W_2(x_1, Q_1; x_2, Q_2)$:

$$R_\xi(Q_1, Q_2) = \langle \xi(Q_1)\xi(Q_2) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 W_2(x_1, Q_1; x_2, Q_2) dx_1 dx_2. \quad (13.5)$$

Функция корреляции (точнее, **функция автокорреляции**) B_ξ выражается через R_ξ :

$$\begin{aligned} B_\xi(Q_1, Q_2) &= \langle \delta\xi(Q_1)\delta\xi(Q_2) \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - \langle \xi(Q_1) \rangle][x_2 - \langle \xi(Q_2) \rangle] \cdot W_2(x_1, Q_1; x_2, Q_2) dx_1 dx_2 = \\ &= R_\xi(Q_1, Q_2) - \langle \xi(Q_1) \rangle \langle \xi(Q_2) \rangle. \end{aligned} \quad (13.6)$$

Для случайных полей с нулевым средним значением функции $B_\xi(Q_1, Q_2)$ и $R_\xi(Q_1, Q_2)$ совпадают:

$$R_\xi(Q_1, Q_2) = B_\xi(Q_1, Q_2). \quad (13.7)$$

Дисперсия случайного поля σ_ξ^2 , т.е. средний квадрат флуктуаций, равна

$$\sigma_\xi^2(Q) = \langle \delta\xi^2(Q) \rangle = \langle [\xi(Q) - \langle \xi(Q) \rangle]^2 \rangle = B_\xi(Q, Q). \quad (13.8)$$

Многомерное поле $\xi^{(m)}(Q)$ характеризуется совокупностью средних значений $\langle \xi^{(m)}(Q) \rangle$ и **матрицей моментов второго порядка** с элементами

$$R_{ik}(Q_1, Q_2) = \langle \xi^{(i)}(Q_1) \xi^{(k)}(Q_2) \rangle. \quad (13.9)$$

С матрицей R_{ik} связана и **корреляционная матрица** B_{ik} , элементы которой равны

$$B_{ik}(Q_1, Q_2) = \langle \delta \xi^{(i)}(Q_1) \delta \xi^{(k)}(Q_2) \rangle = R_{ik}(Q_1, Q_2) - \langle \xi^{(i)}(Q_1) \rangle \langle \xi^{(k)}(Q_2) \rangle. \quad (13.10)$$

13.3. Статистически однородные поля

Аналогично случайным процессам на случайные поля распространяется и понятие статистической однородности. **Одномерное случайное поле ξ называется однородным (в узком смысле), т.е. стационарным по t и однородным по \vec{R} , если все n -мерные плотности вероятностей W_n инвариантны относительно преобразования трансляции $Q_v \rightarrow Q_v + \delta Q$:**

$$\begin{aligned} P\{x_v < \xi(Q_v + \delta Q) \leq x_v + dx_v, v = 1, 2, \dots, n\} = \\ = P\{x_v < \xi(Q_v) \leq x_v + dx_v, v = 1, 2, \dots, n\}. \end{aligned} \quad (13.11)$$

Аналогичное понятие статистической однородности можно ввести и для N -мерного случайного поля.

Понятие пространственной однородности для случайных полей (инвариантность плотностей W_n по отношению к пространственному сдвигу $\vec{R} \rightarrow \vec{R} + \delta \vec{R}$) является естественным обобщением понятия стационарности для случайных функций времени. Но многомерность пространства параметров (например, t, \vec{R}) открывает новые возможности, а именно: случайное поле может быть однородным по одним параметрам, а по остальным — неоднородным. Например, поле стационарно по времени, но неоднородно по пространству, или поле однородно по поверхности сферы, но неоднородно по радиусу и т.д.

Понятие **статистической однородности в широком смысле** подразумевает выполнение условия трансляции лишь для одноточечной W_1 и двухточечной W_2 плотностей вероятностей.

Следствия

Рассмотрим сначала поля, зависящие только от пространственных координат, т.е. не зависящие от времени t : $Q = (\vec{R})$. Для статистически однородного (в широком смысле) поля $\xi(\vec{R})$ инвариантность относительно сдвига $\vec{R} \rightarrow \vec{R} + \delta\vec{R}$ должна выполняться только для среднего значения и для моментов второго порядка:

$$\langle \xi(\vec{R}) \rangle = \langle \xi(\vec{R} + \delta\vec{R}) \rangle, \quad (13.12)$$

$$B_\xi(\vec{R}_1, \vec{R}_2) = B_\xi(\vec{R}_1 + \delta\vec{R}, \vec{R}_2 + \delta\vec{R}). \quad (13.13)$$

Условие (13.12) означает, что $\langle \xi \rangle = Const$, т.е. **среднее значение является постоянной величиной**. Действительно, выбрав $\delta\vec{R} = -\vec{R}$, получим $\langle \xi(\vec{R}) \rangle = \langle \xi(0) \rangle = Const$.

Положив в (13.13) $\delta\vec{R} = -\vec{R}_2$ (или $\delta\vec{R} = -\vec{R}_1$), находим, что

$$B_\xi(\vec{R}_1, \vec{R}_2) = B_\xi(\vec{R}_1 - \vec{R}_2, 0) = B_\xi(0, \vec{R}_2 - \vec{R}_1) = B_\xi(\vec{R}_1 - \vec{R}_2) = B_\xi(\vec{R}_2 - \vec{R}_1). \quad (13.14)$$

Из (13.14) следует, что для статистически однородных полей автокорреляционная функция B_ξ зависит только от разности $\vec{\rho} = \vec{R}_1 - \vec{R}_2$ (но не от \vec{R}_1 и \vec{R}_2 порознь), причем $B_\xi(\vec{\rho}) = B_\xi(-\vec{\rho})$. Кроме того, для дисперсии случайного поля имеем

$$\sigma_\xi^2(\vec{R}) = B_\xi(\vec{R}, \vec{R}) = B_\xi(0) = \sigma_\xi^2(0) = Const. \quad (13.15)$$

Статистически однородные поля, у которых $B_\xi(\vec{\rho})$ зависит только от модуля (но не от направления) вектора $\vec{\rho} = \vec{R}_1 - \vec{R}_2$, соединяющего точки \vec{R}_1 и \vec{R}_2 ,

$$B_\xi(\vec{\rho}) = B_\xi(\rho), \quad (13.16)$$

где $\rho = |\vec{R}_1 - \vec{R}_2|$, называются **статистически изотропными**. Примером корреляционной функции однородного и изотропного поля может служить корреляционная функция в виде гауссовой зависимости:

$$B_{\xi}(\rho) = \sigma_{\xi}^2 e^{-\rho^2/2l^2}, \quad (13.17)$$

где l - **радиус корреляции поля**.

У статистически однородных, но **анизотропных полей** функции $B_{\xi}(\vec{\rho})$ зависят не только от модуля, но и от направления вектора $\vec{\rho} = \vec{R}_1 - \vec{R}_2$. Пример:

$$B_{\xi}(\vec{\rho}) = \sigma_{\xi}^2 \exp \left\{ -\frac{\rho_x^2}{2a^2} - \frac{\rho_y^2}{2b^2} - \frac{\rho_z^2}{2c^2} \right\}. \quad (13.18)$$

Величины a, b, c характеризуют масштабы пространственной корреляции в направлениях x, y и z . Если $a = b = c = l$, то анизотропное распределение (13.18) переходит в изотропное (13.17).

13.4. Спектральные представления для однородных случайных полей

Запишем формальное разложение флуктуационной компоненты $\delta\xi(\vec{R})$ однородного случайного поля в трехкратный интеграл Фурье:

$$\delta\xi(\vec{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{\xi}(\vec{\chi}) e^{i\vec{\chi}\vec{R}} d\vec{\chi}. \quad (13.19)$$

Здесь $C_{\xi}(\vec{\chi})$ - **пространственная спектральная амплитуда поля** $\delta\xi(\vec{R})$. Запишем и обратное преобразование Фурье:

$$C_{\xi}(\vec{\chi}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \delta\xi(\vec{R}) e^{-i\vec{\chi}\vec{R}} d\vec{R}. \quad (13.20)$$

Так же, как и в § 6, преобразование (13.19) мы назвали формальным потому, что однородное случайное поле $\delta\xi(\vec{R})$ в общем случае не удовлетворяет требованию убывания на бесконечности и, следовательно, трансформанты Фурье $C_{\xi}(\vec{\chi})$, как таковой, не существует. Для того чтобы придать спектральным разложениям случайных полей корректный математический смысл, необходимо было бы вначале предположить, что поле $\delta\xi(\vec{R})$ однородно внутри какого-то большого, но конечного объема V и быстро убывает до нуля за его пределами:

$$\delta\xi_V(\vec{R}) = \begin{cases} \delta\xi(\vec{R}), & \vec{R} \in V; \\ 0, & \vec{R} \notin V. \end{cases}$$

Затем, построив квадратичные корреляторы $\langle \delta\xi_V(\vec{R}_1) \delta\xi_V(\vec{R}_2) \rangle$ и $\langle C_{V\xi}(\vec{\chi}_1) C_{V\xi}(\vec{\chi}_2) \rangle$, переходить к бесконечным размерам области V и устанавливать связь между корреляторами через преобразование Фурье. Мы, однако, не будем пользоваться такого рода приемами, а будем считать, что интегралы (13.19) и (13.20) существуют в смысле вероятностной сходимости, а именно - в среднем квадратичном.

Свойства спектральных преобразований однородных полей

Согласно (13.19) построим преобразование Фурье от комплексно сопряженной величины:

$$\delta\xi^*(\vec{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{\xi}^*(\vec{\chi}) e^{-i\vec{\chi}\vec{R}} d\vec{\chi} = \int_{-\infty}^{\infty} C_{\xi}^*(-\vec{\chi}) e^{\vec{\chi}\vec{R}} d\vec{\chi}. \quad (13.21)$$

Учитывая, что для вещественного поля $\delta\xi^* = \delta\xi$ и приравнивая (13.21) и (13.19), получим так называемое **свойство эрмитовости**:

$$\begin{aligned}
C_{\xi}^*(-\vec{\chi}) &= C_{\xi}(\vec{\chi}), \\
C_{\xi}(-\vec{\chi}) &= C_{\xi}^*(\vec{\chi}).
\end{aligned}
\tag{13.22}$$

Функция автокорреляции случайного поля $\delta\xi(\vec{R})$ может быть представлена так:

$$B_{\xi}(\vec{R}_1, \vec{R}_2) = \langle \delta\xi(\vec{R}_1) \delta\xi(\vec{R}_2) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\chi}' \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\chi}'' \langle C_{\xi}(\vec{\chi}') C_{\xi}(\vec{\chi}'') \rangle e^{i(\vec{\chi}'\vec{R}_1 + \vec{\chi}''\vec{R}_2)}. \tag{13.23}$$

Произведем некоторые преобразования в (13.23). Во-первых, сделаем замену переменных $\vec{\chi}'' = -\vec{\chi}''$ и, во-вторых, введем обозначения $\vec{R}_1 = \vec{R} + \vec{\rho}$, $\vec{R}_2 = \vec{R}$. С учетом свойства эрмитовости (13.22) в результате получим

$$B_{\xi}(\vec{R}, \vec{\rho}) = \langle \delta\xi(\vec{R} + \vec{\rho}) \delta\xi(\vec{R}) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\chi}' \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\chi}'' \langle C_{\xi}(\vec{\chi}') C_{\xi}^*(\vec{\chi}'') \rangle e^{i[(\vec{\chi}' - \vec{\chi}'')\vec{R} + \vec{\chi}'\vec{\rho}]}. \tag{13.24}$$

Для однородного случайного поля функция корреляции B_{ξ} должна зависеть только от разностной переменной $\vec{\rho}$ и не должна зависеть от суммарной \vec{R} . Это возможно, если коррелятор $\langle C_{\xi}(\vec{\chi}') C_{\xi}^*(\vec{\chi}'') \rangle$ удовлетворяет следующему условию:

$$\langle C_{\xi}(\vec{\chi}') C_{\xi}^*(\vec{\chi}'') \rangle = S_{\xi}(\vec{\chi}') \delta(\vec{\chi}' - \vec{\chi}''). \tag{13.25}$$

Функция $S_{\xi}(\vec{\chi})$ называется **пространственной спектральной плотностью** (или, короче, **пространственным спектром**) случайного однородного поля $\delta\xi(\vec{R})$. С точностью до нормировки $S_{\xi}(\vec{\chi})$ совпадает со средним квадратом амплитуды Фурье - $\langle |C_{\xi}(\vec{\chi})|^2 \rangle$ пространственной гармонике с “волновым вектором” $\vec{\chi}$ в разложении $\delta\xi(\vec{R})$ по плоским волнам.

С учетом (13.25) окончательно получим

$$B_{\xi}(\bar{\rho}) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}(\bar{\chi}) e^{i\bar{\chi}\bar{\rho}} d\bar{\chi}. \quad (13.26)$$

Напишем сразу и обратную связь между $S_{\xi}(\bar{\chi})$ и $B_{\xi}(\bar{\rho})$:

$$S_{\xi}(\bar{\chi}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} B_{\xi}(\bar{\rho}) e^{-i\bar{\chi}\bar{\rho}} d\bar{\rho}. \quad (13.27)$$

Формулы (13.26) и (13.27) представляют собой **обобщение теоремы Винера – Хинчина на случайные поля**.

В более общем случае, когда флуктуации полей зависят не только от пространственных координат \bar{R} , но и от времени t : $\delta\xi = \delta\xi(\bar{R}, t)$, использование четырехмерных (пространственно-временных) гармонических разложений осуществляется путем обобщения формул, используемых при рассмотрении случайных процессов и случайных полей. Так, для флуктуаций одномерного случайного поля $\delta\xi = \delta\xi(\bar{R}, t)$ четырехмерное спектральное разложение имеет вид

$$\delta\xi(\bar{R}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{\chi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega C_{\xi}(\bar{\chi}, \omega) e^{i(\bar{\chi}\bar{R} - \omega t)}, \quad (13.28)$$

где $C_{\xi}(\bar{\chi}, \omega)$ - спектральная амплитуда поля $\delta\xi = \delta\xi(\bar{R}, t)$. В отличие от разделов, посвященных статистической радиотехнике, где зависимость от времени описывалась множителем $\sim e^{i\omega t}$ **в задачах распространения волн, зависимость от времени выбирается в виде $\sim e^{-i\omega t}$** . Это связано с тем, что при рассмотрении волновых явлений удобнее оперировать множителем $e^{i\bar{\chi}\bar{R}}$, а не $e^{-i\bar{\chi}\bar{R}}$. При этом формула (13.28) представляет

собой разложение случайного поля по плоским монохроматическим бегущим волнам $\square \exp\{i(\vec{\chi}\vec{R}-\omega t)\}$.

Обратная связь между $C_\xi(\vec{\chi}, \omega)$ и $\delta\xi(\vec{R}, t)$ имеет вид

$$C_\xi(\vec{\chi}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{R} \int_{-\infty}^{\infty} dt \delta\xi(\vec{R}, t) e^{-i(\vec{\chi}\vec{R}-\omega t)}. \quad (13.29)$$

Для стационарного во времени и однородного по пространству поля, когда $B_\xi(\vec{R}_1, \vec{R}_2; t_1, t_2) = B_\xi(\vec{\rho}, \tau)$, где $\vec{\rho} = \vec{R}_1 - \vec{R}_2$, $\tau = t_1 - t_2$, аналогично (13.26) и (13.27) можно записать следующие соотношения:

$$B_\xi(\vec{\rho}, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_\xi(\vec{\chi}, \omega) e^{i(\vec{\chi}\vec{\rho}-\omega\tau)} d\vec{\chi} d\omega, \quad (13.30)$$

$$S_\xi(\vec{\chi}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} B_\xi(\vec{\rho}, \tau) e^{-i(\vec{\chi}\vec{\rho}-\omega\tau)} d\vec{\rho} d\tau. \quad (13.31)$$

Здесь $S_\xi(\vec{\chi}, \omega)$ - **пространственно-временной энергетический спектр** случайных флуктуаций, который пропорционален среднему квадрату модуля спектральной компоненты $C_\xi(\vec{\chi}, \omega)$:

$$\langle C_\xi(\vec{\chi}', \omega') C_\xi^*(\vec{\chi}'', \omega'') \rangle = S_\xi(\vec{\chi}', \omega') \delta(\vec{\chi}' - \vec{\chi}'') \delta(\omega' - \omega''). \quad (13.32)$$

Таким образом, для стационарного во времени и однородного по пространству случайного поля спектральные компоненты $C_\xi(\vec{\chi}, \omega)$ δ -коррелированы.

Для статистически однородных полей также, как и для стационарных во времени процессов (см. §6), между характерными ширинами $\Delta\rho$ и $\Delta\tau$ автокорреляционной функции $B_\xi(\vec{\rho}, \tau)$ и соответствующими ширинами $\Delta\chi$ и $\Delta\omega$ энергетического спектра

$S_\xi(\vec{\chi}, \omega)$ существует связь, которая называется “**соотношением неопределенностей**”. Продemonстрируем это соотношение на примере пространственно однородных полей с гауссовыми автокорреляционными функциями (13.17) и (13.18). Для изотропного статистически однородного поля (13.17), произведя согласно (13.27) преобразование Фурье, получим следующее выражение для пространственного энергетического спектра:

$$S_\xi(\vec{\chi}) = S_\xi(\chi) = \frac{\sigma_\xi^2 l^3}{(2\pi)^{3/2}} e^{-\frac{1}{2}l^2\chi^2}. \quad (13.33)$$

Оценивая характерные ширины $\Delta\rho$ и $\Delta\chi$ по уровню $1/\sqrt{e}$ от максимальных значений соответствующих распределений (13.17) и (13.33), получим $\Delta\rho = l$, $\Delta\chi = 1/l$ и

$$\Delta\rho \cdot \Delta\chi = 1. \quad (13.34)$$

Произведя аналогичные вычисления для анизотропного распределения (13.18), найдем пространственный энергетический спектр

$$S_\xi(\vec{\chi}) = \frac{\sigma_\xi^2 abc}{(2\pi)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(a^2\chi_x^2 + b^2\chi_y^2 + c^2\chi_z^2)\right\}. \quad (13.35)$$

Из (13.18) и (13.35) видно, что характерные ширины автокорреляционной функции и соответствующего ей пространственного энергетического спектра в общем случае различны по разным направлениям. В результате для анизотропного поля соотношение неопределенностей распадается сразу на три и вместо (13.34) мы получаем

$$\Delta\rho_x \cdot \Delta\chi_x = 1, \quad \Delta\rho_y \cdot \Delta\chi_y = 1, \quad \Delta\rho_z \cdot \Delta\chi_z = 1. \quad (13.36)$$

Несмотря на то, что строгие равенства единице соотношений неопределенностей справедливы только для гауссовых автокорреляционных функций, мы их будем в

дальнейшем использовать для приближенных оценок ширин соответствующих распределений энергетических спектров.

13.5. Случайные волновые поля

Среди разнообразных случайных полей, с которыми имеет дело статистическая радиофизика, **волновые поля** занимают центральное место. Рассматривая в дальнейшем лишь линейные и некантовые задачи, предположим, что распространение волн той или иной физической природы (электромагнитных, упругих, поверхностных и т.д.) описывается линейным пространственно-временным оператором \hat{L} . В качестве \hat{L} обычно выступают дифференциальные, реже – интегро-дифференциальные операторы. Волновое поле $U(\vec{R}, t)$ при этом удовлетворяет уравнению

$$\hat{L}U(\vec{R}, t) = q(\vec{R}, t), \quad (13.37)$$

где $q(\vec{R}, t)$ описывает источники волн. Поля U и q могут быть и многокомпонентными (например, векторными). В этом случае в качестве оператора \hat{L} выступает операторная матрица.

Во многих задачах пространственная область, в пределах которой рассматривается поле $U(\vec{R}, t)$, ограничена некоторой поверхностью Σ (она может быть замкнутая или разомкнутая), на которой заданы граничные условия:

$$\begin{aligned} U|_{\vec{R} \in \Sigma} &= f_1(\vec{R}, t), \\ \frac{\partial U}{\partial N} \Big|_{\vec{R} \in \Sigma} &= f_2(\vec{R}, t), \end{aligned} \quad (13.38)$$

где N - нормаль к поверхности, $f_i(\vec{R}, t)$ - заданные функции координат и времени. Если поверхность Σ не замкнута, то на бесконечности ($R \rightarrow \infty$) должно выполняться **условие излучения** (на достаточно больших расстояниях от источников должны существовать только убегающие волны).

Статистические волновые задачи ставятся теми же уравнениями и условиями, что и динамические, но теперь это будут стохастические уравнения, стохастические начальные и граничные условия (уравнения и условия для отдельных реализаций случайного поля U). Фигурирующие в задачах параметры, функции, операторы теперь случайны (все или их часть). Для решения статистической задачи случайные факторы должны быть заданы своими распределениями вероятностей. Случайными могут быть:

- 1) источники полей (необходимо задание “статистики источников”);
- 2) свойства среды (необходимо задание “статистики среды”, а значит, оператора \hat{L});
- 3) форма и положение границ раздела Σ (необходимо задание “статистики границ”);
- 4) условия приема и регистрации волн (необходимо задание “статистики” приемника, помех).

Существуют **два основных способа решения статистических задач.**

1. Вначале находится решение (как правило, приближенное) динамической задачи, а затем определяются моменты искомого поля (среднее поле, средняя интенсивность и т.д.).

2. Из стохастических уравнений строятся детерминированные уравнения для моментов и граничных условий, а затем решается “усредненная” задача.

В последующих разделах мы остановимся в основном на решениях статистических задач в рамках первой схемы.

ЗАДАЧИ

Показать, что для статистически однородного и изотропного поля $\delta \xi(\vec{R})$ пространственная спектральная плотность $S_{\xi}(\vec{\chi})$ зависит только от модуля волнового вектора $\vec{\chi}$. Получить связь между $B_{\xi}(\rho)$ и $S_{\xi}(\chi)$.

Решение. По определению корреляционная функция однородного и изотропного поля зависит только от модуля $\rho = |\vec{\rho}|$ разностного вектора $\vec{\rho}$. С учетом этого запишем формулу (13.27):

$$S_{\xi}(\vec{\chi}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} B_{\xi}(\rho) e^{-i\vec{\chi}\vec{\rho}} d\vec{\rho}. \quad (1)$$

Данный интеграл удобно вычислять в сферических координатах $\vec{\rho} = (\rho, \theta_{\rho}, \varphi_{\rho})$, где θ_{ρ} отсчитывается от полярной оси, направленной вдоль вектора $\vec{\chi}$ (рис. 13.1).

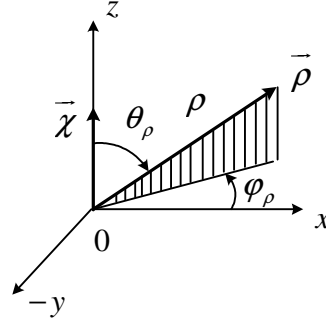


Рис. 13.1

Учитывая, что в выбранной системе координат элементарный объем записывается в виде $d\vec{\rho} = \rho^2 \sin \theta_{\rho} d\rho d\theta_{\rho} d\varphi_{\rho}$, а $\vec{\chi} \vec{\rho} = \chi \rho \cos \theta_{\rho}$, получим

$$S_{\xi}(\vec{\chi}) = \frac{1}{8\pi^3} \int_0^{\infty} B_{\xi}(\rho) \rho^2 d\rho \int_0^{\pi} e^{-i\chi\rho \cos \theta_{\rho}} \sin \theta_{\rho} d\theta_{\rho} \int_0^{2\pi} d\varphi_{\rho}. \quad (2)$$

Интеграл по $d\varphi_{\rho}$ равен 2π , а интегрирование по $d\theta_{\rho}$ легко производится с помощью замены переменных $\xi = \cos \theta_{\rho}$:

$$\int_0^{\pi} e^{-i\chi\rho \cos \theta_{\rho}} \sin \theta_{\rho} d\theta_{\rho} = \int_{-1}^1 e^{-i\chi\rho t} dt = -\frac{1}{i\chi\rho} e^{-i\chi\rho t} \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{\chi\rho} \sin(\chi\rho). \quad (3)$$

Подставляя (3) в (2), получим

$$S_{\xi}(\vec{\chi}) = \frac{1}{2\pi^2 \chi} \int_0^{\infty} B_{\xi}(\rho) \sin(\chi \rho) \rho d\rho = S_{\xi}(\chi). \quad (4)$$

Таким образом, для статистически однородного и изотропного поля $\delta \xi(\vec{R})$ пространственный энергетический спектр зависит только от модуля волнового числа $\vec{\chi}$: $S_{\xi}(\vec{\chi}) = S_{\xi}(\chi)$.

Аналогичным образом, учитывая, что для изотропного поля флуктуаций $S_{\xi}(\vec{\chi}) = S_{\xi}(\chi)$, можно переписать и формулу (13.26):

$$\begin{aligned} B_{\xi}(\vec{\rho}) &= \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}(\chi) e^{i\vec{\chi}\vec{\rho}} d\vec{\chi} = \int_0^{\infty} \chi^2 S_{\xi}(\chi) d\chi \int_0^{\pi} e^{i\chi\rho \cos\theta_{\chi}} \sin\theta_{\chi} d\theta_{\chi} \int_0^{2\pi} d\varphi_{\chi} = \\ &= \frac{4\pi}{\rho} \int_0^{\infty} S_{\xi}(\chi) \sin(\chi \rho) \chi d\chi = B_{\xi}(\rho). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь интегрирование выполнялось в сферических координатах $\vec{\chi} = (\chi, \theta_{\chi}, \varphi_{\chi})$, где θ_{χ} отсчитывается от полярной оси, направленной вдоль вектора $\vec{\rho}$ (рис. 13.2).

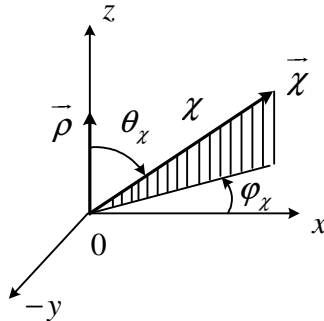


Рис. 13.2

§ 14. Метод малых возмущений

Флуктуации параметров сигналов, с которыми приходится иметь дело в радиотехнических системах, могут быть вызваны не только тепловым и дробовым шумами, речь о которых шла выше. Нередко основной причиной флуктуации является искажение сигналов в каналах связи и, в частности, рассеяние радиоволн на флуктуациях показателя преломления среды, в которой происходит их распространение. При распространении радиоволн в земных условиях основную роль играют флуктуации показателя преломления тропосферы и ионосферы. В космических линиях связи и в радиоастрономии следует учитывать рассеяние радиоволн на флуктуациях плотности космической плазмы. Даже при передаче сигналов по волноводам (для сигналов оптического диапазона волн - по световодам) приходится учитывать неоднородности среды, заполняющей волновод (световод).

Неоднородности среды распространения и вызываемое ими рассеяние радиоволн не всегда являются вредными факторами, вызывающими искажения сигнала и вносящими помехи, с которыми необходимо бороться. В ряде случаев явление рассеяния радиоволн может приносить и пользу. Например, благодаря рассеянию радиоволн УКВ диапазона на турбулентных пульсациях показателя преломления атмосферы оказывается возможным их проникновение далеко за горизонт в область геометрической тени. С другой стороны, рассеянные на неоднородностях плазмы радиоволны КВ диапазона могут быть захвачены в межслоевой волноводный канал, в котором они могут распространяться на большие расстояния с малым затуханием и т.д. Так как рассеянный сигнал несет информацию о флуктуациях параметров среды (плотности, давления, степени ионизации и т.д.), то оказывается, в принципе, возможно ставить и решать "обратную" задачу: по флуктуациям рассеянного сигнала определять параметры рассеивающей среды. Эта возможность широко используется в системах дистанционного зондирования окружающей среды.

Задача о распространении волн в среде с изменяющимся во времени и пространстве показателем преломления $n(\vec{R}, t)$ в некоторых случаях может быть сведена к решению скалярного волнового уравнения

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\Delta_{\vec{R}} - \frac{n^2(\vec{R}, t)}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] U(\vec{R}, t) = 0, \\ + \text{граничные условия} \end{array} \right. \quad (14.1)$$

где $\Delta_{\vec{R}} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - **оператор Лапласа** ("лапласиан"), c - скорость распространения волн при $n=1$ (для электромагнитных волн, c - скорость света в вакууме), а $U(\vec{R}, t)$ - волновое поле, например, звуковое давление. Под $U(\vec{R}, t)$ мы можем подразумевать также любую компоненту электрического или магнитного поля. При этом уравнение (14.1) следует из уравнений Максвелла при некоторых дополнительных условиях, выполнение которых обеспечивает отсутствие преобразования волн одной поляризации в волны другой поляризации в процессе распространения их в неоднородной среде. Поскольку точные аналитические методы решения уравнения (14.1) при произвольном виде функции $n(\vec{R}, t)$ отсутствуют, приходится прибегать к помощи приближенных методов. В этом параграфе мы изучим один из них - **метод малых возмущений (ММВ)**.

14.1. Построение решения. Борновское приближение

Будем рассматривать $n^2(\vec{R}, t)$ как случайную функцию четырех переменных – трех пространственных координат $\vec{R} = (x, y, z)$ и времени t . Введем **диэлектрическую проницаемость среды** $\varepsilon(\vec{R}, t) = n^2(\vec{R}, t)$ и представим её в виде суммы регулярной $\langle \varepsilon(\vec{R}, t) \rangle$ (здесь, как и ранее, косые скобки $\langle \dots \rangle$ или черта сверху $\overline{\dots}$ обозначают статистическое усреднение по ансамблю реализаций) и флуктуирующей $\varepsilon_1(\vec{R}, t)$ составляющих:

$$n^2(\vec{R}, t) = \varepsilon(\vec{R}, t) = \langle \varepsilon(\vec{R}, t) \rangle + \varepsilon_1(\vec{R}, t), \quad \langle \varepsilon_1(\vec{R}, t) \rangle = 0. \quad (14.2)$$

С учетом (14.2) перепишем волновое уравнение (14.1) в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\Delta_{\vec{R}} - \frac{\langle \varepsilon(\vec{R}, t) \rangle}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] U(\vec{R}, t) = \frac{\varepsilon_1(\vec{R}, t)}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} U(\vec{R}, t) \\ + \text{граничные условия} \end{array} \right. \quad (14.3)$$

Таким образом, исходное однородное волновое уравнение (14.1) мы представили в виде неоднородного, записанного для регулярной среды, и в правой части которого стоят случайные “источники”, связанные с флуктуирующей составляющей диэлектрической проницаемости среды ε_1 . Известно, что решение неоднородного уравнения

$$\left[\Delta_{\vec{R}} - \frac{\langle \varepsilon(\vec{R}, t) \rangle}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] U(\vec{R}, t) = f(\vec{R}, t) \quad (14.4)$$

можно представить в виде суммы $U(\vec{R}, t) = U_0(\vec{R}, t) + U_{sc}(\vec{R}, t)$, где $U_0(\vec{R}, t)$ - есть решение однородного:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\Delta_{\vec{R}} - \frac{\langle \varepsilon(\vec{R}, t) \rangle}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] U_0(\vec{R}, t) = 0 \\ + \text{граничные условия} \end{array} \right. , \quad (14.5)$$

а $U_{sc}(\vec{R}, t)$ - частное решение неоднородного (14.4) уравнений. Поле $U_0(\vec{R}, t)$ представляет собой **поле первичной (падающей) волны**. Его определение для заданных $\langle \varepsilon(\vec{R}, t) \rangle$, граничных и начальных условий является задачей математической физики. Для нахождения частного решения $U_{sc}(\vec{R}, t)$ неоднородного уравнения (14.4) введем в рассмотрение **функцию Грина** $G(\vec{R}, \vec{R}'; t, t')$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\Delta_{\vec{R}} - \frac{\langle \varepsilon(\vec{R}, t) \rangle}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] G(\vec{R}, \vec{R}'; t, t') = \delta(\vec{R} - \vec{R}') \delta(t - t') \\ + \text{граничные условия} \end{array} \right. , \quad (14.6)$$

которая имеет следующий смысл. Это волновое поле в точке \vec{R} в момент времени t , создаваемое точечным источником, расположенным в точке \vec{R}' и излучающим δ -образный единичный импульс в момент времени t' . Явный вид функции Грина $G(\vec{R}, \vec{R}'; t, t')$ зависит как от вида функциональной зависимости $\langle \varepsilon(\vec{R}, t) \rangle$, так и от граничных условий, которые на нее накладываются. Если рассматривать распространение волн в безграничной статистически однородной в пространстве и стационарной во времени среде ($\langle \varepsilon(\vec{R}, t) \rangle = Const$), то в качестве граничных условий естественно потребовать выполнения условия излучения при $|\vec{R} - \vec{R}'| \rightarrow \infty$, которое из двух линейно независимых решений уравнения (14.6) выбирает только то, которое описывает расходящуюся (из точки \vec{R}') сферическую волну:

$$G(\vec{R}, \vec{R}'; t, t') = -\frac{1}{4\pi|\vec{R} - \vec{R}'|} \delta\left[t - t' - \frac{|\vec{R} - \vec{R}'|}{v_\varepsilon}\right]. \quad (14.7)$$

Здесь $v_\varepsilon = c/\sqrt{\varepsilon} = Const$ - скорость распространения волны в однородной среде. В свою очередь, любое пространственно-временное распределение $f(\vec{R}, t)$ можно представить в виде совокупности точечных импульсных источников:

$$f(\vec{R}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{R}' \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(\vec{R}', t') \delta(\vec{R} - \vec{R}') \delta(t - t'). \quad (14.8)$$

Подставим это разложение в правую часть (14.4) и воспользуемся **принципом суперпозиции**, справедливым для любых линейных уравнений и, в частности, для волнового уравнения (14.4). Суть этого принципа состоит в том, что волновое поле $U_{sc}(\vec{R}, t)$, создаваемое "суммой" (или "суперпозицией") δ -источников (14.8), является суперпозицией полей $G(\vec{R}, \vec{R}'; t, t')$, создаваемых каждым из этих источников в отдельности:

$$U_{sc}(\vec{R}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{R}' \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(\vec{R}, \vec{R}'; t, t') f(\vec{R}', t'). \quad (14.9)$$

С учетом того, что в рассматриваемой нами задаче

$$f(\vec{R}', t') = \frac{\varepsilon_1(\vec{R}', t')}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} U(\vec{R}', t'),$$

решение уравнения (14.3), в конечном итоге, может быть представлено в виде

$$U(\vec{R}, t) = U_0(\vec{R}, t) + \frac{1}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{R}' \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(\vec{R}, \vec{R}'; t, t') \varepsilon_1(\vec{R}', t') \frac{\partial^2}{\partial t'^2} U(\vec{R}', t'). \quad (14.10)$$

В результате проделанных преобразований мы получили **интегральное уравнение**, которое полностью эквивалентно исходному дифференциальному уравнению (14.3). Преимуществом (14.10) перед (14.3) является то, что (14.10) уже учитывает все граничные условия.

Решение интегрального уравнения

Решение интегрального уравнения (14.10) можно искать в виде ряда теории возмущений, который строится путем итераций. При построении **первой итерации** согласно (14.10) запишем поле U для точки с координатами $\vec{R} = \vec{R}'$ и в момент времени $t = t'$:

$$U(\vec{R}', t') = U_0(\vec{R}', t') + \frac{1}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} dR'' \int_{-\infty}^{\infty} dt'' G(\vec{R}', R''; t', t'') \varepsilon_1(R'', t'') \frac{\partial^2}{\partial t''^2} U(R'', t''). \quad (14.11)$$

Подставим теперь (14.11) под знак интеграла исходного уравнения (14.10). В результате получим

$$\begin{aligned}
U(\vec{R}, t) = & U_0(\vec{R}, t) + \frac{1}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{R}' \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(\vec{R}, \vec{R}'; t, t') \varepsilon_1(\vec{R}', t') \frac{\partial^2}{\partial t'^2} U_0(\vec{R}', t') + \\
& + \frac{1}{c^4} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{R}' \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(\vec{R}, \vec{R}'; t, t') \varepsilon_1(\vec{R}', t') \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{R}'' \int_{-\infty}^{\infty} dt'' \frac{\partial^2}{\partial t''^2} G(\vec{R}', \vec{R}''; t', t'') \varepsilon_1(\vec{R}'', t'') \frac{\partial^2}{\partial t''^2} U(\vec{R}'', t'').
\end{aligned}
\tag{14.12}$$

Вторая итерация строится по аналогичной схеме. Согласно уравнению (14.10) записывается поле U в точке с координатами $\vec{R} = \vec{R}''$ в момент времени $t = t''$ и подставляется под знак интеграла для первой итерации (14.12). Продолжая процесс итерирования, мы получаем ряд:

$$U_{SC} = U - U_0 = U_1 + U_2 + \dots + U_n + \dots, \tag{14.13}$$

где $U_n \sim \varepsilon_1^n$. Такой ряд в математике называется **рядом Неймана**, а в физике – **борновским разложением** (по имени физика М. Борна, известного своими трудами в области квантовой механики).

Как уже отмечалось выше, нахождение поля $U_0(\vec{R}, t)$ является задачей математической физики и сводится к решению стандартными методами волнового уравнения (14.5) с начальными и граничными условиями. Будем считать это решение известным. Первый член борновского ряда

$$U_1(\vec{R}, t) = \frac{1}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{R}' \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(\vec{R}, \vec{R}'; t, t') \varepsilon_1(\vec{R}', t') \frac{\partial^2}{\partial t'^2} U_0(\vec{R}', t') \tag{14.14}$$

описывает однократное рассеяние и называется **“борновским приближением”**. Член ряда U_n описывает n -кратное рассеяние. Из построения борновского ряда видно, что средние поля $\langle U_n \rangle$, а также моменты второго порядка будут содержать корреляторы вида $\langle \varepsilon_1(\vec{R}') \dots \varepsilon_1(\vec{R}^{(n)}) \rangle$, нахождение которых при произвольной статистике случайной величины ε_1 – задача довольно сложная. Однако для малых флуктуаций ε_1 можно ограничиться только первым членом разложения – борновским приближением.

В качестве *примера* рассмотрим задачу о рассеянии плоской монохроматической волны на флуктуациях показателя преломления $n(\vec{R}, t)$, предполагая, что среда в среднем статистически однородна в безграничном пространстве и стационарна во времени ($\langle \varepsilon(\vec{R}, t) \rangle = Const$), а флуктуации показателя преломления происходят лишь внутри ограниченного объема V .

Введя в рассмотрения относительные флуктуации диэлектрической проницаемости:

$$\mu(\vec{R}, t) = \begin{cases} \frac{\varepsilon_1(\vec{R}, t) - \langle \varepsilon(\vec{R}, t) \rangle}{\langle \varepsilon(\vec{R}, t) \rangle} = \frac{n^2(\vec{R}, t) - \langle n^2(\vec{R}, t) \rangle}{\langle n^2(\vec{R}, t) \rangle}, & \vec{R} \in V; \\ 0, & \vec{R} \notin V, \end{cases} \quad (14.15)$$

с учетом определения функции Грина (14.7) и согласно формуле (14.14) получим

$$U_1(\vec{R}, t) = \frac{1}{4\pi v_\varepsilon^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\vec{R}'}{|\vec{R} - \vec{R}'|} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \delta \left[t - t' - \frac{|\vec{R} - \vec{R}'|}{v_\varepsilon} \right] \mu(\vec{R}', t') \frac{\partial^2}{\partial t'^2} U_0(\vec{R}', t'). \quad (14.16)$$

Поле первичной (падающей) волны $U_0(\vec{R}, t)$ определяется, как уже отмечалось выше, из однородного волнового уравнения (14.5), которое для безграничной среды, с $\langle \varepsilon(\vec{R}, t) \rangle = Const$, имеет известное решение в виде плоской монохроматической волны. Для упрощения задачи мы будем рассматривать плоскую волну единичной амплитуды:

$$U_0(\vec{R}, t) = \exp \left\{ i \left(\vec{k}_\varepsilon \vec{R} - \omega_0 t \right) \right\}, \quad (14.17-a)$$

где ω_0 - круговая частота исходного излучения и модуль волнового вектора \vec{k}_ε связаны соотношением

$$k_\varepsilon = |\vec{k}_\varepsilon| = \frac{\omega_0}{c} \sqrt{\varepsilon} = \frac{\omega_0}{v_\varepsilon}. \quad (14.17-b)$$

С другой стороны, модуль волнового вектора можно еще выразить и через длину волны λ_ε в статистически однородной среде

$$k_\varepsilon = \frac{2\pi}{\lambda_\varepsilon}. \quad (14.17-в)$$

Учтем теперь, что флуктуации показателя преломления $\mu(\vec{R}, t)$ сосредоточены в конечном объеме V и будем рассматривать наиболее интересный случай рассеяния “коротких” волн, когда $\lambda_\varepsilon \ll L$, где $L \approx (V)^{1/3}$ - характерный линейный размер рассеивающего объема. Подставим (14.17-а) в (14.16) и выполним с помощью δ -функции интегрирование по dt' , предварительно сделав замену переменной $t'' = t - \frac{|\vec{R} - \vec{R}'|}{v_\varepsilon} - t'$:

$$U_1(\vec{R}, t) = \frac{k_\varepsilon^2}{4\pi} \int_V \frac{d\vec{R}'}{|\vec{R} - \vec{R}'|} \mu\left(\vec{R}', t - \frac{|\vec{R} - \vec{R}'|}{v_\varepsilon}\right) \cdot \exp\left\{i\left[\vec{k}_\varepsilon \vec{R}' - \omega_0\left(t - \frac{|\vec{R} - \vec{R}'|}{v_\varepsilon}\right)\right]\right\}. \quad (14.18)$$

Поместим начало декартовой системы координат XYZ в центр рассеивающего объема V , а ось OZ направим вдоль волнового вектора падающей волны \vec{k}_ε (см. рис. 14.1).

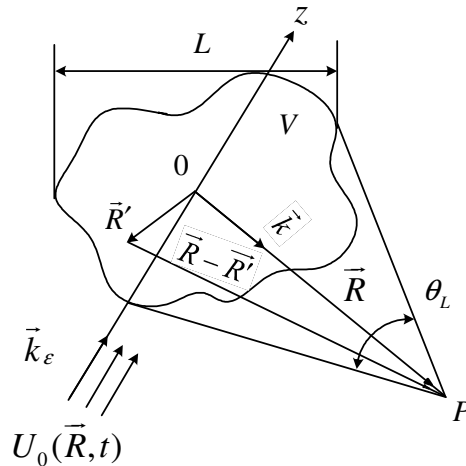


Рис. 14.1.

Будем считать, что точка наблюдения P с радиус-вектором \vec{R} , где расположен приемник рассеянного поля, находится достаточно далеко от рассеивающего объема V . В этом случае расстояние $|\vec{R} - \vec{R}'|$ ($\vec{R}' \in V$) может быть разложено в степенной ряд по малому параметру $R'/R \leq L/R \ll 1$:

$$|\vec{R} - \vec{R}'| = \sqrt{(\vec{R} - \vec{R}')^2} = \sqrt{R^2 - 2\vec{R}\vec{R}' + R'^2} \approx R \left[1 - \frac{\vec{R}\vec{R}'}{R^2} + O\left(\frac{R'^2}{R^2}\right) \right]. \quad (14.19)$$

Подставим разложение (14.19) в (14.18) и ограничимся только линейными по $R'/R \ll 1$ слагаемыми в показателе степени экспоненты:

$$\exp \left\{ -i\omega_0 \left(t - \frac{|\vec{R} - \vec{R}'|}{v_\varepsilon} \right) \right\} \approx \exp \left\{ i \left[k_\varepsilon \left(R - \frac{\vec{R}\vec{R}'}{R} \right) - \omega_0 t + O\left(\frac{k_\varepsilon R'^2}{R}\right) \right] \right\}. \quad (14.20)$$

Для того чтобы в (14.20) можно было пренебречь квадратичными слагаемыми $\square \frac{k_\varepsilon R'^2}{R}$, необходимо потребовать выполнения неравенства

$$\frac{k_\varepsilon R'^2}{R} \leq \frac{k_\varepsilon L^2}{R} \ll 1, \quad (14.21)$$

которое определяет так называемую “дальнюю зону” (или **зону Фраунгофера**) относительно рассеивающего объема V (имеющего линейный размер L). Для точек наблюдения, находящихся в “**волновой зоне**” $R \gg \lambda_\varepsilon$ ($k_\varepsilon R \gg 1$), условие дальней зоны (14.21) оказывается более жестким, чем введенное ранее условие $L \ll R$, т.к. неравенство (14.21) можно переписать в виде

$$\frac{k_\varepsilon L^2}{R} = (k_\varepsilon L) \frac{L}{R} = k_\varepsilon R \left(\frac{L}{R} \right)^2 \ll 1. \quad (14.22-a)$$

Условию (14.21) можно придать простой физический смысл, если ввести понятия **характерного угла дифракции** θ_d на геометрическом теле с линейным размером

L : $\theta_d \approx \lambda_\epsilon/L \sim 1/k_\epsilon L \ll 1$, а также характерного угла $\theta_L = L/R \ll 1$, под которым виден рассеивающий объем из точки наблюдения (рис. 14. 1):

$$k_\epsilon \frac{L^2}{R} = k_\epsilon L \cdot \frac{L}{R} \sim \frac{\theta_L}{\theta_d} \ll 1. \quad (14.22-б)$$

Видно, что условие нахождения точки наблюдения в дальней зоне по отношению к объему V означает, что "геометрический" угловой размер θ_L объема должен быть значительно меньшим, чем угол дифракции θ_d .

В курсах теории дифракции и распространения радиоволн общепринятой является другое (тоже, впрочем, достаточно физичное) толкование неравенства (14.21). Выражение в левой части (14.21) можно записать как отношение площади поперечного сечения рассеивающего объема ($\square L^2$) к площади первой зоны Френеля ($\square a_F^2$, где $a_F = \sqrt{\lambda_\epsilon R} \square \sqrt{R/k_\epsilon}$ - линейный размер первой зоны Френеля на расстоянии R):

$$k_\epsilon \frac{L^2}{R} \sim \frac{L^2}{a_F^2} \ll 1. \quad (14.22-в)$$

Таким образом, для наблюдателя P , находящегося в дальней зоне, линейный размер a_F зоны Френеля оказывается значительно большим, чем геометрический размер L рассеивающего объема V . Принимая во внимание, что зона Френеля определяется как область пространства, каждая точка которой дает синфазный с остальными вклад в полное поле в точке наблюдения (разность фаз волны между точками в пределах первой зоны Френеля не превышает $\pi/2$), **поле в дальней зоне с хорошим приближением можно считать расходящейся сферической волной, кривизна фазового фронта которой определяется только расстоянием R от начала координат, помещенного внутрь рассеивающего объема V , и не зависит от его линейного размера L .**

В дальней зоне с учетом упрощений (14.19) и (14.20) подынтегральные функции в исходной формуле (14.18) могут быть приближенно представлены так:

$$\frac{1}{|\bar{R}-\bar{R}'|} \exp \left\{ i \left[\bar{k}_\varepsilon \bar{R}' - \omega_0 \left(t - \frac{|\bar{R}-\bar{R}'|}{v_\varepsilon} \right) \right] \right\} \approx \frac{e^{i(k_\varepsilon R - \omega_0 t)}}{R} \cdot e^{-i(\bar{k}-\bar{k}_\varepsilon)\bar{R}'},$$

$$\mu \left(\bar{R}', t - \frac{|\bar{R}-\bar{R}'|}{v_\varepsilon} \right) \approx \mu \left(\bar{R}', t - \frac{R}{v_\varepsilon} + \frac{\bar{k}\bar{R}'}{\omega_0} \right).$$

Здесь мы ввели $\bar{k} = k_\varepsilon \frac{\bar{R}}{R}$ - **волновой вектор рассеянного поля**. Заметим, что введенный вектор \bar{k} направлен в точку наблюдения (см. рис. 14.1), а его модуль совпадает с k_ε ($k = k_\varepsilon$). После проделанных упрощений в первом порядке теории возмущений для рассеянного поля U_1 получаем следующее выражение:

$$U_1(\bar{R}, t) \approx \frac{k_\varepsilon^2}{4\pi R} e^{i(k_\varepsilon R - \omega_0 t)} \int_V d\bar{R}' \mu \left(\bar{R}', t - \frac{R}{v_\varepsilon} + \frac{\bar{k}\bar{R}'}{\omega_0} \right) \cdot e^{-i(\bar{k}-\bar{k}_\varepsilon)\bar{R}'}. \quad (14.23)$$

Если флуктуации показателя преломления не зависят от времени, а являются только функцией пространственных координат, т.е. $\mu(\bar{R}', t) \equiv \mu(\bar{R}')$, то формула (14.23) может быть переписана в более простом виде

$$U_1(\bar{R}, t) \approx \frac{2\pi^2 k_\varepsilon^2}{R} C_\mu(\bar{q}) e^{i(k_\varepsilon R - \omega_0 t)}, \quad (14.24)$$

где введен так называемый **вектор рассеяния** $\bar{q} = \bar{k} - \bar{k}_\varepsilon$, а $C_\mu(\bar{q})$ - Фурье-компонента случайного поля флуктуаций $\mu(\bar{R})$, взятая для одной единственной пространственной гармоники $\bar{\chi} = \bar{q}$:

$$C_\mu(\bar{q}) = C_\mu(\bar{\chi}) \Big|_{\bar{\chi}=\bar{q}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_V \mu(\bar{R}') e^{-\bar{\chi}\bar{R}'} d\bar{R}' \Big|_{\bar{\chi}=\bar{q}}. \quad (14.25)$$

Так как $\mu(\bar{R}') \equiv 0$ при $\bar{R}' \notin V$, то интегрирование в (14.25) по $d\bar{R}'$ можно

распространить на все трехмерное пространство:

$$C_{\mu}(\bar{q}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\bar{R}') e^{-\bar{\chi}\bar{R}'} d\bar{R}' \Big|_{\bar{\chi}=\bar{q}} . \quad (14.26)$$

Выводы

1. Из формулы (14.24) следует, что при рассеянии падающей на неподвижные неоднородности волны **частота волнового поля не изменяется** (зависимость от времени имеет тот же вид $\sim e^{-i\omega_0 t}$, что и в падающей волне U_0).

2. Величина (напряженность) U_1 рассеянного поля из направления \vec{k}_e в направление \vec{k} определяется только одной пространственной гармоникой Фурье (14.25) с "волновым" вектором $\vec{\chi}$, равным вектору рассеяния $\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}_e$. Такое рассеяние называют "**резонансным**".

14.2. Среднее поле и средняя интенсивность

В первом приближении метода малых возмущений (борновское приближение) поле $U_1(\vec{R}, t)$ в дальней зоне, рассеянное на флуктуирующих пространственных неоднородностях $\mu(\vec{R}, t)$ показателя преломления, определяется формулой (14.23), из которой следует, что связь между $U_1(\vec{R}, t)$ и $\mu(\vec{R}, t)$ является линейной. Если рассматривать μ как одну из возможных реализаций случайной функции $\mu(\vec{R}, t)$, то U_1 также будет являться случайной реализацией рассеянного волнового поля $U_1(\vec{R}, t)$, и для его описания необходимо привлечь методы теории случайных функций и, в частности, метод моментов.

Усредним (14.23) по ансамблю реализаций $\mu(\vec{R}, t)$. В силу линейности связи между U и μ операции интегрирования по $d\vec{R}'$ и усреднения по ансамблю реализаций $\langle \rangle$ можно поменять местами. В результате с учетом того, что $\langle \mu(\vec{R}, t) \rangle = 0$, для **среднего поля** получим

$$\langle U_1(\vec{R}, t) \rangle \sim \int_V d\vec{R}' \langle \mu(\vec{R}', t) \rangle e^{-i\vec{q}\vec{R}} = 0. \quad (14.27)$$

Факт обращения в нуль первого статистического момента поля $U_1(\vec{R}, t)$ позволяет говорить об отсутствии в поле U_1 когерентной составляющей, а само рассеяние в этом приближении считать **некогерентным**.

Величина мощности рассеянного поля W в точке наблюдения, а также плотность потока энергии \vec{S} являются величинами, квадратичными по полю U : например, если величина U - есть напряженность электрического (или магнитного) поля в рассеянной электромагнитной волне, то плотность энергии $W = |U|^2 / 4\pi$, а вектор Умова-Пойтинга $\vec{S} = \frac{\vec{k}}{k} cW$, где c - скорость распространения волны при $n=1$ (скорость света в вакууме).

Для простоты в дальнейшем будем рассматривать величину $I = |U|^2$, которую назовем **“интенсивностью”**. По определению, эта величина с точностью до постоянных множителей совпадает с плотностью потока энергии в рассеянной волне и пропорциональна мощности, регистрируемой любым приемным устройством в точке наблюдения.

Средняя интенсивность поля, рассеянного на неподвижных неоднородностях ($\mu(\vec{R}, t) = \mu(\vec{R})$), в борновском приближении, как следует из (14.23), равна

$$\langle I_1(\vec{R}) \rangle = \langle |U_1(\vec{R})|^2 \rangle = \frac{k_\varepsilon^4}{(4\pi R)^2} \left\langle \left| \int_V d\vec{R}' \mu(\vec{R}') e^{-i\vec{q}\vec{R}} \right|^2 \right\rangle. \quad (14.28)$$

Представляя квадрат модуля интеграла по $d\vec{R}'$ в виде произведения двух интегралов и меняя порядок усреднения $\langle \rangle$ и интегрирования, получаем

$$\langle I_1(\vec{R}) \rangle = \frac{k_\varepsilon^4}{(4\pi R)^2} \int_V d\vec{R}' \int_V d\vec{R}'' \langle \mu(\vec{R}') \mu(\vec{R}'') \rangle e^{-i\vec{q}(\vec{R}' - \vec{R}'')}. \quad (14.29)$$

Для пространственно однородного поля случайных флуктуаций показателя преломления коррелятор $\langle \mu(\vec{R}') \mu(\vec{R}'') \rangle$ является функцией только разности

аргументов $\vec{\rho} = \vec{R}' - \vec{R}''$:

$$\langle \mu(\vec{R}') \mu(\vec{R}'') \rangle = B_\mu(\vec{R}' - \vec{R}'') = B_\mu(\vec{\rho}). \quad (14.30)$$

Пространственная однородность случайных полей полностью аналогична свойству стационарности случайных процессов (в широком смысле), что позволяет ввести понятие длины корреляции l_μ как расстояния, на котором автокорреляционная функция $B_\mu(\vec{\rho})$ существенно убывает. Под словами "существенно убывает" можно подразумевать тот же смысл, что и при введении понятия "время корреляций" (см. формулы (5.31), (5.33)). Длина корреляции l_μ может быть различна в разных направлениях, т.е. зависеть от направления вектора $\vec{\rho}$ (см. § 13); в этом случае мы имеем дело с "анизотропным" полем флуктуаций показателя преломления $\mu(\vec{R})$. Если же длина корреляции l_μ не зависит от направления $\vec{\rho}$, то поле флуктуации $\mu(\vec{R})$ является статистически изотропным, а длину корреляции l_μ называют в этом случае **радиусом корреляции**. По порядку величины l_μ совпадает с характерным линейным размером неоднородностей показателя преломления.

Вместо \vec{R}', \vec{R}'' перейдем в (14.29) к новым (суммарным и разностным) переменным интегрирования:

$$\vec{R}_1 = \frac{1}{2}(\vec{R}' + \vec{R}''), \quad \vec{\rho} = \vec{R}' - \vec{R}''.$$

Если линейные размеры L рассеивающего объема V достаточно велики: $L \gg l_\mu$ (т.е. рассеяние происходит на большом числе $N \sim L^3/l_\mu^3 \gg 1$ неоднородностей), то на границах области интегрирования по переменной $\vec{\rho}$ значение $B_\mu(\vec{\rho})$ будет настолько малым, что интеграл по $d\vec{\rho}$ можно распространить на все пространство (от $-\infty$ до ∞), область же интегрирования по суммарной переменной \vec{R}_1 практически не будет отличаться от старой V . В результате получим

$$\langle I_1(\vec{R}) \rangle = \frac{k_\varepsilon^4}{(4\pi R)^2} \int_V d\vec{R}_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\rho} B_\mu(\vec{\rho}) e^{-i\vec{q}\vec{\rho}} = \frac{\pi k_\varepsilon^4}{2 R^2} V S_\mu(\vec{q}), \quad (14.31)$$

где введенная величина $S_\mu(\vec{q})$ имеет смысл пространственного энергетического спектра $S_\mu(\vec{\chi})$, взятого для одной единственной пространственной гармоники с “волновым вектором” $\vec{\chi} = \vec{q}$:

$$S_\mu(\vec{q}) = S_\mu(\vec{\chi}) \Big|_{\vec{\chi}=\vec{q}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\rho} B_\mu(\vec{\rho}) e^{-i\vec{\chi}\vec{\rho}} \Big|_{\vec{\chi}=\vec{q}}, \quad (14.32)$$

Выводы

Из найденного выражения (14.31) следует, что:

1. Средняя интенсивность $\langle I_1(\vec{R}) \rangle$ убывает с расстоянием R по закону $\sim R^{-2}$,

как и должно быть в **расходящейся сферической волне**.

2. Факт того, что $\langle I_1 \rangle \sim V$, свидетельствует о **некогерентном характере рассеяния**. Действительно, учитывая, что среднее число неоднородностей в объеме V можно оценить по порядку величины как $N \sim V/l_\mu^3$ (l_μ^3 - пропорционально объему, приходящемуся на одну неоднородность с характерным линейным размером l_μ), приходим к выводу, что $\langle I_1 \rangle \sim V \sim N$. Заметим, что при когерентном сложении полей, рассеянных на N неоднородностях, амплитуда суммарного поля была бы $U_1 \sim N$, а его интенсивность, пропорциональная квадрату амплитуды, должна быть $\sim N^2 \sim V^2$. **При некогерентном же сложении полей складываются не их амплитуды, а интенсивности (квадраты амплитуд), так что суммарная интенсивность I_1 оказывается пропорциональной $N \sim V$.**

3. Рассеяние носит **избирательный (резонансный)** характер в том смысле, что в рассеянии из направления \vec{k}_ε в направление \vec{k} принимает участие только одна пространственная гармоника с волновым вектором $\vec{\chi} = \vec{q} = \vec{k} - \vec{k}_\varepsilon$.

4. Средняя интенсивность $\langle I_1 \rangle \sim k_\varepsilon^4$. Множитель k_ε^4 характерен для **“релевской”** частотной зависимости ($\sim \omega_0^4$) интенсивности поля, рассеянного на

"мелких" неоднородностях (l_μ намного меньше длины волны излучения λ_ϵ). Действительно, если радиус корреляции l_μ настолько мал, что выполняется неравенство $l_\mu q \leq 2k_\epsilon l_\mu \ll 1$, то $S_\mu(\vec{q})$, как следует из (14.32), оказывается вообще не зависящим от \vec{q} (и, следовательно, от волнового вектора \vec{k}_ϵ и длины волны излучения λ_ϵ):

$$\begin{aligned} S_\mu(\vec{q}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\rho} B_\mu(\vec{\rho}) e^{-i\vec{q}\vec{\rho}} \approx \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\rho \leq l_\mu} d\vec{\rho} B_\mu(\vec{\rho}) e^{-i\vec{q}\vec{\rho}} \approx \\ &\approx \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\rho} B_\mu(\vec{\rho}) = S_\mu(0) \approx \frac{l_\mu^3}{(2\pi)^3} B_\mu(0) = \frac{\sigma_\mu^2 l_\mu^3}{(2\pi)^3}. \end{aligned} \quad (14.33)$$

При получении данной оценки мы учли, что $\sigma_\mu^2 = B_\mu(0) = \langle \mu^2 \rangle$ - дисперсия флуктуации квадрата показателя преломления $n^2(\vec{R})$ (см. определение μ по формуле (14.15)), а l_μ^3 - характерный объем, занимаемый одной неоднородностью с линейным размером l_μ , равным радиусу корреляции. С учетом (14.33), согласно исходной формуле (14.31) получаем, что для "мелких" неоднородностей $l_\mu q \ll 1$ средняя интенсивность рассеянного поля в точке наблюдения пропорциональна ω_0^4 .

14.3. Индикатриса рассеяния

Из формулы (14.31) следует, что средняя интенсивность в точке наблюдения зависит от расстояния $R = |\vec{R}|$ до рассеивающего объема и вектора рассеяния $\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}_\epsilon$: $\langle I_1 \rangle = \langle I_1(R, \vec{q}) \rangle$. Для определения конкретной зависимости $\langle I_1 \rangle$ от направления вектора $\vec{k} = k_\epsilon \frac{\vec{R}}{R}$ распишем его проекции в декартовой системе координат XYZ с началом O в центре рассеивающего объема и осью OZ , направленной вдоль волнового вектора падающей волны \vec{k}_ϵ (см. рис. 14.1 и 14.2). Ориентация оси OX в ортогональной вектору \vec{k}_ϵ плоскости XOY в общем случае произвольна. Проекции вектора \vec{k} будем задавать в сферических координатах $\vec{k} = (k_\epsilon, \theta, \varphi)$, где θ - полярный угол (угол между векторами \vec{k}_ϵ и \vec{k}), а φ - азимутальный угол (угол между проекцией вектора \vec{k} на плоскость XOY и осью OX).

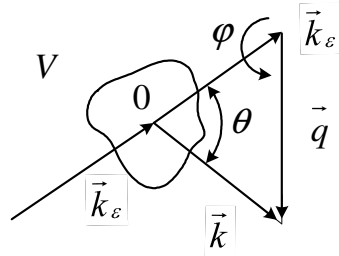


Рис. 14.2.

Введем понятие **индикатрисы рассеяния** $F(\theta, \varphi)$, которую определим как отношения средней интенсивности $\langle I_1 \rangle$, рассеянной в направлении θ, φ , к средней интенсивности, рассеянной в направлении распространения падающей волны ($\vec{k} = \vec{k}_\varepsilon$). При $\vec{k} = \vec{k}_\varepsilon$ волновой вектор рассеяния $\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}_\varepsilon = 0$. Для данного направления полярный угол $\theta = 0$, а величина азимутального угла φ произвольна (для определенности мы ее выберем равной нулю). С учетом вышеизложенного, согласно найденной ранее формуле для средней интенсивности (14.31), получим

$$F(\theta, \varphi) = \frac{\langle I_1(R, \vec{q}) \rangle}{\langle I_1(R, 0) \rangle} = \frac{\langle I_1(R, \theta, \varphi) \rangle}{\langle I_1(R, 0, 0) \rangle} = \frac{S_\mu(\vec{q})}{S_\mu(0)}. \quad (14.34)$$

При этом, как легко убедиться, все множители перед S_μ в формуле (14.31) для $\langle I_1 \rangle$ сокращаются, так что в направлении $\vec{k} = \vec{k}_\varepsilon$, задаваемом волновым вектором падающей волны, $F(0, 0) = 1$. Зависимость $F(\theta, \varphi)$ принято изображать в сферической системе координат, откладывая значения F по направлению луча, задаваемого углами θ, φ , отсчитываемых от направления вектора \vec{k}_ε (см. рис. 14.3).

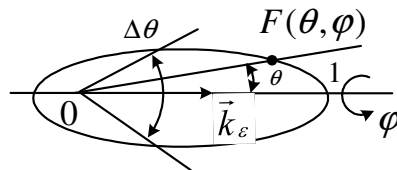


Рис. 14.3.

В качестве *примера* рассмотрим статистически однородное и изотропное поле неоднородностей, когда $B_\mu(\vec{\rho}) = B_\mu(\rho)$. В этом случае, как было показано в задаче § 13, энергетический спектр $S_\mu(\vec{\chi})$ зависит только от модуля волнового вектора $\vec{\chi}$. Следовательно, и $S_\mu(\vec{q})$ также будет зависеть только от $q = |\vec{q}|$. Причем, связь между $S_\mu(q)$ и $B_\mu(\rho)$ определяется как

$$S_\mu(\vec{q}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} B_\mu(\rho) e^{-i\vec{q}\vec{\rho}} d\vec{\rho} = \frac{1}{2\pi^2 q} \int_0^{\infty} B_\mu(\rho) \sin(q\rho) d\rho = S_\mu(q). \quad (14.35)$$

Из рис. 14.2 с учетом того, что $k = k_\varepsilon$, следует

$$q = \sqrt{(\vec{k} - \vec{k}_\varepsilon)^2} = \sqrt{k^2 + k_\varepsilon^2 - 2\vec{k}\vec{k}_\varepsilon} = k_\varepsilon \sqrt{2(1 - \cos\theta)} = 2k_\varepsilon \sin \frac{\theta}{2}. \quad (14.36)$$

Таким образом, для изотропных неоднородностей индикатриса рассеяния оказывается функцией только полярного угла θ :

$$F(\theta) = \frac{S_\mu\left(2k_\varepsilon \sin \frac{\theta}{2}\right)}{S_\mu(0)}. \quad (14.37)$$

Угловую ширину $\Delta\theta$ индикатрисы рассеяния $F(\theta)$ (см. рис. 14.3) можно оценить по заданному характерному линейному масштабу неоднородностей l_μ (радиусу корреляции) воспользовавшись соотношением неопределенностей (см. (13.34)). Интервал $\Delta\chi$ волновых чисел χ , где спектр $S_\mu(\chi)$ отличен от нуля, связан с l_μ соотношением

$$\Delta\chi \cdot l_\mu \approx 1, \quad (14.38)$$

Из (14.37) и (14.38) следует, что **угловая ширина $\Delta\theta$ индикатрисы рассеяния $F(\theta)$**

определяется "шириной" по θ функции $S_\mu\left(2k_\varepsilon \sin \frac{\theta}{2}\right)$. С учетом того, что $\Delta\chi = \Delta q = 2k_\varepsilon \sin \frac{\Delta\theta}{2}$, соотношение (14.38) приобретает вид

$$\sin \frac{\Delta\theta}{2} \approx \frac{1}{2k_\varepsilon l_\mu}. \quad (14.39)$$

Рассмотрим два предельных случая.

1. Если размер неоднородностей l_μ намного превышает длину волны излучения λ_ε (**крупные неоднородности**, $k_\varepsilon l_\mu \gg 1$) и выполняется неравенство $\pi/k_\varepsilon l_\mu \ll 1$, то индикатриса рассеяния $F(\theta)$ оказывается отличной от нуля только в узком интервале углов $\Delta\theta \ll 1$ (около направления $\theta = 0$), который определяется из соотношения неопределенностей (14.39) как

$$\sin \frac{\Delta\theta}{2} \approx \frac{\Delta\theta}{2} \approx \frac{1}{2k_\varepsilon l_\mu}. \quad (14.40)$$

Отсюда следует оценка ширины

$$\Delta\theta \approx \frac{1}{k_\varepsilon l_\mu} \approx \frac{\lambda_\varepsilon}{l_\mu} \ll 1. \quad (14.41)$$

2. В обратном предельном случае, когда размеры неоднородностей l_μ намного меньше длины волны λ_ε (**мелкие неоднородности**, $k_\varepsilon l_\mu \ll 1$), при любых значениях угла θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) величина $q l_\mu = 2k_\varepsilon l_\mu \sin \frac{\theta}{2} \ll 1$, и согласно (14.33) можно приближенно положить $S_\mu(q) \approx S_\mu(0)$. В этом случае индикатриса рассеяния (14.34) не зависит от θ и всюду равна единице: **рассеяние является изотропным**, $\langle I_1 \rangle$ не зависит от направления. Это так называемый **случай релеевского рассеяния на мелких неоднородностях**, когда $\langle I_1 \rangle \sim \omega_0^4 \sim \lambda_\varepsilon^{-4}$.

14.4. Границы применимости борновского приближения

Так как формула (14.31) для $\langle I_1 \rangle$ является приближенной (она получена в "борновском" приближении), для того чтобы ею можно было пользоваться, необходимо указать границы ее применимости. Основным неравенством, которое предполагалось выполненным при выводе формулы (14.31), выступало требование малости рассеянного поля U_1 по сравнению с первичным полем U_0 :

$$|U_1| \ll |U_0| \quad \text{либо} \quad \langle I_1 \rangle = |U_1|^2 \ll |U_0|^2 = 1.$$

Однако в виду того, что $\langle I_1 \rangle$ зависит от направления рассеяния, указанные неравенства могут хорошо выполняться, например, при рассеянии на большие углы $\theta \gg \lambda_\varepsilon / l_\mu$ (за счет малости $\langle I_1 \rangle$, рассеянного в этих направлениях), но не выполняться при рассеянии на малые углы. Поэтому даже при больших флуктуациях μ в качестве критерия применимости (14.31) следует потребовать малость рассеянного поля в "интегральном" смысле: **необходимо, чтобы полный поток энергии P_1 , рассеянного объемом V поля U_1 , был значительно меньше, чем поток энергии P_0 , падающего на объем V излучения U_0 :**

$$P_1 \ll P_0.$$

Окружим рассеивающий объем V сферой C_R с центром в точке O и достаточно большим радиусом R , таким, чтобы точки на поверхности сферы находились в дальней зоне относительно V (рис. 14.4).

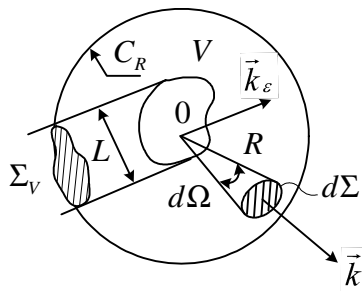


Рис. 14.4.

В этом случае $\langle I_1 \rangle$ для всех точек поверхности определяется формулой (14.31). Средний поток рассеянной энергии $\langle |U_1|^2 \rangle = \langle I_1 \rangle$ через сферу C_R можно записать в виде интеграла по поверхности:

$$P_1 = a \oint_{C_R} \langle I_1 \rangle d\Sigma, \quad (14.42)$$

где a - несущественный для дальнейшего рассмотрения постоянный множитель (равный, например, $v_\varepsilon/4\pi$, если речь идет о рассеянии электромагнитных волн, причем в этом случае U_1 представляет собой напряженность рассеянного электрического или магнитного поля, v_ε - скорость волны в однородной среде, так что $\frac{v_\varepsilon}{4\pi} \langle |U_1|^2 \rangle$ - есть среднее значение модуля вектора Умова-Пойтинга). Поток энергии P_0 в падающем поле U_0 можно записать в виде

$$P_0 = a |U_0|^2 \Sigma_V, \quad (14.43)$$

где Σ_V - площадь поперечного сечения объема V плоскостью, перпендикулярной к волновому вектору \vec{k}_ε . Подставим в (14.42) выражение для $\langle I_1 \rangle$ (14.31) и перейдем от интегрирования по $d\Sigma = R^2 d\Omega$ к интегрированию по телесному углу $d\Omega$

$$P_1 = a \frac{\pi}{2} k_\varepsilon^4 V \oint_{4\pi} d\Omega S_\mu(\vec{q}) \approx a \frac{\pi}{2} k_\varepsilon^4 V S_\mu(0) \Delta\Omega. \quad (14.44)$$

Здесь мы воспользовались оценкой интеграла, заменив его произведением подынтегральной функции при $\vec{q}=0$ на величину телесного угла $\Delta\Omega$, в котором происходит рассеяние основной части энергии.

Неравенство $P_1 \ll P_0$, выполнение которого необходимо для применимости теории возмущений, с помощью формул (14.43) и (14.44) можно теперь записать в виде

$$\frac{\pi}{2} k_\varepsilon^4 L S_\mu(0) \Delta\Omega \ll 1. \quad (14.45)$$

При получении данного неравенства мы учли, что $|U_0|=1$ (см. (14.17)), и воспользовались оценками $\Sigma_V \sim L^2$, $V \sim L^3$.

Снова рассмотрим два предельных случая.

1. *Рассеяние коротких волн на крупномасштабных неоднородностях* ($k_\varepsilon l_\mu \gg 1$, $\lambda_\varepsilon \ll l_\mu$). С учетом оценки угловой ширины индикатрисы рассеяния $\Delta\theta$ (14.41) получим характерную величину телесного угла

$$\Delta\Omega \approx \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\Delta\theta} \sin\theta d\theta \approx 2\pi \frac{(\Delta\theta)^2}{2} \approx \frac{\pi}{k_\varepsilon^2 l_\mu^2} \square \frac{\lambda_\varepsilon^2}{l_\mu^2} \ll 1. \quad (14.46)$$

Подставив теперь найденную величину $\Delta\Omega$ в (14.45) и учитывая оценку (14.33) для $S_\mu(0)$, получаем

$$\frac{1}{16\pi} \sigma_\mu^2(k_\varepsilon L) (k_\varepsilon l_\mu) \ll 1. \quad (14.47)$$

2. *Рассеяние на мелких неоднородностях* ($k_\varepsilon l_\mu \ll 1$, $\lambda_\varepsilon \gg l_\mu$) является, как отмечалось выше, диффузным - энергия равномерно рассеивается по всем направлениям, т.е. $\Delta\Omega = 4\pi$, и (14.45) приводит к неравенству

$$\frac{1}{4\pi} \sigma_\mu^2(k_\varepsilon L) (k_\varepsilon l_\mu)^3 \ll 1, \quad (14.48)$$

которое, как легко убедиться, накладывает более слабые ограничения на величину σ_μ^2 , чем (14.47).

Таким образом, **первым приближением теории возмущений можно пользоваться, если линейные размеры неоднородностей l_μ не очень велики, а**

дисперсия флуктуации σ_μ^2 и размеры L рассеивающего объема достаточно малы. Кроме того, напомним, что при выводе формулы (14.31) предполагалось выполненным неравенство $L \gg l_\mu$, обеспечивающее наличие большого числа неоднородностей в рассеивающем объеме V .

14.5. Спектр рассеянного сигнала

Обратимся теперь к более общему случаю **движущихся** (изменяющихся со временем) **неоднородностей** показателя преломления, когда $\mu = \mu(\vec{R}, t)$, а рассеянное в первом приближении теории возмущений волновое поле $U_1(\vec{R}, t)$ определяется по формуле (14.23):

$$U_1(\vec{R}, t) \approx \frac{k_\varepsilon^2}{4\pi R} e^{i(k_\varepsilon R - \omega_0 t)} \int_V d\vec{R}' \mu\left(\vec{R}', t - \frac{R}{v_\varepsilon} + \frac{\vec{k}\vec{R}'}{\omega_0}\right) e^{-i(\vec{k} - \vec{k}_\varepsilon)\vec{R}'}$$

Предположим, что скорость изменения относительных флуктуаций показателя преломления $\mu = \mu(\vec{R}, t)$ в подынтегральном выражении достаточно мала. В этом случае во временном аргументе функции $\mu = \mu(\vec{R}, t)$ можно пренебречь слагаемыми, зависящими от \vec{R}' :

$$\mu\left(\vec{R}', t - \frac{R}{v_\varepsilon} + \frac{\vec{k}\vec{R}'}{\omega_0}\right) \approx \mu\left(\vec{R}', t - \frac{R}{v_\varepsilon}\right). \quad (14.49)$$

Для обоснования возможности проведения такого упрощения введем в рассмотрение характерное время τ_μ изменения $\mu(\vec{R}, t)$:

$$\left| \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial t} \right| \approx \frac{1}{\tau_\mu}$$

и разложим в ряд Тейлора $\mu\left(\vec{R}', t - \frac{R}{v_\varepsilon} + \frac{\vec{k}\vec{R}'}{\omega_0}\right)$ по малой добавке $\Delta t' = \frac{\vec{k}\vec{R}'}{\omega_0}$:

$$\mu\left(\vec{R}', t - \frac{R}{v_\varepsilon} + \frac{\vec{k}\vec{R}'}{\omega_0}\right) \approx \mu\left(\vec{R}', t - \frac{R}{v_\varepsilon}\right) + \frac{\partial}{\partial t} \mu\left(\vec{R}', t - \frac{R}{v_\varepsilon}\right) \cdot \frac{\vec{k}\vec{R}'}{\omega_0}. \quad (14.50)$$

Вторым слагаемым в (14.50) можно пренебречь, если оно мало по сравнению с первым. Для этого необходимо выполнение следующего неравенства:

$$\left| \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial t} \right| \left| \frac{\vec{k}\vec{R}'}{\omega_0} \right| \leq \frac{k_\varepsilon L}{\omega_0 \tau_\mu} \ll 1. \quad (14.51)$$

Если изменение $\mu(\vec{R}, t)$ во времени связано только с переносом поля $\mu(\vec{R})$ как целого со скоростью v (так называемый перенос "замороженных" неоднородностей), то $\tau_\mu \approx l_\mu / v$, и неравенство (14.51) приобретает вид

$$\frac{L}{l_\mu} \cdot \frac{v}{v_\varepsilon} \ll 1. \quad (14.52)$$

Последние два неравенства означают, что мы перешли к квазистатическому приближению: время относительного запаздывания волн $\Delta t' \sim L/v_\varepsilon$, приходящих в точку наблюдения из различных точек рассеивающего объема, должно быть значительно меньше, чем время τ_μ , за которое существенно изменяются неоднородности.

За счет изменений μ во времени поле U_1 уже не является монохроматическим с частотой ω_0 , а носит случайный временной характер, т.е. является случайным процессом. Найдем **энергетический спектр случайного процесса** $U_1(\vec{R}, t)$, предполагая случайное поле флуктуаций $\mu(\vec{R}, t)$ статистически однородным по пространственным переменным \vec{R} и стационарным по времени t . Автокорреляционная функция B_μ в этом случае имеет вид

$$\langle \mu(\vec{R}', t') \mu(\vec{R}'', t'') \rangle = B_\mu(\vec{R}' - \vec{R}'', t' - t''). \quad (14.53)$$

Энергетический спектр $S_{U_1}(\vec{R}, \omega)$ случайного процесса $U_1(\vec{R}, t)$ (радиус-вектор \vec{R} точки наблюдения играет здесь роль фиксированного параметра) определим по формуле Винера - Хинчина, имея в виду, что $U_1(\vec{R}, t)$ является аналитическим сигналом:

$$S_{U_1}(\vec{R}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle U_1(\vec{R}, t) U_1^*(\vec{R}, t + \tau) \rangle e^{i\omega\tau} d\tau. \quad (14.54)$$

Подставляя сюда $U_1(\vec{R}, t)$ в виде (14.23) с учетом (14.49), получаем

$$\begin{aligned} S_{U_1}(\vec{R}, \omega) &= \frac{k_\varepsilon^4}{32\pi^3 R^2} \int_V d\vec{R}' \int_V d\vec{R}'' \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i(\omega - \omega_0)\tau - i\vec{q}(\vec{R}' - \vec{R}'')} \times \\ &\times \langle \mu\left(\vec{R}', t + \tau - \frac{R}{v_\varepsilon}\right) \mu\left(\vec{R}'', t - \frac{R}{v_\varepsilon}\right) \rangle. \end{aligned} \quad (14.55)$$

Согласно (14.53) корреляционная функция под знаком интеграла равна

$$\langle \mu\left(\vec{R}', t + \tau - \frac{R}{v_\varepsilon}\right) \mu\left(\vec{R}'', t - \frac{R}{v_\varepsilon}\right) \rangle = B_\mu(\vec{\rho}, \tau),$$

где $\vec{\rho} = \vec{R}' - \vec{R}''$. Переходя затем в (14.55) к новым переменным интегрирования:

$$\vec{R}_1 = \frac{1}{2}(\vec{R}' + \vec{R}''), \quad \vec{\rho} = \vec{R}' - \vec{R}'' \text{ для случая большого количества неоднородностей внутри}$$

рассеивающего объема ($l_\mu \ll L$) приходим к следующей формуле:

$$\begin{aligned} S_{U_1}(\vec{R}, \omega) &= \frac{k_\varepsilon^4 V}{32\pi^3 R^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\rho} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau B_\mu(\vec{\rho}, \tau) e^{-i[\vec{q}\vec{\rho} - (\omega - \omega_0)\tau]} = \\ &= \frac{\pi k_\varepsilon^4 V}{2 R^2} S_\mu(\vec{q}, \omega - \omega_0). \end{aligned} \quad (14.56)$$

Здесь введен **пространственно-временной энергетический спектр случайного поля** $S_\mu(\vec{\chi}, \nu)$, обобщающий формулу Винера - Хинчина на случай зависимости автокорреляционной функции B_μ от времени и пространственных координат (см. § 13) и взятый для фиксированных значений пространственной и временной частот: $\vec{\chi} = \vec{q}$, $\nu = \omega - \omega_0$:

$$S_\mu(\vec{q}, \omega - \omega_0) = S_\mu(\vec{\chi}, \nu) \Big|_{\substack{\vec{\chi}=\vec{q}, \\ \nu=\omega-\omega_0}} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\rho} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau B_\mu(\vec{\rho}, \tau) e^{-i(\vec{\chi}\vec{\rho} - \nu\tau)} \Big|_{\substack{\vec{\chi}=\vec{q}, \\ \nu=\omega-\omega_0}}. \quad (14.57)$$

В реальных условиях флуктуации показателя преломления $n(\vec{R}, t)$ определяются пространственно-временными изменениями физических параметров, описывающих состояние среды, в которой происходит распространение волн: температурой, давлением, концентрацией примесей (в частности, для атмосферы - паров воды, т.е. влажностью), плотностью заряженных частиц (электронов и ионов - в ионосферной и космической плазме) и т.д. Эти физические параметры, в свою очередь, описываются уравнениями, которые связывают между собой их пространственные и временные изменения. Если описывающие состояние среды уравнения линейные, то амплитуда каждой пространственной гармоники $C_\mu(\vec{\chi}, t)$ в разложении Фурье $\mu(\vec{R}, t)$ по плоским волнам

$$\mu(\vec{R}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} C_\mu(\vec{\chi}, t) e^{i\vec{\chi}\vec{R}} d\vec{\chi} \quad (14.58)$$

может изменяться со временем только вполне определенным образом, по гармоническому закону с фиксированной частотой $\Omega = \Omega(\vec{\chi})$:

$$C_\mu(\vec{\chi}, t) = C_\mu^{(+)}(\vec{\chi}) e^{-i\Omega(\vec{\chi})t} + C_\mu^{(-)}(\vec{\chi}) e^{i\Omega(\vec{\chi})t}. \quad (14.59)$$

Пространственно-временные флуктуации $\mu(\vec{R}, t)$ (14.58) при этом могут быть

представлены в виде интеграла Фурье по плоским волнам:

$$\mu(\vec{R}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ C_{\mu}^{(+)}(\vec{\chi}) e^{i[\vec{\chi}\vec{R} - \Omega(\vec{\chi})t]} + C_{\mu}^{(-)}(\vec{\chi}) e^{i[\vec{\chi}\vec{R} + \Omega(\vec{\chi})t]} \right\} d\vec{\chi}. \quad (14.60)$$

Уравнение $\Omega = \Omega(\vec{\chi})$ определяет так называемый **закон дисперсии** соответствующих волн (давления, температуры, плотности, электрического заряда и т.д.). Для каждой пространственной гармоники $\vec{\chi}$ два слагаемых под знаком интеграла в (14.60) соответствуют волнам, бегущим во взаимно противоположных направлениях и имеющим одинаковую круговую частоту $\Omega(\vec{\chi})$ и длину волны $\Lambda = 2\pi/\chi$. Это легко показать, если проследить за скоростью переноса фиксированного значения фазы волны. Действительно, положив $\Phi^{(\pm)} = \vec{\chi}\vec{R} \mp \Omega(\vec{\chi})t = Const$, скорость \vec{v}_{Φ} перемещения постоянной фазы (**фазовой скорости**) определим путем дифференцирования $\Phi^{(\pm)}$ по времени:

$$\frac{\partial \Phi^{(\pm)}}{\partial t} = \vec{\chi}\vec{v}_{\Phi} \mp \Omega(\vec{\chi}) = 0.$$

Здесь $\vec{v}_{\Phi} = d\vec{R}/dt$. Отсюда видно, что введенные нами знаки \pm соответствуют волнам, для которых связь между частотой $\Omega(\vec{\chi})$ и фазовой скоростью \vec{v}_{Φ} имеет вид $\Omega(\vec{\chi}) = \pm \vec{\chi}\vec{v}_{\Phi}$, что характерно для волн, бегущих в противоположных направлениях относительно вектора $\vec{\chi}$.

Воспользовавшись представлением $\mu(\vec{R}, t)$ в виде (14.60), построим теперь пространственно-временную автокорреляционную функцию $B_{\mu}(\vec{\rho}, \tau)$:

$$\begin{aligned} B_{\mu}(\vec{\rho}, \tau) &= \langle \mu(\vec{R} + \vec{\rho}, t + \tau) \mu(\vec{R}, t) \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\vec{\chi}\vec{\rho}} \left[S_{\mu}^{(+)}(\vec{\chi}) e^{-i\Omega(\vec{\chi})\tau} + S_{\mu}^{(-)}(\vec{\chi}) e^{i\Omega(\vec{\chi})\tau} \right] d\vec{\chi}, \end{aligned} \quad (14.61)$$

где с учетом пространственной однородности поля флуктуаций $\mu(\vec{R}, t)$ введены

пространственные энергетические спектры $S_{\mu}^{(+)}(\vec{\chi})$ и $S_{\mu}^{(-)}(\vec{\chi})$ волн, распространяющихся во взаимно противоположных направлениях:

$$\begin{aligned} \langle C_{\mu}^{(\pm)}(\vec{\chi}) C_{\mu}^{(\pm)*}(\vec{\chi}') \rangle &= S_{\mu}^{(\pm)}(\vec{\chi}) \delta(\vec{\chi} - \vec{\chi}'), \\ \langle S_{\mu}^{(+)}(\vec{\chi}) S_{\mu}^{(-)*}(\vec{\chi}') \rangle &= \langle S_{\mu}^{(-)}(\vec{\chi}) S_{\mu}^{(+)*}(\vec{\chi}') \rangle = 0. \end{aligned} \quad (14.62)$$

Пространственно-временной энергетический спектр $S_{\mu}(\vec{\chi}, \nu)$ после этого можно получить, вычисляя интеграл (14.57) с $B_{\mu}(\vec{\rho}, \tau)$ в виде (14.61):

$$S_{\mu}(\vec{\chi}, \nu) = S_{\mu}^{(+)}(\vec{\chi}) \delta[\nu - \Omega(\vec{\chi})] + S_{\mu}^{(-)}(\vec{\chi}) \delta[\nu + \Omega(\vec{\chi})]. \quad (14.63)$$

После проделанных вычислений энергетический спектр рассеянного излучения $S_{U_1}(\vec{R}, \omega)$ согласно формуле (14.56), представляется так:

$$S_{U_1}(\vec{R}, \omega) = \frac{\pi k_{\varepsilon}^4 V}{2R^2} \sum_{\pm} S_{\mu}^{(\pm)}(\vec{q}) \delta[\omega - \omega_0 \mp \Omega(\vec{q})]. \quad (14.64)$$

Видно, что энергетический спектр $S_{U_1}(\vec{R}, \omega)$ состоит из двух линий на частотах $\omega = \omega_0 \pm \Omega(\vec{q})$, интенсивности которых определяются энергиями $S_{\mu}^{(\pm)}(\vec{q})$, пропорциональными квадратам амплитуд пространственных гармоник поля $\mu(\vec{R}, t)$, причем знак "плюс" соответствует волнам, распространяющимся вдоль направления вектора \vec{q} , а знак "минус" - в противоположном направлении.

Комментарии

Эффект изменения частоты сигнала при рассеянии на флуктуирующих неоднородностях показателя преломления на величину $\pm \Omega(\vec{q})$, соответствующую частоте собственных волн в среде с волновым вектором \vec{q} , получил название **комбинационного рассеяния** (частота рассеянного сигнала получается из частоты падающего сигнала ω_0 путем простой комбинации увеличения (или уменьшения) ее на

величину $\Omega(\vec{q})$.

Измерение спектра рассеянного сигнала является чувствительным методом дистанционного зондирования - определения параметров рассеивающей среды по положению и интенсивности спектральных линий в отраженном сигнале. При этом для различных сред могут наблюдаться различные ситуации. **Например:**

1. Одному и тому же значению вектора рассеяния \vec{q} может соответствовать несколько ветвей колебаний с различными частотами $\Omega_m(\vec{q})$ ($m = 1, 2, \dots$). В этом случае в спектре рассеянного сигнала будет наблюдаться серия спектральных линий на частотах $\omega = \omega_0 \pm \Omega_m(\vec{q})$.

2. При рассеянии радиоволн на неоднородностях нейтральной атмосферы частота $\Omega(\vec{q})$ определяется скоростью звука $v_{зв}$ $\{\Omega(\vec{q}) = qv_{зв}\}$, которая, в свою очередь, зависит от температуры и других термодинамических параметров атмосферы. Этот факт лежит в основе методов радиоакустического зондирования нижней атмосферы.

3. Радиоволны, отраженные от ионосферы за счет рассеяния на плазменных неоднородностях, имеют в своем спектре максимумы, соответствующие плазменной частоте $\Omega_p = \frac{4\pi N_e e^2}{m_e}$ (e - заряд, m_e - масса электрона, N_e - пространственная плотность электронов), что позволяет определить, например, профиль электронной концентрации, зависимость N_e от высоты рассеивающей области.

4. Движению неоднородностей как целого со скоростью \vec{v} ("замороженный" перенос) формально соответствует закон дисперсии $\Omega(\vec{q}) = \vec{q}\vec{v}$; смещение частоты рассеянного сигнала в этом случае вызвано эффектом Допплера: $\omega = \omega_0 + \vec{q}\vec{v}$ (в формуле (14.64) при этом имеется только одно слагаемое - $S_{\mu}^{(+)}(\vec{q})$).

Учет диссипации энергии

Механизмы диссипации энергии, неизбежно присутствующие в любой физической системе, приводят к затуханию ее собственных колебаний, так что (14.59) следует, вообще говоря, записывать в виде

$$C_{\mu}(\vec{x}, t) = [C_{\mu}^{(+)}(\vec{x}) e^{-i\Omega(\vec{x})t} + C_{\mu}^{(-)}(\vec{x}) e^{i\Omega(\vec{x})t}] e^{-\Gamma(\vec{x})t}, \quad t \geq 0; \quad (14.65)$$

где $\Gamma(\vec{\chi})$ - декремент затухания. Соответствующим образом изменяется и автокорреляционная функция (14.61): вместо гармонической зависимости от времени в ней появляются экспоненциально затухающие множители $\exp\{-\Gamma(\vec{\chi})|\tau|\}$:

$$B_{\mu}(\vec{\rho}, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\vec{\chi}\vec{\rho} - \Gamma(\vec{\chi})|\tau|} \left[S_{\mu}^{(+)}(\vec{\chi}) e^{-i\Omega(\vec{\chi})\tau} + S_{\mu}^{(-)}(\vec{\chi}) e^{i\Omega(\vec{\chi})\tau} \right] d\vec{\chi}, \quad (14.66)$$

а пространственно-временной энергетический спектр $S_{\mu}(\vec{\chi}, \nu)$ "размывается" по частоте ν . Каждой пространственной гармонике с волновым вектором $\vec{\chi}$ соответствуют уже не две частоты $\pm\Omega(\vec{\chi})$ (см. (14.63)), а две полосы частот с шириной $\sim \Gamma(\vec{\chi})$:

$$S_{\mu}(\vec{\chi}, \nu) = \frac{1}{\pi} \sum_{\pm} S_{\mu}^{(\pm)}(\vec{\chi}) \frac{\Gamma(\vec{\chi})}{[\nu \mp \Omega(\vec{\chi})]^2 + \Gamma^2(\vec{\chi})}. \quad (14.67)$$

Формально это выражение может быть получено из (14.64), если входящие туда δ -функции заменить их "допредельными" значениями (см. (2.19-а)):

$$\delta(\nu \pm \Omega) = \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\pi} \frac{\Gamma}{(\nu \mp \Omega)^2 + \Gamma^2} \right]. \quad (14.68)$$

В результате, спектр $S_{\mu}(\vec{q}, \omega - \omega_0) = S_{\mu}(\vec{\chi}, \nu) \Big|_{\substack{\vec{\chi}=\vec{q} \\ \nu=\omega-\omega_0}}$ рассеянного сигнала из дискретного (14.64) (отличного от нуля только на двух частотах $\omega = \omega_0 \pm \Omega(\vec{q})$) становится непрерывным, с двумя максимумами, ширина которых пропорциональна декременту затухания "собственных" волн в среде (рис. 14.5).

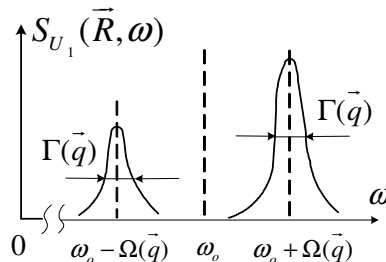


Рис. 14.5.

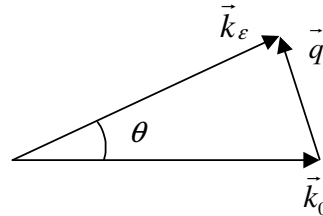
Таким образом, по виду спектра рассеянного сигнала можно определить не только собственные частоты колебаний в среде (для плазмы, например, это позволяет установить плотность заряженных частиц в рассеивающем объеме), но и оценить декремент затухания этих колебаний (для плазмы он определяется частотой столкновений электронов с нейтральными атомами и молекулами).

ЗАДАЧИ

1. В результате рассеяния плоской волны на случайных неоднородностях среды возникло излучение, интенсивность которого спадает по закону $\propto \exp(-\theta^2 / \theta_0^2)$ с ростом угла рассеяния θ . Определить по этим данным коэффициент корреляции показателя преломления, считая угол θ_0 малым ($\theta_0 \ll 1$).

Решение. Рассматриваем рассеяние в борновском приближении (однократное рассеяние). Согласно условию,

$$\bar{I}_1 \sim e^{-\theta^2 / \theta_0^2}.$$



Поскольку $\bar{I}_1 \sim S_\mu(\vec{q})$, то

Рис. 14.6

$$S_\mu(\vec{q}) \sim e^{-\theta^2 / \theta_0^2}. \quad (1)$$

Перейдем от θ к q с использованием соотношения $q = 2k_\epsilon \sin \theta / 2$ (см. рис. 14.6). Учтем также, что по условию угол θ_0 мал. Согласно (1) энергетический спектр $S_\mu(\vec{q})$ отличен от нуля лишь для углов $\theta \leq \theta_0 \ll 1$. Поэтому можно ограничиться рассмотрением лишь малых значений θ (в которых сосредоточена основная энергия рассеянного излучения). В этом случае $q \approx k_\epsilon \theta$, следовательно, (1) можно представить следующим образом:

$$S_\mu(\vec{q}) \sim e^{-q^2 / \theta_0^2 k_\epsilon^2}. \quad (2)$$

Теперь из формул Винера-Хинчина следует

$$\begin{aligned}
B_\mu(\rho) &\sim \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{q^2}{\theta_0^2 k_\varepsilon^2}} e^{i\vec{q}\vec{\rho}} d\vec{q} = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{q_x^2+q_y^2+q_z^2}{\theta_0^2 k_\varepsilon^2}} e^{i(q_x\rho_x+q_y\rho_y+q_z\rho_z)} dq_x dq_y dq_z = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{q_x^2}{\theta_0^2 k_\varepsilon^2} + i q_x \rho_x} dq_x \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{q_y^2}{\theta_0^2 k_\varepsilon^2} + i q_y \rho_y} dq_y \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{q_z^2}{\theta_0^2 k_\varepsilon^2} + i q_z \rho_z} dq_z.
\end{aligned} \tag{3}$$

Каждый из трех одинаковых по виду интегралов в (3) сводится к интегралу Пуассона.

Рассмотрим один из этих интегралов:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{q_x^2}{\theta_0^2 k_\varepsilon^2} + i q_x \rho_x} dq_x = \theta_0 k_\varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\psi^2 - \frac{\rho_x^2 \theta_0^2 k_\varepsilon^2}{4}} d\psi = \theta_0 k_\varepsilon \sqrt{\pi} e^{-\frac{\rho_x^2 \theta_0^2 k_\varepsilon^2}{4}}. \tag{4}$$

Здесь

$$\psi = \frac{q_x}{\theta_0 k_\varepsilon} - \frac{i \rho_x \theta_0 k_\varepsilon}{2}.$$

Из (3) и (4) для $B_\mu(\vec{\rho})$ можно окончательно записать

$$B_\mu(\vec{\rho}) \sim \pi \sqrt{\pi} (\theta_0 k_\varepsilon)^3 e^{-\frac{\theta_0^2 k_\varepsilon^2}{4} (\rho_x^2 + \rho_y^2 + \rho_z^2)} = \pi \sqrt{\pi} (\theta_0 k_\varepsilon)^3 e^{-\frac{\theta_0^2 k_\varepsilon^2}{4} \rho^2}.$$

Следовательно, коэффициент корреляции показателя преломления имеет вид

$$K_\mu(\rho) = \frac{B_\mu(\rho)}{B_\mu(0)} = e^{-\frac{\rho^2 \theta_0^2 k_\varepsilon^2}{4}} = e^{-\frac{\rho^2}{l_\mu^2}},$$

где $l_\mu = 2/\theta_0 k_\varepsilon$.

2. Волна распространяется в статистически однородной и изотропной среде с гауссовой функцией корреляции $B_\mu(\vec{\rho}) = \overline{\mu^2} e^{-\rho^2/l_\mu^2}$. Определить в борновском приближении индикатрису рассеяния и полную мощность, рассеянную объемом V по

всем направлениям.

Ответ:

$$F(\theta) = \exp\left(-l_\mu^2 k_\varepsilon^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right),$$

$$\bar{I}_{1 \text{ полн}} = \frac{\sqrt{\pi}}{4} k_\varepsilon^2 V l_\mu \overline{\mu^2} \left[1 - \exp(-k_\varepsilon^2 l_\mu^2)\right].$$

§ 15. Методы геометрической оптики и плавных возмущений

Неравенства (14.47) и (14.48), ограничивающие область применимости метода малых возмущений, не позволяют применять его для расчета полей, рассеянных на очень крупных неоднородностях, при больших размерах рассеивающего объема L или для очень коротких длин волн, когда $k_\varepsilon l_\mu \gg 1$ и $k_\varepsilon L \gg 1$. Альтернативой методу малых возмущений, в некотором смысле, являются **методы геометрической оптики (МГО)** и **плавных возмущений (МПВ)**, которые с самого начала предполагают, что линейные размеры неоднородностей l_μ велики по сравнению с длиной волны λ_ε ($k_\varepsilon l_\mu \gg 1$), т.е. неоднородности являются достаточно "плавными". Как мы видели, индикатриса рассеяния на таких неоднородностях сильно вытянута "вперед" (в направлении распространения первичного поля), что позволяет при расчетах пренебречь волнами, рассеянными назад.

Для простоты ограничимся случаем неподвижных неоднородностей, когда флуктуации показателя преломления n не зависят от времени $n(\vec{R}, t) = n(\vec{R})$ и волновое уравнение для поля U имеет вид (см. (14.1))

$$\left[\Delta_{\vec{R}} - \frac{n^2(\vec{R})}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] U(\vec{R}, t) = 0. \quad (15.1)$$

При этом, как было показано в предыдущем параграфе, для монохроматического первичного поля $U_0 \sim e^{-i\omega t}$ зависимость от времени t рассеянного поля сохраняется, что позволяет искать решение для $U(\vec{R}, t)$ в виде $U(\vec{R}, t) = U(\vec{R})e^{-i\omega t}$ (здесь и далее мы будем опускать индекс "0" у частоты ω_0). После подстановки этого вида решения в волновое уравнение (15.1) оно переходит в **уравнение Гельмгольца**:

$$\left[\Delta_{\vec{R}} + k^2 \varepsilon(\vec{R}) \right] U(\vec{R}) = 0, \quad (15.2)$$

где $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$ - волновое число, λ - длина волны в вакууме ($n=1$), а $\varepsilon(\vec{R}) = n^2(\vec{R})$ - диэлектрическая проницаемость среды.

15.1. Метод геометрической оптики

Если бы среда была однородной $\{\varepsilon(\vec{R}) = Const\}$, то уравнение Гельмгольца (15.2) имело бы решение в виде плоской волны:

$$U(\vec{R}) = A \exp\{ik\sqrt{\varepsilon} \cdot \vec{t} \vec{R}\}, \quad (15.3)$$

где \vec{t} - единичный вектор в направлении распространения волны. Заметим, что в предшествующих обозначениях (см. (14.17)) мы бы имели $k_\varepsilon = k\sqrt{\varepsilon}$ и $k\sqrt{\varepsilon} \vec{t} = k_\varepsilon \vec{t} = \vec{k}_\varepsilon$. Для $\varepsilon = \varepsilon(\vec{R})$ введем в рассмотрение характерный масштаб l_ε изменения диэлектрической проницаемости:

$$\left| \frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon} \right| \approx \frac{1}{l_\varepsilon}.$$

Если среда плавно неоднородна, т.е. $\lambda \ll l_\varepsilon$, то решение исходного уравнения (15.2) можно искать в виде квазиплоских волн:

$$U(\vec{R}) = A(\vec{R}) e^{iS(\vec{R})}, \quad (15.4)$$

где амплитуда $A(\vec{R})$ и фаза $S(\vec{R})$ - медленно изменяющиеся (в масштабе λ) функции координат. Воспользовавшись медленностью изменения $A(\vec{R})$ и $S(\vec{R})$, нетрудно получить уравнения для A и S или для величины $\varphi(\vec{R}) = S(\vec{R})/k$, которая представляет собой **фазовый путь волны** и называется **эйконалом**.

Предложенный для этого **Дебаем** способ вывода уравнений состоит в следующем. Разложим амплитуду $A(\vec{R})$ в ряд по обратным степеням волнового числа k :

$$U(\vec{R}) = \left(A_0 + \frac{A_1}{ik} + \frac{A_2}{(ik)^2} + \dots \right) e^{ik\varphi}. \quad (15.5)$$

виде зависимости $\vec{R} = \vec{R}(s)$, где s - геометрическая длина, вычисляемая вдоль луча от какой-либо начальной точки (см. рис. 15.1).

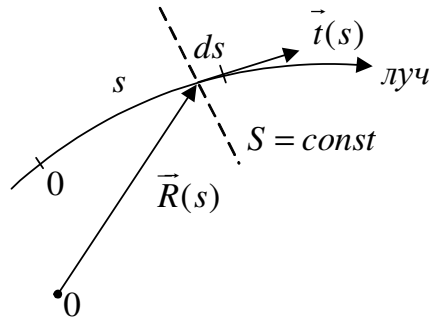


Рис. 15.1.

По известной зависимости $\vec{R}(s)$ легко определяется и уравнение касательной к лучу в каждой точке $\vec{t}(s)$:

$$\vec{t}(s) = \frac{d\vec{R}(s)}{ds}. \quad (15.8)$$

Здесь ds - элемент длины луча. С другой стороны, вектор $\vec{t}(s)$ одновременно является и нормалью к фазовому фронту $S = k\varphi = Const$: $\vec{t} = \vec{\nabla}S / |\vec{\nabla}S| = \vec{\nabla}\varphi / |\vec{\nabla}\varphi|$. Поскольку согласно уравнению эйконала (15.7) $|\vec{\nabla}\varphi| = \sqrt{\varepsilon}$, то отсюда следует, что

$$\vec{t}(s) = \frac{\vec{\nabla}\varphi}{\sqrt{\varepsilon}}. \quad (15.9)$$

Если тем или иным способом решение $\vec{R}(s)$ и, следовательно, $\vec{t}(s)$ лучевых уравнений найдено, то уравнения эйконала (15.7) и переноса нулевого приближения

$$2(\vec{\nabla}\varphi \vec{\nabla}A_0) + A_0\Delta\varphi = 0 \quad (15.10)$$

могут быть проинтегрированы вдоль лучевых траекторий. Действительно, умножив обе части равенства (15.9) скалярно на \vec{t} и учитывая, что $\vec{t}\vec{t} = 1$, а $\vec{t}\vec{\nabla}\varphi = d\varphi/ds$

(производная вдоль заданного направления \vec{t}), получим $d\varphi/ds = \sqrt{\varepsilon}$. Отсюда эйконал φ на расстоянии s от выбранного начало отсчета ($s = 0$) находится путем интегрирования вдоль криволинейного луча:

$$\varphi(s) = \int_0^s \sqrt{\varepsilon} ds' = \int_0^s \sqrt{\varepsilon [\vec{R}(s')]} ds'. \quad (15.11)$$

С другой стороны, считая, что $A_0 \neq 0$, уравнение переноса (15.10) можно переписать в следующем виде:

$$\operatorname{div} (A_0^2 \nabla \varphi) = \operatorname{div} (\vec{t} \sqrt{\varepsilon} A_0^2) = \operatorname{div} (\vec{t} I) = 0, \quad (15.12)$$

где введенная величина $I = \sqrt{\varepsilon} A_0^2$ пропорциональна **интенсивности**. По известной геометрии лучей $\vec{R}(s)$ построим теперь “бесконечно тонкую” **лучевую трубку** и проинтегрируем (15.12) по объему, заключенному между двумя сечениями: $d\Sigma_0$ - “на входе” и $d\Sigma$ - “на выходе” из трубки (см. рис.15.2).

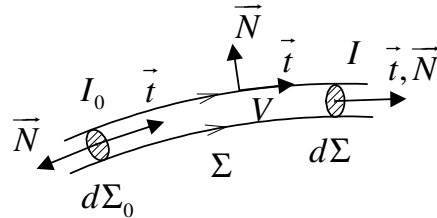


Рис. 15.2.

Воспользовавшись при этом теоремой Остроградского-Гаусса, получим

$$\int_V \operatorname{div} (\vec{t} I) dv = \int_{\Sigma} \vec{t} I \vec{N} d\Sigma. \quad (15.13)$$

Здесь \vec{N} - внешняя нормаль к поверхности лучевой трубки. Учитывая, что на боковой поверхности трубки векторы \vec{t} и \vec{N} ортогональны, а на торцах направления \vec{t} и \vec{N} либо

совпадают, либо противоположны (см. рис. 15.2), из (15.13) получаем **закон сохранения интенсивности внутри лучевой трубки:**

$$I_0 d\Sigma_0 = Id\Sigma = Const. \quad (15.14)$$

Здесь I_0 и I - соответственно интенсивности на входе и выходе трубки.

15.2. Приближение малых возмущений в методе геометрической оптики

Рассмотрим теперь случайно-неоднородную среду. Получить аналитическое решение уравнения эйконала (уравнения лучей) при произвольной зависимости ε от координат невозможно. Поэтому при решении статистических задач прибегают к различным приближенным методам и, в первую очередь, – к **методу возмущений**.

Флуктуации эйконала

Так же, как и в ММВ, представим диэлектрическую проницаемость $\varepsilon(\vec{R})$ в виде суммы регулярной и случайной составляющих:

$$\varepsilon(\vec{R}) = \langle \varepsilon(\vec{R}) \rangle + \varepsilon_1(\vec{R}) \quad (15.15)$$

Предположив, что флуктуационная компонента ε_1 мала по сравнению с регулярной $\bar{\varepsilon}$:

$\sigma_\varepsilon = \sqrt{\langle \varepsilon_1^2 \rangle} \ll \bar{\varepsilon}$, представим эйконал в виде ряда

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \dots \quad (15.16)$$

Считаем, что φ_0 удовлетворяет “невозмущенному” уравнению эйконала

$$(\bar{\nabla} \varphi_0)^2 = \bar{\varepsilon}(\vec{R}), \quad (15.17)$$

а $|\nabla \varphi_m| \sim \sigma_\varepsilon^m$. Подставим (15.16) в уравнение эйконала (15.7)

$$[\bar{\nabla}(\varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \dots)]^2 = \bar{\varepsilon} + \varepsilon_1$$

и потребуем, чтобы полученное уравнение удовлетворялось для каждого слагаемого по малой величине σ_ε^m независимо от других слагаемых. Тогда с учетом (15.17) получаем для поправок φ_m следующую систему рекуррентных линейных уравнений:

$$\begin{aligned} 2(\bar{\nabla}\varphi_0\bar{\nabla}\varphi_1) &= \varepsilon_1, \\ 2(\bar{\nabla}\varphi_0\bar{\nabla}\varphi_2) &= -(\bar{\nabla}\varphi_1)^2, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (15.18)$$

Решение системы уравнений (15.18) можно выразить в квадратурах, если известны невозмущенные характеристики $\bar{R}_0(s)$ и $\bar{t}_0(s)$ регулярного уравнения эйконала (15.17). Действительно, предположим, что решения $\bar{R}_0(s)$ и $\bar{t}_0(s)$ известны. Тогда согласно (15.17) имеем $\bar{\nabla}\varphi_0 = \bar{t}_0\sqrt{\varepsilon}$. С учетом этого уравнение для поправки первого порядка φ_1 согласно (15.18) принимает вид

$$2(\bar{\nabla}\varphi_0\bar{\nabla}\varphi_1) = 2\sqrt{\varepsilon}(\bar{t}_0\bar{\nabla}\varphi_1) = 2\sqrt{\varepsilon}\frac{d\varphi_1}{ds} = \varepsilon_1. \quad (15.19)$$

Отсюда следует, что поправка φ_1 к невозмущенному эйконалу φ_0 на отрезке луча длиной s равна

$$\varphi_1(s) = \frac{1}{2} \int_0^s \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\varepsilon}} ds'. \quad (15.20)$$

Интегрирование здесь ведется вдоль невозмущенного луча $\bar{R}_0(s)$.

Флуктуации углов прихода

Углы прихода волны определяются направлением нормали к фазовому фронту, которое в изотропной среде совпадает с направлением единичного вектора $\bar{t} = \bar{\nabla}\varphi/\sqrt{\varepsilon}$. Определим отклонения этого вектора от невозмущенного значения $\bar{t}_0 = \bar{\nabla}\varphi_0/\sqrt{\varepsilon}$.

Согласно формулам (15.15) и (15.16) с точностью до линейных по $\varepsilon_1/\bar{\varepsilon} \ll 1$ слагаемых получим

$$\bar{t} = \frac{\bar{\nabla}\varphi}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{\bar{\nabla}(\varphi_0 + \varphi_1 + \dots)}{\sqrt{\bar{\varepsilon} + \varepsilon_1}} = \frac{\bar{\nabla}\varphi_0}{\sqrt{\bar{\varepsilon}}} + \frac{1}{\sqrt{\bar{\varepsilon}}} \left[\bar{\nabla}\varphi_1 - \frac{\varepsilon_1 \bar{\nabla}\varphi_0}{2\bar{\varepsilon}} + \dots \right]. \quad (15.21)$$

Учитывая далее, что $\bar{\nabla}\varphi_0 = \bar{t}_0 \sqrt{\bar{\varepsilon}}$ и $\varepsilon_1 = 2(\bar{\nabla}\varphi_0 \bar{\nabla}\varphi_1) = 2\sqrt{\bar{\varepsilon}}(\bar{t}_0 \bar{\nabla}\varphi_1)$ (см. (15.19)), получим

$$\bar{t} \approx \bar{t}_0 + \frac{1}{\sqrt{\bar{\varepsilon}}} \left[\bar{\nabla}\varphi_1 - \bar{t}_0 (\bar{t}_0 \bar{\nabla}\varphi_1) \right],$$

Отсюда находим выражение для поправки первого порядка к направлению невозмущенного луча \bar{t}_0 :

$$\bar{t}_1 \approx \bar{t} - \bar{t}_0 \approx \frac{1}{\sqrt{\bar{\varepsilon}}} \left[\bar{\nabla}\varphi_1 - \bar{t}_0 (\bar{t}_0 \bar{\nabla}\varphi_1) \right] \equiv \frac{\bar{\nabla}_\perp \varphi_1}{\sqrt{\bar{\varepsilon}}}, \quad (15.22)$$

где $\bar{\nabla}_\perp$ - вектор-оператор поперечного (по отношению к невозмущенному лучу) дифференцирования.

Флуктуации уровня

Введем понятие **уровня амплитуды** или просто **уровня**, которым называют величину

$$\chi = \ln \frac{A_0}{\hat{A}}, \quad (15.23)$$

где \hat{A} - некоторая постоянная величина той же размерности, что и амплитуда A_0 . С учетом определения (15.23) уравнение переноса нулевого приближения (15.10) может быть переписано в следующем виде:

эйконала нулевого приближения $\vec{\nabla} \varphi_0 = \sqrt{\varepsilon} \vec{t}_0$ получим, что $\varphi_0 = \sqrt{\varepsilon} \cdot s$, где s - отсчитывается от выбранного начала отсчета ($s=0$) вдоль прямолинейного луча, задаваемого направлением \vec{t}_0 . Для удобства представления мы можем, например, направить вдоль \vec{t}_0 ось OZ декартовой системы координат XYZ . В этом случае $s \equiv z$, $\vec{t}_0 = \vec{e}_z$, $\vec{\nabla} \varphi_0 = \sqrt{\varepsilon} \vec{e}_z$, $\varphi_0 = \sqrt{\varepsilon} z$ и $\Delta \varphi_0 = 0$. С другой стороны, для семейства плоско-параллельных лучей сечения невозмущенных лучевых трубок не изменяются по дистанции, и из закона сохранения интенсивности внутри лучевой трубки получаем, что $\chi_0 = Const$. Следовательно, $\vec{\nabla} \chi_0 = 0$. С учетом вышеизложенного, первое уравнение в системе (15.26) удовлетворяется автоматически, а второе (для χ_1) приводится к следующему виду:

$$2\vec{\nabla} \varphi_0 \vec{\nabla} \chi_1 + \Delta \varphi_1 = 2\sqrt{\varepsilon} \frac{d\chi_1}{dz} + \Delta \varphi_1 = 0. \quad (15.27)$$

Найденное уравнение легко интегрируется, и мы получаем выражение для флуктуационной добавки к уровню:

$$\chi_1(x, y, z) = -\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \int_0^z \Delta \varphi_1 dz'. \quad (15.28)$$

Интегрирование здесь ведется вдоль прямолинейного луча, параллельного оси OZ , а φ_1 согласно (15.20) определяется как

$$\varphi_1(x, y, z) = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \int_0^z \varepsilon_1(x, y, z') dz'. \quad (15.29)$$

15.3. Метод плавных возмущений (метод Рыгова)

В этом разделе мы рассмотрим еще один, широко используемый приближенный метод решения уравнений электродинамики - так называемый метод плавных возмущений (МПВ). Этот метод был впервые использован в 1937 г. С.М.Рытовым для

решения детерминированной задачи о дифракции света на ультразвуковой волне и применен в дальнейшем при решении статистических задач А.М.Обуховым.

Для простоты снова ограничимся случаем неподвижных неоднородностей, когда флуктуации диэлектрической проницаемости не зависят от времени: $\varepsilon(\vec{R}, t) = \varepsilon(\vec{R})$. В отличие от ММВ в МГО и МПВ рассеивающий объем V , внутри которого находятся случайные неоднородности ε_1 , достаточно велик, и наблюдатель может находиться даже внутри V (по крайней мере, неоднородности ε_1 занимают если и не всю, то значительную часть трассы распространения волн).

Предположим, что нам необходимо определить рассеянное поле в точке наблюдения P , находящейся непосредственно внутри рассеивающего объема V . В поставленной задаче интерес представляет не столько рассеянное поле, возникающее в неоднородной среде под действием поля первичной волны $U_0(\vec{R})$, сколько изменение параметров $U_0(\vec{R})$. В качестве таковых обычно рассматривают амплитуду $A(\vec{R})$ и фазу $S(\vec{R})$ волны. Так же, как и в МГО, представим искомое поле $U(\vec{R})$ в комплексной форме:

$$U(\vec{R}) = A(\vec{R})e^{iS(\vec{R})} = \hat{A} \frac{A(\vec{R})}{\hat{A}} e^{iS(\vec{R})} = \hat{A} e^{\psi(\vec{R})}, \quad (15.30)$$

где введена новая функция

$$\psi(\vec{R}) = iS(\vec{R}) + \ln \frac{A(\vec{R})}{\hat{A}} = iS(\vec{R}) + \chi(\vec{R}), \quad (15.31)$$

так называемая “**комплексная фаза**” поля $U(\vec{R})$. Мнимая часть ψ совпадает с собственно фазой S ($\text{Im} \psi = S$), а вещественная часть $\chi = \ln \frac{A}{\hat{A}} = \text{Re} \psi$ представляет собой **уровень амплитуды** или просто уровень. Физический смысл в представлении (15.30) имеет лишь $\text{Re} U$, так что комплексное поле $U(\vec{R})$ можно рассматривать как обобщение понятия “аналитический сигнал” на функции не времени t , а пространственных переменных \vec{R} .

Подставив искомый вид решения (15.30) в уравнение Гельмгольца (15.2), перейдем к новому уравнению для комплексной фазы $\psi(\vec{R})$. При этом воспользуемся известными правилами дифференциально-векторного анализа:

$$\begin{aligned} gradU &= \vec{\nabla}U = \hat{A}\vec{\nabla}e^{\psi} = \hat{A}e^{\psi}\vec{\nabla}\psi = U\vec{\nabla}\psi, \\ \Delta U &= div(gradU) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}U) = \vec{\nabla}(U\vec{\nabla}\psi) = \vec{\nabla}U\vec{\nabla}\psi + U\Delta\psi = U(\vec{\nabla}\psi)^2 + U\Delta\psi. \end{aligned} \quad (15.32)$$

Напомним здесь еще раз определения операторов $\vec{\nabla}$ (набла) и Δ (лапласиан):
 $\vec{\nabla} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ - орты декартовой системы координат. Подставляя теперь ΔU в (15.2) и сокращая на функцию U , которая предполагается отличной от нуля, приходим к уравнению для комплексной фазы ψ :

$$(\vec{\nabla}\psi)^2 + \Delta\psi + k^2[\bar{\varepsilon}(\vec{R}) + \varepsilon_1(\vec{R})] = 0. \quad (15.33)$$

В отличие от (15.2), мы получили уравнение с постоянными коэффициентами и в этом смысле оно "лучше" (15.2), где перед неизвестной функцией $U(\vec{R})$ стоит переменный множитель $k^2\varepsilon(\vec{R}) = k^2[\bar{\varepsilon}(\vec{R}) + \varepsilon_1(\vec{R})]$. Но за это упрощение приходится "платить" тем, что уравнение (15.33) нелинейное относительно $\vec{\nabla}\psi$.

15.4. Приближение малых возмущений в методе Рытова

Так же, как и в МГО, рассмотрим случай, когда флуктуирующая компонента ε_1 мала по сравнению с регулярной составляющей $\bar{\varepsilon}$: $\sigma_\varepsilon = \sqrt{\langle \varepsilon_1^2 \rangle} \ll \bar{\varepsilon}$. Решение уравнения (15.33) будем искать в виде ряда теории возмущений

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 + \psi_2 + \dots, \quad (15.34)$$

по степеням малого параметра $\mu = \varepsilon_1/\bar{\varepsilon}$ ($\sigma_\mu = \sigma_\varepsilon/\bar{\varepsilon} \ll 1$), считая, что $\psi_m \sim \sigma_\mu^m$. Так как в уравнении (15.33) содержатся только производные от функции ψ , а сама функция ψ не

входит в уравнение, естественно допустить, что фактическим параметром разложения (15.33) является не сама величина μ , а ее производные $\nabla\mu \sim \mu/l_\mu$, где l_μ - характерный линейный размер неоднородностей $\mu(\bar{R})$. Отсюда следует, что чем больше размер неоднородностей l_μ , т.е. чем они более "плавные", тем лучше должен сходиться ряд (15.34) для ψ .

Подставим ряд (15.34) в (15.33):

$$\left[\bar{\nabla}(\psi_0 + \psi_1 + \dots) \right]^2 + \Delta(\psi_0 + \psi_1 + \dots) = -k^2 \left[\bar{\varepsilon}(\bar{R}) + \varepsilon_1(\bar{R}) \right]. \quad (15.35)$$

Будем считать, что ψ_0 удовлетворяет "невозмущенному" уравнению (15.33) с $\varepsilon_1 \equiv 0$, а для остальных слагаемых потребуем, чтобы равенство (15.35) выполнялось в каждом порядке по ε_1 . В результате получаем следующую систему рекуррентных уравнений:

$$\begin{aligned} (\varepsilon_1^0) \quad & (\bar{\nabla} \psi_0)^2 + \Delta \psi_0 = -k^2 \bar{\varepsilon}(\bar{R}), \\ (\varepsilon_1^1) \quad & 2\bar{\nabla} \psi_0 \bar{\nabla} \psi_1 + \Delta \psi_1 = -k^2 \varepsilon_1(\bar{R}), \\ (\varepsilon_1^2) \quad & 2\bar{\nabla} \psi_0 \bar{\nabla} \psi_2 + \Delta \psi_2 = -(\bar{\nabla} \psi_1)^2, \\ & \dots \end{aligned} \quad (15.36)$$

Решение ψ_0 первого уравнения (15.36) определяет пространственную зависимость невозмущенного волнового поля $U_0 = e^{\psi_0}$, которая имела бы место, если бы флуктуации показателя преломления $\varepsilon_1(\bar{R})$ вообще отсутствовали ($\varepsilon_1 \equiv 0$). Это решение мы предполагаем известным. Второе уравнение в (15.36) относительно ψ_1 является линейным с заданной правой частью и известным коэффициентом $\bar{\nabla} \psi_0$ перед производной $\bar{\nabla} \psi_1$. Последующие уравнения для ψ_2 , ψ_3 и так далее образуют цепочку "зацепляющихся" уравнений: знание ψ_m позволяет определить коэффициенты $\bar{\nabla} \psi_m$ и правые части уравнений для ψ_{m+1} .

В качестве *иллюстрации* метода плавных возмущений применим его для решения простейшей задачи. Пусть бесконечная статистически однородная среда ($\langle \varepsilon(\vec{R}) \rangle = Const$) поделена на два полупространства ($z > 0$ и $z < 0$ на рис. 15.3).

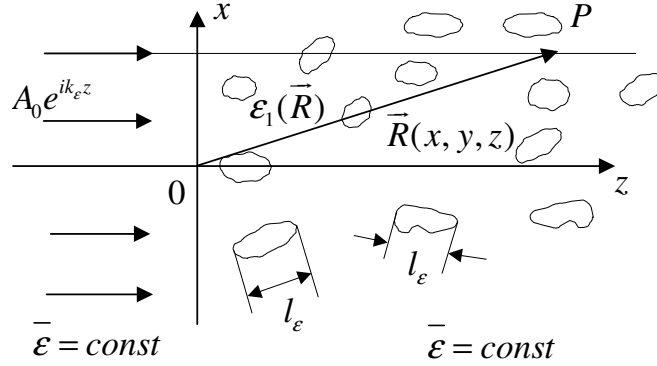


Рис. 15.3.

На полупространство $z > 0$, в котором находятся случайные неоднородности $\varepsilon_1(\vec{R})$, из левого полупространства ($z < 0$), где неоднородности отсутствуют ($\varepsilon_1 \equiv 0$), падает нормально к границе раздела ($z = 0$) плоская монохроматическая волна единичной амплитуды

$$U_0(\vec{R}, t) = e^{i(k_\varepsilon z - \omega t)}, \quad (15.37)$$

где $k_\varepsilon = k\sqrt{\bar{\varepsilon}}$ - модуль волнового вектора в статистически однородной среде (см. (14.17)). Требуется в произвольной точке P с координатами $\vec{R} = (z, y, z)$, находящейся внутри неоднородной среды ($z > 0$), найти поправки к амплитуде и фазе волны, возникающие за счет неоднородностей диэлектрической проницаемости $\varepsilon_1(\vec{R})$.

Согласно (15.37) комплексная фаза невозмущенного поля равна $\psi_0 = iS_0 + \chi_0$, где $S_0 = k_\varepsilon z$ и $\chi_0 = Const$. Вычислив $\vec{\nabla} \psi_0 = ik_\varepsilon \vec{e}_z$, $\Delta \psi_0 = 0$, убеждаемся в том, что первое уравнение для ψ_0 в системе (15.36) превращается в тождество: $-k_\varepsilon^2 = -k_\varepsilon^2$.

Уравнение для поправки ψ_1 (второе уравнение в (15.36)) принимает вид

$$2ik\sqrt{\bar{\varepsilon}} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} + \Delta \psi_1 = -k^2 \varepsilon_1(\vec{R}). \quad (15.38)$$

Представив ψ_1 в виде $\psi_1 = iS_1 + \chi_1$ и потребовав выполнение уравнения (15.38) для вещественной и мнимой частей в отдельности, приходим к системе двух уравнений для двух неизвестных функций S_1 и χ_1 :

$$\begin{aligned} -2k\sqrt{\varepsilon} \frac{\partial S_1}{\partial z} + \Delta\chi_1 &= -k^2\varepsilon_1, \\ 2k\sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \chi_1}{\partial z} + \Delta S_1 &= 0. \end{aligned} \quad (15.39)$$

Перейдем теперь от фазы S_1 к соответствующему ей эйконалу $\varphi_1 = S_1/k$. Разделив после этого первое уравнение в системе (15.39) на k^2 , а второе на k , получим

$$\begin{aligned} 2\sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - \frac{1}{k^2} \Delta\chi_1 &= \varepsilon_1(\vec{R}), \\ 2\sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \chi_1}{\partial z} + \Delta\varphi_1 &= 0. \end{aligned} \quad (15.40)$$

Для достаточно коротких длин волн ($k \rightarrow \infty$) вторым слагаемым в левой части первого уравнения в (15.40) можно пренебречь, после чего приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} 2\sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} &= \varepsilon_1(\vec{R}), \\ 2\sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \chi_1}{\partial z} + \Delta\varphi_1 &= 0, \end{aligned} \quad (15.41)$$

которые в точности совпадают с ранее полученными в приближении МГО (см. (15.19) и (15.27)).

Граничные условия для уравнений (15.41) можно задать на плоскости $z=0$, если пренебречь волнами, отраженными от границы раздела двух сред и рассеянными неоднородностями в обратном направлении, т.е. считать, что

$$U(\vec{R})\Big|_{z=0} = U_0(\vec{R})\Big|_{z=0}. \quad (15.42)$$

Отсюда следует, что $S = S_0$, $\chi = \chi_0$ при $z = 0$ или $S_1 = 0$, $\chi_1 = 0$ при $z = 0$. Интегрируя первое уравнение в (15.41), при условии, что $\varphi_1(x, y, 0) = 0$, получаем

$$\varphi_1(x, y, z) = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \int_0^z \varepsilon_1(x, y, z') dz' = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} \int_0^z \mu(x, y, z') dz', \quad (15.43)$$

откуда поправка первого порядка малости S_1 к фазе S_0 равна

$$S_1(x, y, z) = k\varphi_1 = \frac{k\varepsilon}{2} \int_0^z \mu(x, y, z') dz'. \quad (15.44)$$

Введя обозначение $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \Delta_{\perp}$, где $\Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ - поперечная составляющая лапласиана, согласно правилу дифференцирования интеграла по верхнему пределу (по z) находим $\Delta\varphi_1$:

$$\Delta\varphi_1 = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} \left[\frac{\partial}{\partial z} \mu(x, y, z) + \int_0^z \Delta_{\perp} \mu(x, y, z') dz' \right].$$

При этом второе уравнение для χ_1 (15.41) при условии $\chi_1(x, y, 0) = 0$ имеет решение:

$$\chi_1(x, y, z) = -\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \int_0^z \Delta\varphi_1(x, y, z') dz' = -\frac{1}{4} \mu(x, y, z) - \frac{1}{4} \int_0^z dz' \int_0^{z'} \Delta_{\perp} \mu(x, y, z'') dz''. \quad (15.45)$$

Обозначим через $dV(z') = dz'$ и $U(z') = \int_0^{z'} \Delta_{\perp} \mu(x, y, z'') dz''$ и вычислим интеграл в (15.45)

по частям:

$$\int_0^z dV(z') \cdot U(z') = V(z') \cdot U(z') \Big|_0^z - \int_0^z dU(z') \cdot V(z').$$

После этого (15.45) приводится к окончательному виду:

$$\chi_1(x, y, z) = -\frac{1}{4}\mu(x, y, z) - \frac{1}{4}\int_0^z (z-z')\Delta_{\perp}\mu(x, y, z')dz'. \quad (15.46)$$

Формулы (15.43) и (15.46) для φ_1 и χ_1 соответственно не зависят от длины волны излучения, т.к. получены из решения системы уравнений (15.41) при $k \rightarrow \infty$, т.е. в приближении геометрической оптики. Как было показано в предыдущем разделе, в рамках МГО фаза волны $S = k\varphi$ определялась путем интегрирования показателя преломления n вдоль криволинейного луча $\vec{R}(s)$ (15.11):

$$S(s) = k\int_0^s \sqrt{\varepsilon(s')}ds' = k\int_0^s n(s')ds' \quad (15.47)$$

(для нахождения фазы S в заданной точке наблюдения P с координатами $\vec{R} = (x, y, z)$ интегрирование необходимо производить по лучу, проходящему через эту точку). Представим $n(s)$ в виде

$$n(s) = \sqrt{\varepsilon(s)} = \sqrt{\bar{\varepsilon}(s) + \varepsilon_1(s)} = \sqrt{\bar{\varepsilon}}\sqrt{1 + \mu(s)}.$$

Для относительно слабых флуктуаций, когда $|\mu| \ll 1$, $n(s)$ можно разложить в ряд по степеням μ и ограничиться только линейным по μ слагаемым. В пределах этой точности интегрирование по истинному лучу $\vec{R}(s)$ в (15.47) можно заменить на интегрирование по “спрямленному” лучу (отрезку прямой), параллельному оси OZ и проходящему через точку наблюдения $\vec{R} = (x, y, z)$:

$$S(x, y, z) \approx k\sqrt{\bar{\varepsilon}}\int_0^z \left[1 + \frac{1}{2}\mu(x, y, z')\right] dz' = k_{\varepsilon}z + \frac{k_{\varepsilon}}{2}\int_0^z \mu(x, y, z') dz', \quad (15.48)$$

Видно, что первое слагаемое в правой части (15.48) совпадает с S_0 , а второе - с выражением (15.44) для S_1 .

15.5. Определение статистических характеристик

Формулы (15.44) и (15.46) решают так называемую динамическую часть задачи, они позволяют вычислить поправки к фазе, уровню и углу прихода, если известен явный вид функции $\mu(\vec{R})$. Если же $\mu(\vec{R})$ является лишь реализацией случайного поля, то S_1 и χ_1 в каждой точке \vec{R} также являются случайными величинами. Усредняя (15.44) и (15.46) по ансамблю реализаций $\mu(\vec{R})$, получаем

$$\langle S_1 \rangle = \langle \chi_1 \rangle = 0, \quad (15.49)$$

и, следовательно, среднее значение фазы S в этом приближении совпадает с ее невозмущенным значением S_0 , а флуктуации фазы приближенно совпадают с поправкой S_1 :

$$\delta S = S - \langle S \rangle = S - S_0 \approx S_1. \quad (15.50)$$

Найденные решения (15.44) и (15.46) позволяют также вычислить и моменты второго порядка для флуктуаций фазы, уровня и углов прихода. Для примера мы рассмотрим лишь дисперсию флуктуаций фазы σ_S^2 , которую можно вычислить, усредняя квадрат интеграла (15.44):

$$\sigma_S^2 = \langle S_1^2 \rangle = \frac{k_\varepsilon^2}{4} \int_0^z dz' \int_0^z dz'' \langle \mu(x, y, z') \mu(x, y, z'') \rangle = \frac{k_\varepsilon^2}{4} \int_0^z dz' \int_0^z dz'' B_\mu(z' - z''). \quad (15.51)$$

При этом, как и ранее, мы предположили, что поле $\mu(\vec{R})$ статистически однородно и ввели автокорреляционную функцию флуктуаций $\mu(\vec{R})$ на луче:

$$\langle \mu(\vec{R}') \mu(\vec{R}'') \rangle = B_\mu(\vec{R}' - \vec{R}'') = B_\mu(0, 0, z' - z'') = B_\mu(z' - z''). \quad (15.52)$$

Для рассматриваемой задачи $\vec{R}' = (x, y, z')$, а $\vec{R}'' = (x, y, z'')$, и поэтому разностный вектор имеет компоненты $\vec{R}' - \vec{R}'' = (0, 0, z' - z'')$.

Введем в формуле (15.51) вместо z'' новую переменную интегрирования $\xi = z'' - z'$, а к интегралу по dz' применим операцию интегрирования по частям (см. (15.46)):

$$\begin{aligned} \sigma_S^2 &= \frac{k_\varepsilon^2}{4} \int_0^z dz' \int_{-z'}^{z-z'} d\xi B_\mu(\xi) = \frac{k_\varepsilon^4}{4} \left\{ z' \int_{-z'}^{z-z'} d\xi B_\mu(\xi) \Big|_{z'=0}^{z'=z} - \int_0^z dz' z' [-B_\mu(z-z') + B_\mu(-z')] \right\} = \\ &= \frac{k_\varepsilon^2}{2} \int_0^z (z-\xi) B_\mu(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (15.53)$$

При этом мы учли, что $B_\mu(\xi)$ - четная функция. В формуле (15.53) вынесем z из-под знака интеграла и введем вместо $B_\mu(\xi)$ коэффициент корреляции $K_\mu(\xi) = B_\mu(\xi)/\sigma_\mu^2$:

$$\sigma_S^2 = \frac{1}{2} k_\varepsilon^2 \sigma_\mu^2 z \int_0^z \left(1 - \frac{\xi}{z}\right) K_\mu(\xi) d\xi. \quad (15.54)$$

Подынтегральная функция $K_\mu(\xi)$ при $\xi = 0$ равна 1 ($K_\mu(0) = 1$) и быстро убывает до 0 при $\xi \geq l_\mu$, где l_μ - характерный масштаб убывания $K_\mu(\xi)$. С учетом этого оценим интеграл (15.54) в двух предельных случаях.

1. **Короткие трассы или крупные неоднородности** ($z \ll l_\mu$). Так как переменная ξ изменяется в пределах от 0 до z , то выполняется неравенство $\xi \leq z \ll l_\mu$, и под знаком интеграла (15.54) можно положить $K_\mu(\xi) \approx K_\mu(0) = 1$. После этого интеграл легко вычисляется и равен $z/2$:

$$\sigma_S^2 = \frac{1}{4} k_\varepsilon^2 \sigma_\mu^2 z^2. \quad (15.55)$$

2. *Длинные трассы или мелкие неоднородности* ($z \gg l_\mu$, но по-прежнему неоднородности крупные по сравнению с длиной волны - $k_\epsilon l_\mu \gg 1$). С учетом того, что $K_\mu(\xi)$ обращается в нуль при $\xi > l_\mu$, эффективная область интегрирования в (15.54) лежит в пределах $0 \leq \xi < l_\mu \ll z$. При этом интеграл от второго члена в скобках мал, в меру малости параметра $\xi/z \leq l_\mu/z \ll 1$, а для оставшегося первого слагаемого область интегрирования можно расширить до ∞ . Введя согласно определению

$$\int_0^\infty K_\mu(\xi) d\xi = l_\mu \quad (15.56)$$

радиус корреляции неоднородностей l_μ , получим

$$\sigma_S^2 = \frac{1}{2} k_\epsilon^2 \sigma_\mu^2 l_\mu z. \quad (15.57)$$

Схематически зависимость дисперсии флуктуации фазы σ_S^2 от длины пути z , проходимого волной в неоднородной среде, приведена на рис. 15.4.

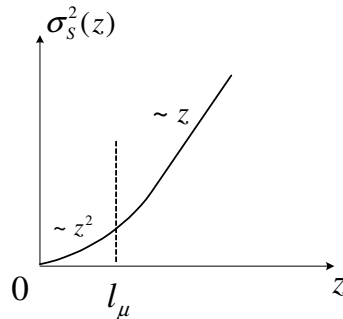


Рис. 15.4.

Качественные оценки

В заключение данного раздела получим некоторые из найденных выше формул при помощи простых рассуждений качественного характера.

Из приближения геометрической оптики следует, что фаза волны, пришедшей в точку наблюдения, равна произведению модуля волнового вектора k на оптическую

длину луча (эйконал) φ : $S = k\varphi$, где φ определяется путем интегрирования показателя преломления n вдоль луча $\vec{R}(s)$, проходящего через точку наблюдения $\vec{R} = (x, y, z)$. Для слабых флуктуаций показателя преломления интегрирование можно приближенно производить вдоль спрямленного луча (см. формулу (15.48) и рис. 15.5).

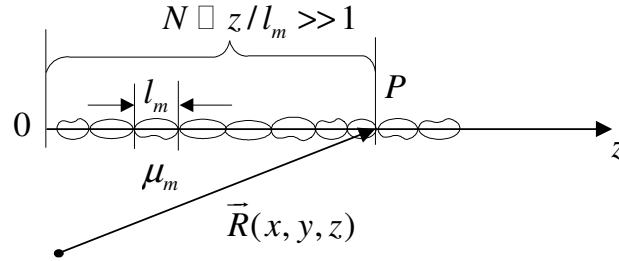


Рис. 15.5.

Предположим, что длина z спрямленного луча намного превосходит характерные размеры неоднородностей l_m ($m = 1, 2, \dots, N$). Это означает, что на луче укладывается достаточно большое количество неоднородностей ($N \approx z/l_m \gg 1$). После прохождения m -й неоднородности происходит набег фазы волны, равный $S_m \approx k\sqrt{\varepsilon} l_m \approx k\sqrt{\bar{\varepsilon}} \left(1 + \frac{\varepsilon_{1m}}{2\bar{\varepsilon}}\right) l_m = k_\varepsilon l_m + \frac{k_\varepsilon}{2} \mu_m l_m$, где $k_\varepsilon = k\sqrt{\bar{\varepsilon}}$, а $\mu_m = \varepsilon_{1m}/\bar{\varepsilon}$ - случайное значение относительной флуктуации. Полная фаза волны S после прохождения всей трассы длиной z представляет собой сумму всех локальных составляющих:

$$S = \sum_{m=1}^N S_m = \sum_{m=1}^N \left(k_\varepsilon l_m + \frac{k_\varepsilon}{2} \mu_m l_m \right). \quad (15.58)$$

С одной стороны, сумма $\sum k_\varepsilon l_m = k_\varepsilon \sum l_m \approx k_\varepsilon N l_m \approx k_\varepsilon z$ - есть ни что иное, как регулярный набег фазы волны \bar{S} вдоль всей трассы, а с другой - слагаемые

$$\delta S_m = \frac{k_\varepsilon}{2} \mu_m l_m \quad (15.59)$$

представляют собой случайные набег фаз на отдельных неоднородностях среды. Величину $S_1 = \sum \delta S_m$ можно рассматривать как сумму (в пределе - интеграл) большого числа $N \approx z/l_m \gg 1$ некоррелированных слагаемых δS_m . Считаем теперь, что все неоднородности приблизительно одинаковые: $\mu_m \approx \mu$ и $l_m \approx 2l_\mu$ (здесь l_μ - по-прежнему характерный масштаб спада автокорреляционной функции $B_\mu(z)$) и, следовательно, величину δS_m можно оценить как

$$\delta S_m \approx \frac{k_\varepsilon}{2} \mu_m l_m \approx k_\varepsilon \mu l_\mu. \quad (15.60)$$

С учетом того, что $\langle \mu \rangle = 0$, средний набег фазы на одной неоднородности $\langle \delta S_m \rangle = 0$. Дисперсия флуктуаций фазы на одной неоднородности приблизительно равна

$$\sigma_{S_m}^2 = \langle (\delta S_m)^2 \rangle \approx k_\varepsilon^2 \langle \mu^2 \rangle l_\mu^2 = k_\varepsilon^2 \sigma_\mu^2 l_\mu^2. \quad (15.61)$$

Между собой случайные набег фазы не коррелируют, поэтому суммарная дисперсия фазы волны после прохождения всей трассы, равна сумме дисперсий на отдельных неоднородностях:

$$\sigma_S^2 = \sum_{m=1}^N \sigma_{S_m}^2 \approx k_\varepsilon^2 \sigma_\mu^2 l_\mu^2 N \approx \frac{k_\varepsilon^2}{2} \sigma_\mu^2 l_\mu z. \quad (15.62)$$

В (15.62) мы учли, что $N \approx z/l_m = z/2l_\mu$. Видно, что в результате качественных рассуждений и оценок мы получили результат, в точности совпавший со строгим расчетом (15.57). На основании центральной предельной теоремы можно утверждать, что $S_1 = \sum \delta S_m$ имеет нормальное распределение.

Еще одну качественную оценку проведем для дисперсии флуктуаций углов прихода лучей в результате многократных преломлений на неоднородностях. В малоугловом приближении вектор нормали $\vec{t} = \vec{\nabla} S / |\vec{\nabla} S| = \vec{\nabla} \varphi / |\vec{\nabla} \varphi|$ к фазовому фронту волны приближенно равен $\vec{t} \approx \vec{t}_0 + \vec{t}_1$, где $\vec{t}_0 = \vec{\nabla} \bar{S} / |\vec{\nabla} \bar{S}|$ - регулярный вектор, а $\vec{t}_1 = \vec{\nabla}_\perp S_1 / k_\varepsilon$ - случайная малая добавка, ортогональная к невозмущенному направлению луча \vec{t}_0 (см. (15.22)). С учетом

представления $S_1 = \sum \delta S_m$, где δS_m определяется формулой (15.59), случайное результирующее отклонение луча \vec{t}_1 также может быть представлено в виде суммы:

$$\vec{t}_1 = \sum_{m=1}^N \delta \vec{t}_m, \quad (15.63)$$

где $\delta \vec{t}_m \approx \frac{\vec{\nabla}_\perp (\delta S_m)}{k_\varepsilon} \approx \frac{l_m}{2} \vec{\nabla}_\perp \mu_m \approx l_\mu \vec{\nabla}_\perp \mu$ - характерная величина случайного угла отклонения на m -й неоднородности. С учетом того, что $\langle \mu \rangle = 0$, получаем $\langle \delta \vec{t}_m \rangle = 0$ и, следовательно, $\langle \vec{t}_1 \rangle = 0$. С учетом некоррелированности отдельных актов преломлений, суммарная дисперсия угла отклонения луча $\sigma_t^2 = \langle \vec{t}_1^2 \rangle$ от его первоначального направления \vec{t}_0 равна сумме дисперсий $\sigma_{t_m}^2$: $\sigma_t^2 = \sum \sigma_{t_m}^2 \approx \sigma_{t_m}^2 N$, где

$$\sigma_{t_m}^2 = \langle \delta \vec{t}_{1m}^2 \rangle \approx \frac{l_m^2}{4} \langle (\vec{\nabla}_\perp \mu_m)^2 \rangle = l_\mu^2 \langle (\vec{\nabla}_\perp \mu)^2 \rangle. \quad (15.64)$$

Воспользовавшись оценкой, справедливой для изотропного поля флуктуаций,- $\langle (\vec{\nabla}_\perp \mu)^2 \rangle \approx \langle \mu^2 \rangle / l_\mu^2 = \sigma_\mu^2 / l_\mu^2$ и учитывая, что $N \approx z / 2l_\mu$, окончательно получим

$$\sigma_t^2 \approx \frac{\sigma_\mu^2}{2l_\mu} z. \quad (15.65)$$

15.6. Область применимости метода геометрической оптики

1. Одно из условий применимости МГО состоит в **требовании плавности изменения параметров среды:**

$$l_\mu \gg \lambda. \quad (15.66)$$

2. **Формулы МГО не учитывают дифракционных эффектов.** Возможность такого пренебрежения покажем на примере следующего качественного рассуждения. Если

неоднородность среды μ с характерным размером l_μ освещается плоской волной, то размер её геометрической “тени” не зависит от расстояния и равен l_μ (см. рис 15.6).

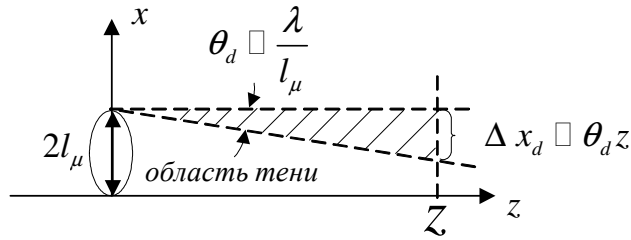


Рис. 15.6.

Дифракция же волны приводит к “расплыванию” резких границ тени. Размер Δx_d переходной области свет-тень на удалении z от неоднородности можно приближенно оценить как $\Delta x_d \approx \theta_d z$, где $\theta_d \approx \lambda/l_\mu$ - угол дифракции волны. Пренебрежение дифракцией возможно только при условии, что размер дифракционной области Δx_d существенно мал по сравнению с размером области геометрической тени l_μ . В результате получаем условие $\Delta x_d \ll l_\mu$, которое приводится к виду $\sqrt{\lambda z} \ll l_\mu$. Таким образом, **размер первой зоны Френеля** ($\sqrt{\lambda z}$) **должен быть намного меньше характерного размера неоднородности l_μ** :

$$\sqrt{\lambda z} \ll l_\mu. \quad (15.67)$$

3. Применяя метод возмущений для расчета флуктуаций фазы и амплитуды волны, мы использовали малость флуктуаций показателя преломления среды: $\sigma_\varepsilon \ll \bar{\varepsilon}$, ($\sigma_\mu \ll 1$), и ограничились лишь линейным приближением, отбрасывая слагаемые второго порядка малости относительно σ_ε . Условия, при которых можно пренебречь членами второго порядка малости, сводятся к требованию **малости дисперсии уровня амплитуды** $\chi = \ln(A/\hat{A})$:

$$\sigma_\chi^2 = \langle (\chi - \bar{\chi})^2 \rangle \ll 1, \quad (15.68)$$

что эквивалентно (при малых σ_χ) условию $\sigma_A \ll \bar{A}$. Заметные флуктуации уровня χ наступают, очевидно, там, где лучи начинают пересекаться и образуют случайные фокусы и каустики. Таким образом, **МГО перестает работать вблизи фокальных образований.**

4. Следующее условие связано с **требованием однолучевости** (мы, по сути, пренебрегли искривлением лучей и возможностью прихода в точку наблюдения не одного, а нескольких лучей). Кроме того, в результате многократных преломлений на неоднородностях возможно отклонение луча на большие углы \vec{i} относительно первоначального направления \vec{i}_0 и даже появление лучей, распространяющихся в обратном направлении. Требование малости характерных углов рассеяния (к которому сводится и условие однолучевости, и возможность пренебрежения обратным рассеянием) с учетом полученной ранее оценки (15.65) можно записать в виде неравенства

$$\sigma_i^2 \approx \sigma_\mu^2 \frac{z}{2l_\mu} \ll 1. \quad (15.69)$$

При решении конкретной задачи в приближениях МГО или МПВ необходимо следить за тем, чтобы мы не выходили за рамки области применимости этих методов. В зависимости от вида $\varepsilon(\vec{R})$ и геометрии задачи превалирующим среди четырех вышеуказанных требований может быть то или иное. Например, в оптическом диапазоне ($\lambda \approx 5 \cdot 10^{-5} \text{ см}$) для атмосферы Земли наиболее критичным является требование 2. Условие $\sqrt{\lambda z} \ll l_\mu$ выполняется лишь для дистанций $z \leq 200 \text{ м}$.

Комментарии

Линейная зависимость σ_S^2 от z в рассматриваемом случае $z \gg l_\mu$ является результатом сложения большого числа некоррелированных между собой набегов фазы δS_m на каждой неоднородности. Если формально рассматривать z не как пространственную координату, а как время t , то характер зависимости $\sigma_S^2 \sim t$, как мы видели в предыдущих параграфах, является признаком диффузионных процессов. По этому же закону зависит от времени дисперсия флуктуации координаты x броуновской частицы $\sigma_x^2 \sim t$ (9.37) и дисперсия σ_φ^2 флуктуаций фазы в автогенераторе как функция "медленного" времени θ (12.53-6). Хотя эти процессы имеют совершенно различную физическую природу, все они описываются очень похожими динамическими уравнениями.

ЗАДАЧИ

1. Коэффициент корреляции флуктуаций показателя преломления имеет гауссову форму

$$K_{\mu}(\rho) = e^{-\rho^2/l_{\mu}^2}, \quad (1)$$

где $\vec{\rho} = \vec{R}' - \vec{R}''$ - трехмерный разностный вектор. Рассчитать дисперсию флуктуаций фазы σ_S^2 и показать, что на малых трассах $\sigma_S^2 \sim z^2$, а на больших - $\sigma_S^2 \sim z$.

Решение. Воспользуемся формулой (15.54) для дисперсии флуктуаций фазы, в которой $K_{\mu}(\xi) = K_{\mu}(\rho_x = 0, \rho_y = 0, \rho_z = \xi) = K_{\mu}(0, 0, \xi)$ - коэффициент корреляции (нормированная корреляционная функция), рассматриваемый в совмещенных точках ($x' = x''$, $y' = y''$) в поперечном к лучу направлении и в разнесенных ($\xi = \rho_z = z' - z''$) - в продольном (вдоль луча). Согласно определению (1) имеем

$$K_{\mu}(\xi) = \exp\left\{-\frac{\xi^2}{l_{\mu}^2}\right\}. \quad (2)$$

С учетом (2) формула (15.54) принимает вид

$$\begin{aligned} \sigma_S^2(z) &= \frac{k_{\varepsilon}^2 z \sigma_{\mu}^2}{2} \int_0^z \left(1 - \frac{\xi}{z}\right) e^{-\xi^2/l_{\mu}^2} d\xi = \\ &= \frac{k_{\varepsilon}^2 z \sigma_{\mu}^2}{2} \left[\int_0^z e^{-\xi^2/l_{\mu}^2} d\xi - \int_0^z \frac{\xi}{z} e^{-\xi^2/l_{\mu}^2} d\xi \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Первый интеграл в (3) после замены переменных $x = \xi/l_{\mu}$ приводится к стандартному виду интеграла вероятностей:

$$\int_0^z e^{-\xi^2/l_{\mu}^2} d\xi = l_{\mu} \int_0^{z/l_{\mu}} e^{-x^2} dx = l_{\mu} \Phi(z/l_{\mu}). \quad (4)$$

Второй интеграл легко вычисляется

$$\frac{1}{z} \int_0^z \xi e^{-\xi^2/l_\mu^2} d\xi = \frac{l_\mu^2}{z} \int_0^{z/l_\mu} x e^{-x^2} dx = \frac{l_\mu^2}{2z} \int_0^{z^2/l_\mu^2} e^{-t} dt = \frac{l_\mu^2}{2z} (1 - e^{-z^2/l_\mu^2}). \quad (5)$$

Следовательно,

$$\sigma_s^2(z) = \frac{k_\varepsilon^2 \overline{\mu^2} z}{2} l_\mu \left[\Phi(z/l_\mu) - \frac{l_\mu}{2z} (1 - e^{-z^2/l_\mu^2}) \right]. \quad (6)$$

Проанализируем данное выражение для двух предельных случаев.

I. *Короткие трассы* ($z/l_\mu \ll 1$).

Согласно (4) для малых значений аргумента интеграл вероятностей можно приближенно записать как

$$\Phi(z/l_\mu) \approx \int_0^{z/l_\mu} (1 - x^2) dx = \frac{z}{l_\mu} - \frac{1}{3} \left(\frac{z}{l_\mu} \right)^3 \approx z/l_\mu. \quad (7)$$

Второе слагаемое (5) также может быть упрощено и приводится к виду

$$\frac{l_\mu}{2z} (1 - e^{-z^2/l_\mu^2}) \approx \frac{l_\mu}{2z} (1 - 1 + z^2/l_\mu^2) = z/2l_\mu. \quad (8)$$

С учетом (7) и (8), для коротких трасс получаем следующее значение дисперсии:

$$\sigma_s^2(z) \approx \frac{k_\varepsilon^2 z \overline{\sigma_\mu^2}}{2} \left(z - \frac{z}{2} \right) = \frac{k_\varepsilon^2 \overline{\sigma_\mu^2}}{4} z^2, \quad (9)$$

т.е. $\sigma_s^2 \sim z^2$.

II. *Длинные трассы* ($z \gg l_\mu$).

При $z \gg l_\mu$ интеграл вероятностей $\Phi(z/l_\mu)$ в (6) можно заменить его предельным значением, когда $z/l_\mu \rightarrow \infty$. При этом $\Phi(z/l_\mu)$ переходит в интеграл Пуассона, который

равен $\sqrt{\pi}/2$. С другой стороны, в (6) можно пренебречь экспонентой ($e^{-z^2/l_\mu^2} \approx 0$). В результате выражение (6) для дисперсии флуктуаций фазы принимает вид

$$\sigma_S^2(z) \approx \frac{k_\varepsilon^2 \sigma_\mu^2 l_\mu}{2} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{l_\mu}{2z} \right) z \approx \frac{\sqrt{\pi} k_\varepsilon^2 \sigma_\mu^2 l_\mu}{4} z.$$

2. Определить зависимость от длины трассы z дисперсии флуктуаций фазы $\sigma_S^2(z)$ плоской волны, распространяющейся в неоднородной статистически изотропной среде с коэффициентом корреляции флуктуаций показателя преломления вида

$$K_\mu(\bar{\rho}) = \left(1 + \frac{\rho^2}{l_\mu^2} \right)^{-1}.$$

Исследовать предельные случаи при:

а) $z \ll l_\mu$ (короткие трассы); б) $z \gg l_\mu$ (длинные трассы).

Ответ:

$$\sigma_S^2(z) = \frac{k_\varepsilon^2 \sigma_\mu^2 l_\mu z}{2} \left[\operatorname{arctg} \frac{z}{l_\mu} - \frac{l_\mu}{2z} \ln \left(1 + \frac{z^2}{l_\mu^2} \right) \right]$$

$$\text{а) } \sigma_S^2(z) \approx \frac{k_\varepsilon^2 \sigma_\mu^2}{4} z^2, \quad z \ll l_\mu,$$

$$\text{б) } \sigma_S^2(z) \approx \frac{\pi k_\varepsilon^2 \sigma_\mu^2 l_\mu}{4} z, \quad z \gg l_\mu.$$

§ 16. Флуктуации показателя преломления в турбулентной атмосфере

Из предыдущих разделов видно, что решение задач о рассеянии волн на случайных неоднородностях показателя преломления среды или о флуктуациях их параметров при распространении в случайных средах (как в теории возмущений, так и в приближении геометрической оптики) выражается либо через автокорреляционную функцию флуктуаций показателя преломления $B_\mu(\vec{\rho})$, либо через её пространственный энергетический спектр $S_\mu(\vec{\chi})$. Определение явного вида этих функций, вообще говоря, выходит за пределы того круга вопросов, которые решаются статистической радиофизикой, а являются предметом исследования статистической гидромеханики или газодинамики (если речь идет о распространении волн в жидкости или газе, состоящем из нейтральных молекул). Если же речь идет об ионосферной или космической плазме - статистической теории движений в ионизированных средах, и т.д. Есть, однако, довольно широко распространенный тип случайно-неоднородных сред, в которых функции $B_\mu(\vec{\rho})$ и $S_\mu(\vec{\chi})$ имеют универсальный вид, практически не зависящий от конкретных физических параметров среды, а определяющийся только общим характером их движений. Речь идет о таком достаточно часто встречающемся явлении как **турбулентность** - состоянии сплошной среды (газа, жидкости, плазмы), при котором локальные параметры ее движения (скорость, давление, температура и т.д.) являются быстро и нерегулярно изменяющимися в пространстве и во времени величинами. При этом оказывается, что чем сложнее и хаотичнее это движение, тем более адекватным является его статистическое описание, которое оказывается универсальным для сплошных сред совершенно различной физической природы. Турбулентные движения в природе встречаются довольно часто, и каждый их наблюдал неоднократно. Так, движение воды в реке, по мере увеличения его скорости, из плавного и спокойного на равнинных участках переходит в бурное, хаотическое на быстринах, обусловленных либо увеличением уклона, либо сужением реки. Увеличение скорости движения приводит к разрушению плавного (ламинарного) движения, появлению характерных завихрений различных масштабов от крупных водоворотов до малых пульсаций, проявляющихся в виде небольших воронок на поверхности. Движение воздушных масс в земной атмосфере также сопровождается появлением подобных вихревых структур. Хотя мы и не можем непосредственно наблюдать за движением воздушных масс, однако присутствующие в них в виде "примеси" сконденсировавшиеся пары воды, которые мы видим как облака

либо ключья тумана, дают возможность судить об очень сложном характере этого движения (форма облаков, их быстрая и хаотическая изменчивость, характерные вихревые структуры - все это является признаком турбулентного движения). В этом параграфе мы на качественном уровне без строгих доказательств познакомимся с основными физическими идеями, лежащими в основе описания турбулентности, которая и является основной причиной флуктуаций показателя преломления среды.

16.1. Уравнение Навье - Стокса

Для конкретности рассмотрим движение жидкости (или газа), имеющей объемную плотность ρ_0 . Движение единичного объема среды, масса которого равна ρ_0 , подчиняется второму закону Ньютона:

$$\rho_0 \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}, \quad (16.1)$$

где $\vec{V} = \vec{V}(\vec{R}, t)$ - скорость движения единичного объема среды в точке \vec{R} в момент времени t , а $\vec{F} = \vec{F}(\vec{R}, t)$ - сила, действующая на этот объем со стороны окружающей жидкости:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}p + \gamma \Delta \vec{V}. \quad (16.2)$$

Здесь p - давление, $\vec{\nabla}$ и Δ - соответственно операторы градиента и Лапласа, а γ - коэффициент динамической вязкости. Первое слагаемое в правой части (16.2) - равнодействующая всех сил давления p на рассматриваемый элемент объема, а второе - силы внутреннего трения, возникающие за счет вязкости жидкости, когда соприкасающиеся объемы движутся с разными скоростями. В левой части исходной формулы (16.1) стоит скорость $\vec{V} = \vec{V}(\vec{R}, t)$ элементарного объема среды, который движется в пространстве по траектории, определяемой уравнением $\vec{R} = \vec{R}(t)$. Скорость \vec{V} зависит от времени t двояким образом: во-первых, из-за нестационарности среды в каждой фиксированной точке пространства \vec{R} скорость может зависеть от времени t явным образом; во-вторых, так как рассматриваемый объем перемещается в пространстве по траектории $\vec{R} = \vec{R}(t)$, скорость может быть различной на разных участках траектории даже в случае стационарного течения, когда явная зависимость \vec{V} от t отсутствует.

Поэтому полную производную $d\vec{V}/dt$ в левой части уравнения (16.1) можно записать в виде

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \frac{\partial\vec{V}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial\vec{V}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial\vec{V}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\vec{\nabla})\vec{V}, \quad (16.3)$$

где $\vec{V} = d\vec{R}/dt$. Подставляя (16.2) и (16.3) в (16.1), получаем **уравнение Навье - Стокса**:

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} = -\frac{\vec{\nabla}p}{\rho_0} - (\vec{V}\vec{\nabla})\vec{V} + \nu\Delta\vec{V}. \quad (16.4)$$

При переходе от (16.1) к (16.4) мы разделили обе части уравнения на плотность жидкости ρ_0 и ввели кинематическую вязкость среды $\nu = \gamma/\rho_0$.

Таким образом, движение элемента объема жидкости с единичной массой описывается уравнением (16.4). Слагаемое $(\vec{V}\vec{\nabla})\vec{V}$ в правой части можно рассматривать как своеобразную силу, возникающую за счет неравномерности движения, вызванного, например, искривлением траектории, - это так называемая **сила инерции**, которая является причиной неустойчивости движения - преобразования крупномасштабных движений в мелкомасштабные. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим преобразование любой пространственной гармонике Фурье поля скоростей $V \sim \sin(\chi x)$. с характерным пространственным масштабом $l_\chi \approx 2\pi/\chi$. Очевидно, что $|\vec{\nabla}V| \sim \chi \cos(\chi x)$, так что возникающая сила инерции $|(\vec{V}\vec{\nabla})\vec{V}| \sim \chi \sin(\chi x) \cos(\chi x) \sim \sin(2\chi x)$ имеет вдвое меньший пространственный масштаб - $l'_\chi \approx 2\pi/2\chi = l_\chi/2$. Под действием этой силы, согласно уравнению (16.4), возникают движения с тем же ($\sim l_\chi/2$) пространственным масштабом скорости V , которые, в свою очередь, преобразуются в еще более мелкие ($\sim l_\chi/4$) и т.д. Так как турбулентное движение имеет вихревой характер, то речь, по сути, идет о дроблении вихрей на все более мелкие. Этот процесс продолжается до тех пор, пока сила инерции $(\vec{V}\vec{\nabla})\vec{V}$ не станет равна **силе вязкого трения** $\nu\Delta\vec{V}$, которая препятствует дальнейшему дроблению вихрей и, таким образом, стабилизирует движение. Отношение этих двух сил называется **числом Рейнольдса**:

$$\text{Re} = \frac{|(\vec{v}\vec{v})\vec{v}|}{\nu|\Delta\vec{v}|}. \quad (16.5)$$

Если для оценок принять $|(\vec{v}\vec{v})\vec{v}| \sim V^2/l_V$, а $|\Delta\vec{v}| \sim V/l_V^2$, где l_V - характерный линейный масштаб изменения скорости \vec{V} движения среды, то число Рейнольдса можно записать в виде

$$\text{Re} = \frac{|(\vec{v}\vec{v})\vec{v}|}{\nu|\Delta\vec{v}|} \sim \frac{V^2/l_V}{\nu V/l_V^2} = \frac{Vl_V}{\nu}. \quad (16.6)$$

Когда $\text{Re} \gg 1$, т.е. силы инерции намного больше сил трения, движение является по указанным выше причинам неустойчивым, возникает турбулентность. В обратном предельном случае, когда $\text{Re} \ll 1$, силы вязкости превышают силы инерции и не дают возможности развиться неустойчивостям, приводящим к дроблению крупномасштабных движений на более мелкомасштабные - движение является ламинарным. В реальных условиях турбулентность возникает только при достаточно больших значениях числа Рейнольдса $\text{Re} = 100 \div 1000$.

Обозначим через L максимальный линейный размер системы (диаметр трубы или глубина канала, по которым течет жидкость; толщина атмосферы или высота точки наблюдения над границей раздела и т.д.). При больших значениях $\text{Re} = VL/\nu \gg 1$ крупномасштабные движения преобразовываются в вихри все меньших размеров (возникает так называемая иерархия вихрей). По мере уменьшения их линейных размеров уменьшается и число Рейнольдса. Минимальный размер вихря l_0 , оцениваемый из условия $\text{Re} = Vl_0/\nu \sim 1$, называют внутренним масштабом турбулентности, а L - внешним. Обычно они отличаются на много порядков, так что практически всегда существует область размеров l_V , удовлетворяющих условию $L \gg l_V \gg l_0$. В этом интервале силы инерции преобладают над силами вязкости; его так и называют "инерционный интервал", в отличие от "вязкого интервала", когда $l_V < l_0$.

16.2. Структурная функция скорости. Закон Обухова - Колмогорова

В турбулентном потоке скорость $\vec{V}(\vec{R}, t)$ является случайной функцией трех

пространственных координат $\vec{R} = (x, y, z)$ и времени t , Можно предположить, что в интервале масштабов $l_v \ll L$ поле скоростей $\vec{V}(\vec{R}, t)$ является статистически однородным и изотропным по пространственным переменным (**гипотеза Обухова - Колмогорова**), так что его структурная функция

$$\langle [\vec{V}(\vec{R}_1) - \vec{V}(\vec{R}_2)]^2 \rangle = D_V(\vec{R}_1, \vec{R}_2) = D_V(|\vec{R}_1 - \vec{R}_2|) \quad (16.7)$$

является универсальной функцией только расстояния $\rho = |\vec{R}_1 - \vec{R}_2|$ между двумя пространственно разнесенными точками: $D_V = D_V(\rho)$.

Оказывается, что явный вид этой функции может быть установлен с помощью теории размерностей. Наряду с параметром ν , имеющим размерность $[\nu] = \text{см}^2/\text{сек}$, турбулентное движение характеризуется также скоростью передачи кинетической энергии единичной массы ($w = V^2/2$) от крупных вихрей - к мелким: $\eta = dw/dt$. Кинетическая энергия единичной массы имеет размерность $[w] = \text{см}^2/\text{с}^2$, а скорость ее изменения $[\eta] = [dw/dt] = \text{см}^2/\text{с}^3$. Из двух параметров ν и η можно составить две величины с размерностью скорости: $V_0 = (\nu\eta)^{1/4}$ и длины $l_0 = \nu/V_0 = (\nu^3/\eta)^{1/4}$. В самом общем виде структурная функция $D_V(\rho)$ может быть представлена в виде

$$D_V(\rho) = aV_0^2 f\left(\frac{\rho}{l_0}\right) = a(\nu\eta)^{1/2} f\left(\frac{\eta^{1/4}}{\nu^{3/4}}\rho\right), \quad (16.8)$$

где a - безразмерная постоянная, а f - безразмерная функция безразмерного аргумента $x = \rho/l_0$.

В инерционном интервале масштабов $L \gg l_v \gg l_0$ силы инерции намного превышают силы вязкости, которыми поэтому можно вообще пренебречь, ибо они не могут сколько-нибудь существенно изменить характер движения. Это значит, что $D_V(\rho)$ не должна зависеть от ν . Для того чтобы в формуле (16.8) исчезла зависимость от ν , необходимо, чтобы $f(x) \propto x^{2/3}$ (безразмерную константу в качестве общего множителя можно включить в a). В результате из (16.8) следует:

$$D_V(\rho) = a\eta^{2/3} \rho^{2/3} \equiv C_V^2 \rho^{2/3}. \quad (16.9)$$

Полученная зависимость $D_V(\rho)$ носит название "**закона двух третей**" или **закона Обухова - Колмогорова**. Таким образом, единственным параметром, описывающим турбулентность в инерционном интервале масштабов ($L \gg l_V \gg l_0$) является, так называемая **структурная постоянная** $C_V^2 = a\eta^{2/3}$, величина которой зависит только от скорости η передачи энергии от больших вихрей к маленьким.

Так называемый "**вязкий интервал**" характеризуется небольшими пространственными масштабами $\rho \ll l_0$. При $\rho \rightarrow 0$ структурная функция $D_V(\rho)$, согласно определению (16.7), должна обращаться в нуль, являясь при этом четной функцией расстояния ρ . Это означает, что разложение функции $f(x)$ по степеням x при $x \rightarrow 0$ должно начинаться в общем случае с членов $\sim x^2$, т.е.

$$D_V(\rho) = aV_0^2 \frac{\rho^2}{l_0^2} = C_V^2 l_0^{-4/3} \rho^2, \quad (\rho \ll l_0). \quad (16.10)$$

Наконец, при $\rho > L$ корреляция между значениями скорости в точках, удаленных друг от друга на предельно большие расстояния, должна убывать, так что (ср. с (5.30))

$$D_V(\rho) = 2\sigma_V^2, \quad (\rho > L). \quad (16.11)$$

Схематически график функции $D_V(\rho)$ изображен на рис. 16.1 в соответствии с формулами (16.9), (16.10) и (16.11).

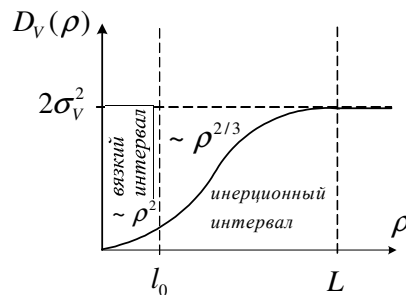


Рис. 16.1.

16.3. Структурная функция и пространственный энергетический спектр показателя преломления

Значение показателя преломления n сплошной среды определяется ее термодинамическими параметрами: $n = n(p, T, e_1, e_2 \dots)$, где p - давление, T - температура, e_m - концентрация примесей разных сортов. Например, для показателя преломления чистого воздуха имеет место эмпирическая формула:

$$n - 1 = 10^{-6} \frac{79}{T} \left(p + \frac{4800}{T} e \right). \quad (16.12)$$

Здесь $[T] = K$ - температура, $[p] = \text{мбар}$ - давление, $[e] = \text{мбар}$ - давление водяных паров. Все входящие в формулу (16.12) параметры можно рассматривать как "пассивные" примеси, которые не оказывают никакого влияния на развитие турбулентности, а только перемешиваются полем скоростей $\vec{V}(\vec{R})$. Это означает, что структурные функции параметров с точностью до постоянных множителей должны совпадать со структурной функцией флуктуации скорости $D_V(\rho)$. В частности, структурная функция показателя преломления $n(\vec{R})$ должна описываться теми же законами, что и $D_V(\rho)$:

$$D_n(\rho) = \langle [n(\vec{R} + \vec{\rho}) - n(\vec{R})]^2 \rangle = \begin{cases} C_n^2 l_0^{-4/3} \rho^2, & \rho \ll l_0; \\ C_n^2 \rho^{2/3}, & L \gg l_n \gg l_0; \\ 2\sigma_n^2, & l_n > L. \end{cases} \quad (16.13)$$

В формулы борновского приближения для средней интенсивности и индикатрисы рассеяния волн на флуктуациях показателя преломления δn (см. § 14) входят не сами структурные или корреляционные функции показателя преломления, а их пространственные энергетические спектры. Для того чтобы выяснить, какой пространственный спектр соответствует структурной функции вида (16.13), предположим сначала, что существует автокорреляционная функция

$$B_n(\vec{\rho}) = \langle \delta n(\vec{R} + \vec{\rho}) \delta n(\vec{R}) \rangle, \quad (16.14)$$

которой соответствует пространственный спектр (см. (13.27)):

$$S_n(\vec{\chi}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} B_n(\vec{\rho}) e^{-i\vec{\chi}\vec{\rho}} d\vec{\rho}. \quad (16.15)$$

В свою очередь, в соответствии с формулой Винера - Хинчина $B_n(\vec{\rho})$ можно представить в виде

$$B_n(\vec{\rho}) = \int_{-\infty}^{\infty} S_n(\vec{\chi}) e^{i\vec{\chi}\vec{\rho}} d\vec{\chi}. \quad (16.16)$$

Для статистически однородных полей структурная функция $D_n(\vec{\rho})$ может быть выражена через автокорреляционную $B_n(\vec{\rho})$ и дисперсию $\sigma_n^2 = B_n(0)$ (ср. с (5.29)):

$$D_n(\vec{\rho}) = 2 \left[\sigma_n^2 - B_n(\vec{\rho}) \right]. \quad (16.17)$$

Подставляя сюда (16.16), получаем

$$D_n(\vec{\rho}) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 - e^{i\vec{\chi}\vec{\rho}} \right] S_n(\vec{\chi}') d\vec{\chi}'. \quad (16.18)$$

Для того чтобы обратить эту формулу, т.е. выразить $S_n(\vec{\chi})$ через $D_n(\vec{\rho})$, необходимо свести её к виду преобразования Фурье. С этой целью продифференцируем равенство (16.18) по $\vec{\rho}$:

$$\vec{\nabla}_{\vec{\rho}} D_n(\vec{\rho}) = -2i \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\chi}' e^{i\vec{\chi}'\vec{\rho}} S_n(\vec{\chi}') d\vec{\chi}'. \quad (16.19)$$

Умножим обе части этой формулы на $\vec{\chi} e^{-i\vec{\chi}\vec{\rho}}$ и проинтегрируем по $d\vec{\rho}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\bar{\chi}\bar{\rho}} (\bar{\chi} \bar{\nabla}_{\bar{\rho}}) D_n(\bar{\rho}) d\bar{\rho} = \quad (16.20)$$

$$= -2i \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{\chi}\bar{\chi}') S_n(\bar{\chi}') d\bar{\chi}' \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\bar{\chi}'-\bar{\chi})\bar{\rho}} d\bar{\rho} = -i16\pi^3 \chi^2 S_n(\bar{\chi}).$$

При этом мы воспользовались определением трехмерной δ - функции:

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\bar{\chi}'-\bar{\chi})\bar{\rho}} d\bar{\rho} = \delta(\bar{\chi}'-\bar{\chi}).$$

Из (16.20) следует, что

$$S_n(\bar{\chi}) = \frac{i}{16\pi^3 \chi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\bar{\chi}\bar{\rho}} (\bar{\chi} \bar{\nabla}_{\bar{\rho}}) D_n(\bar{\rho}) d\bar{\rho}. \quad (16.21)$$

Для статистически однородного и изотропного поля $D_n(\bar{\rho}) = D_n(\rho)$, так что $\bar{\nabla}_{\bar{\rho}} D_n(\rho) = \frac{dD_n(\rho)}{d\rho} \bar{\nabla}_{\bar{\rho}} \bar{\rho} = \frac{dD_n(\rho)}{d\rho} \frac{\bar{\rho}}{\rho}$. При этом интеграл (16.21) удобней вычислять в сферических координатах $\bar{\rho} = (\rho, \theta_\rho, \varphi_\rho)$, где θ_ρ отсчитывается от полярной оси, направленной вдоль вектора $\bar{\chi}$ (рис. 16.2).

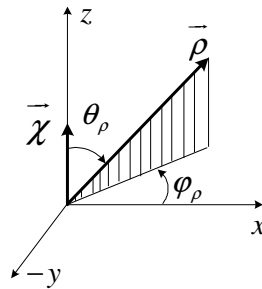


Рис. 16.2.

Учитывая, что в выбранной системе координат элементарный объем записывается в виде $d\bar{\rho} = \rho^2 \sin \theta_\rho d\rho d\theta_\rho d\varphi_\rho$, а $\bar{\chi} \bar{\rho} = \chi \rho \cos \theta_\rho$, получим

$$S_n(\bar{\chi}) = \frac{i}{16\pi^3 \chi} \int_0^\infty \rho^2 \frac{dD_n(\rho)}{d\rho} d\rho \int_0^\pi e^{-i\chi\rho \cos\theta_\rho} \cos\theta_\rho \sin\theta_\rho d\theta_\rho \int_0^{2\pi} d\varphi_\rho. \quad (16.22)$$

Интеграл по $d\varphi_\rho$ равен 2π , а интегрирование по $d\theta_\rho$ легко производится с помощью замены переменных $\xi = \cos\theta_\rho$:

$$\int_0^\pi e^{-i\chi\rho \cos\theta_\rho} \cos\theta_\rho \sin\theta_\rho d\theta_\rho = \int_{-1}^1 e^{-i\chi\rho\xi} \xi d\xi = 2i \frac{\chi\rho \cos\chi\rho - \sin\chi\rho}{(\chi\rho)^2}. \quad (16.23)$$

Подставляя (16.23) в (16.22), получим

$$S_n(\bar{\chi}) = \frac{1}{(2\pi)^2 \chi^3} \int_0^\infty (\sin\chi\rho - \chi\rho \cos\chi\rho) \frac{dD_n(\rho)}{d\rho} d\rho = S_n(\chi). \quad (16.24)$$

Таким образом, для статистически изотропного поля флуктуаций показателя преломления энергетический спектр зависит только от модуля волнового числа $\bar{\chi}$: $S_n(\bar{\chi}) = S_n(\chi)$.

Аналогичным образом, учитывая, что для изотропных флуктуаций $S_n(\bar{\chi}) = S_n(\chi)$, можно переписать и формулу (16.18):

$$D_n(\rho) = 8\pi \int_0^\infty \left(1 - \frac{\sin\chi\rho}{\chi\rho}\right) S_n(\chi) \chi^2 d\chi. \quad (16.25)$$

Построение спектра Кармана

Используем теперь формулы (16.24) и (16.25) для определения энергетического спектра $S_n(\chi)$ по заданному распределению $D_n(\rho)$ в виде (16.13).

1. Предположим вначале, что структурная функция $D_n(\rho)$ подчиняется закону двух третей на всем интервале изменений ρ :

$$D_n(\rho) = C_n^2 \rho^{2/3}, \quad \rho \geq 0.$$

Подставляя эту зависимость $D_n(\rho)$ в формулу (16.24) и произведя замену переменных $\zeta = \chi\rho$, получим

$$S_n(\chi) = \frac{2C_n^2}{3(2\pi)^2 \chi^{11/3}} \int_0^\infty \frac{d\zeta}{\zeta^{1/3}} (\sin \zeta - \zeta \cos \zeta). \quad (16.26)$$

Интеграл по $d\zeta$ является табличным и выражается через Гамма - функцию Эйлера - $\Gamma(z)$, так что в результате имеем

$$S_n(\chi) = \frac{\Gamma(4/3) \sin(\pi/3)}{4\pi^2} C_n^2 \chi^{-11/3}. \quad (16.27)$$

Учитывая, что $\Gamma(4/3) \approx 0,893$, окончательно получим

$$S_n(\chi) = 0,033 C_n^2 \chi^{-11/3}. \quad (16.28)$$

2. Как уже отмечалось выше, при малых ρ флуктуации мелких масштабов ($\rho < l_0$) подавляются силами вязкости и структурная функция должна быть пропорциональной ρ^2 : $D_n(\rho) \propto \rho^2$. Энергетический спектр $S_n(\chi)$, соответствующий этому интервалу пространственных частот ($\chi > 2\pi/l_0$), можно получить, “подправив” соответствующим образом зависимость (16.28). Так, из (16.25) видно, что при $\chi\rho \ll 1$ под знаком интеграла мы можем получить зависимость $\sim \rho^2$:

$$1 - \frac{\sin \chi\rho}{\chi\rho} \approx \frac{1}{3} (\chi\rho)^2 \sim \rho^2.$$

Чтобы эта зависимость сохранилась и для всего интеграла, необходимо подавить в спектре (16.27) высокие пространственные частоты χ . Подавление высоких частот

($\chi > 2\pi/l_0$), соответствующих вязкому интервалу ($\rho < l_0$), можно осуществить введением экспоненциального множителя (“режущего” фактора): $\exp\{-\chi^2/\chi_m^2\}$, где $\chi_m = 5,92/l_0$. В результате получим следующий подправленный вид спектра:

$$S_n(\chi) \approx 0,033 C_n^2 \chi^{-11/3} \exp\{-\chi^2/\chi_m^2\}. \quad (16.29)$$

3. В области больших масштабов турбулентностей ($\rho \geq L$), по-видимому, отсутствует универсальный закон поведения спектра. Неограниченное возрастание спектра (16.29) при $\chi \rightarrow 0$ предполагает существование вихрей со сколь угодно большими размерами вихрей. Ясно, что при этом мы выходим за внешний масштаб турбулентности L , и возрастание спектра на малых пространственных частотах $\chi \leq \chi_0 = 2\pi/L$ должно прекратиться. Обычно для ограничения роста $S_n(\chi)$ при $\chi \rightarrow 0$ используют следующий прием: заменяют множитель $\chi^{-11/3}$ в формуле (16.29) на $(\chi^2 + \chi_0^2)^{-11/6}$, где $\chi_0 = 2\pi/L$. В результате мы приходим к окончательному виду спектра:

$$S_n(\chi) \approx \frac{0,033 C_n^2}{(\chi^2 + \chi_0^2)^{11/6}} \exp\{-\chi^2/\chi_m^2\}, \quad (16.30)$$

который называется **спектром Кармана**.

Таким образом, спектр Кармана совпадает со спектром Обухова – Колмогорова (16.28) в инерционном интервале ($\chi_0 \ll \chi \ll \chi_m$), экспоненциально затухает в вязком интервале ($\chi > \chi_m$) и остается ограниченным на малых пространственных частотах ($\chi < \chi_0$). Найденная зависимость (16.30), вид которой показан на рис. 16.3, достаточно хорошо описывает пространственный спектр турбулентных флуктуаций во многих задачах радиофизики.

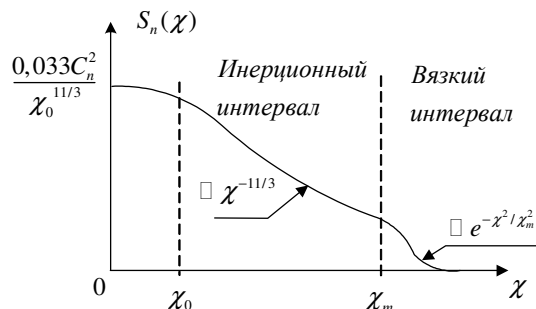


Рис. 16.3.

§ 17. Метод фазового экрана

Достаточно большое количество проблем, связанных с распространением и рассеянием волн в случайно-неоднородных средах, удастся свести к решению задачи о прохождении волны через неоднородный слой конечной толщины, на выходе из которого её амплитуда и фаза оказываются случайными функциями координат. При дальнейшем распространении в однородном пространстве (или вакууме) возникает интерференция таких флуктуирующих волн, приходящих в точку наблюдения с различных направлений (рис. 17.1).

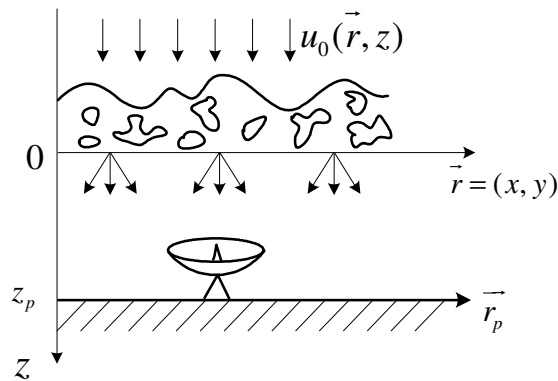


Рис. 17.1.

Для упрощения задачи будем снова рассматривать неподвижные неоднородности среды: $n(\vec{R}, t) = n(\vec{R})$. В этом случае, как уже отмечалось в предыдущих разделах, для монохроматического первичного поля $U_0 \sim e^{-i\omega t}$ зависимость от времени t в прошедшем поле сохраняется, что позволяет снова искать решение для $U(\vec{R}, t)$ в виде $U(\vec{R}, t) = U(\vec{R})e^{-i\omega t}$. Опуская в дальнейшем зависимость полей от времени в виде $\sim e^{-i\omega t}$, обозначим через

$$U_0(\vec{r}) = A_0(\vec{r})e^{iS_0(\vec{r})} \quad (17.1)$$

поле исходной волны, которое было бы в плоскости $z = 0$ при отсутствии слоя с неоднородностями показателя преломления ($\vec{r} = (x, y)$ - радиус-вектор в плоскости $z = 0$). После прохождения волны через слой возникают искажения невозмущенных амплитуды - $A_0(\vec{r})$ и фазы - $S_0(\vec{r})$, так

что на нижней границе слоя ($z = 0$) поле $U(\vec{r})$ можно представить в виде

$$U(\vec{r}) = A_0(\vec{r})\alpha(\vec{r})e^{i[S_0(\vec{r})+\tilde{S}(\vec{r})]} = A_0(\vec{r})\alpha(\vec{r})e^{iS(\vec{r})}. \quad (17.2)$$

Здесь $S(\vec{r}) = S_0(\vec{r}) + \tilde{S}(\vec{r})$, $\tilde{S}(\vec{r})$ - дополнительный набег фазы, возникающий при прохождении волны через слой с неоднородностями; $\alpha(\vec{r})$ - множитель, учитывающий изменения амплитуды поля $U(\vec{r})$ по сравнению с $A_0(\vec{r})$. Плоскость $z = 0$, на которой задано распределение поля $U(\vec{r})$ формулой (17.2), называют **амплитудно-фазовым экраном**. Задача нахождения $\alpha(\vec{r})$ и $\tilde{S}(\vec{r})$ после прохождения волной слоя с неоднородностями может быть решена, например, в рамках уже рассмотренных ранее МГО или МПВ. В нашем же случае, считая распределение поля в плоскости $z = 0$ заданным (17.2), необходимо определить параметры волнового поля $U(\vec{R})$ в произвольной точке наблюдения $\vec{R} = \vec{R}_p = (\vec{r}_p, z_p)$, находящейся за экраном ($z_p > 0$) в однородном пространстве или вакууме (см. рис. 17.1).

17.1. Формула Грина

В качестве первого шага получим формулу Грина, позволяющую рассчитать поле U в любой точке $\vec{R} = \vec{R}_p$ произвольного объема V , если заданы значения U и его нормальной производной $\partial U / \partial N$ на поверхности Σ , ограничивающей этот объем (рис. 17.2).

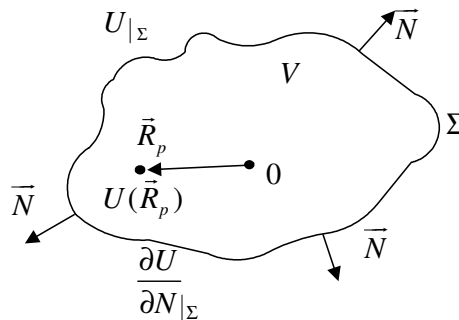


Рис. 17.2.

Формула, или теорема Грина (1824г.), непосредственно вытекает из теоремы о дивергенции

(теоремы Остроградского - Гаусса)

$$\int_V \operatorname{div} \vec{H} \, dv = \iiint_{\Sigma} \vec{N} \vec{H} \, d\Sigma, \quad (17.3)$$

которая справедлива для любого векторного поля \vec{H} , определенного в объеме V , ограниченного замкнутой поверхностью Σ . Здесь \vec{N} - внешняя нормаль к поверхности Σ .

Пусть $\vec{H} = \Upsilon \operatorname{grad} \Psi = \Upsilon \vec{\nabla} \Psi$, где $\Upsilon = \Upsilon(\vec{R})$ и $\Psi = \Psi(\vec{R})$ - произвольные скалярные функции.

Тогда

$$\operatorname{div} \vec{H} = \operatorname{div}(\Upsilon \operatorname{grad} \Psi) = \Upsilon \Delta \Psi + \operatorname{grad} \Upsilon \operatorname{grad} \Psi \quad (17.4-a)$$

и

$$\vec{N} \vec{H} = \vec{N}(\Upsilon \operatorname{grad} \Psi) = \Upsilon \vec{N} \operatorname{grad} \Psi = \Upsilon \frac{\partial \Psi}{\partial N}, \quad (17.4-b)$$

где $\partial/\partial N$ - нормальная производная на поверхности Σ (по направлению внешней нормали к объему V). Подставив (17.4) в (17.3), получим так называемую **первую формулу Грина**

$$\int_V (\Upsilon \Delta \Psi + \vec{\nabla} \Upsilon \vec{\nabla} \Psi) \, dv = \iiint_{\Sigma} \Upsilon \frac{\partial \Psi}{\partial N} \, d\Sigma. \quad (17.5-a)$$

Напишем такое же выражение, поменяв в нем местами Υ и Ψ , и вычтем его из (17.5-a). При этом члены с произведением $\vec{\nabla} \Upsilon \vec{\nabla} \Psi$ сократятся, и мы получим **вторую формулу Грина**:

$$\int_V (\Upsilon \Delta \Psi - \Psi \Delta \Upsilon) \, dv = \iiint_{\Sigma} \left[\Upsilon \frac{\partial \Psi}{\partial N} - \Psi \frac{\partial \Upsilon}{\partial N} \right] \, d\Sigma. \quad (17.5-b)$$

В качестве функции Υ выберем волновое поле $U(\vec{R})$, которое в однородной среде (вакууме) удовлетворяет уравнению Гельмгольца:

$$(\Delta_{\vec{R}} + k^2)U(\vec{R}) = -4\pi Q(\vec{R}), \quad (17.6)$$

где $k = \omega/c$, а $Q(\vec{R})$ - плотность распределения источников. С другой стороны, в качестве Ψ выберем волновое поле, создаваемое точечным единичным источником (**функция Грина**) $G(\vec{R}, \vec{R}_p)$ и удовлетворяющее тому же уравнению (17.6), где $Q(\vec{R}) = \delta(\vec{R} - \vec{R}_p)$:

$$(\Delta_{\vec{R}} + k^2)G(\vec{R}, \vec{R}_p) = -4\pi\delta(\vec{R} - \vec{R}_p). \quad (17.7)$$

Умножив (17.6) на $G(\vec{R}, \vec{R}_p)$, а (17.7) – на $U(\vec{R})$ и вычитая затем полученные выражения, имеем

$$U(\vec{R})\Delta_{\vec{R}}G(\vec{R}, \vec{R}_p) - G(\vec{R}, \vec{R}_p)\Delta_{\vec{R}}U(\vec{R}) = -4\pi[U(\vec{R})\delta(\vec{R} - \vec{R}_p) - G(\vec{R}, \vec{R}_p)Q(\vec{R})].$$

Подставим это выражение в левую часть (17.5-б) и выполним интегрирование по объему $dv \equiv d\vec{R} = dx dy dz$. В результате с учетом известного свойства δ - функции:

$$\int_V U(\vec{R})\delta(\vec{R} - \vec{R}_p) d\vec{R} = U(\vec{R}_p),$$

получим

$$U(\vec{R}_p) = \int_V G(\vec{R}, \vec{R}_p)Q(\vec{R})d\vec{R} - \frac{1}{4\pi} \oint_{\Sigma} \left[U(\vec{R}) \frac{\partial G(\vec{R}, \vec{R}_p)}{\partial N} - G(\vec{R}, \vec{R}_p) \frac{\partial U(\vec{R})}{\partial N} \right] d\Sigma. \quad (17.8)$$

17.2. Определение поля за фазовым экраном. Принцип Гюйгенса

Применим теперь формулу Грина (17.8) для расчета поля $U(\vec{R}_p)$ за фазовым экраном. Для этого построим полусферу C_a (рис. 17.3) радиуса a с центром в начале координат (точка O) и рассмотрим объем V , заключенный между этой полусферой и частью поверхности Σ_0 плоскости $z = 0$.

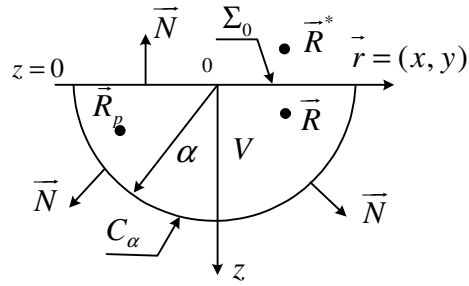


Рис. 17.3.

В рассматриваемой постановке задачи внутри объема V источники отсутствуют, т.е. $Q(\vec{R}) \equiv 0$. При достаточно большом радиусе полусферы ($a \rightarrow \infty$) интеграл по C_a исчезает (в силу принципа излучения), и мы приходим к формуле:

$$U(\vec{R}_p) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_0} d\vec{r} \left[U(\vec{R}) \frac{\partial}{\partial z} G(\vec{R}, \vec{R}_p) - G(\vec{R}, \vec{R}_p) \frac{\partial}{\partial z} U(\vec{R}) \right]_{z=0}. \quad (17.9)$$

При получении (17.9) мы учли, что $\left. \frac{\partial}{\partial N} \right|_{\Sigma_0} = - \left. \frac{\partial}{\partial z} \right|_{z=0}$ и ввели обозначение $d\Sigma = d\vec{r} = dx dy$.

Видно, что поле в точке наблюдения $U(\vec{R}_p)$ определяется, вообще говоря, значениями на экране не только самого поля $U(\vec{r})$, но и его нормальной производной $\partial U / \partial z$.

В выборе функции Грина $G(\vec{R}, \vec{R}_p)$, удовлетворяющей уравнению (17.7), имеется довольно большой произвол. Например, в качестве $G(\vec{R}, \vec{R}_p)$ мы могли бы выбрать функцию Грина $G_0(\vec{R}, \vec{R}_p)$ для однородного неограниченного пространства (расходящуюся сферическую волну):

$$G_0(\vec{R}, \vec{R}_p) = \frac{e^{ik|\vec{R}-\vec{R}_p|}}{|\vec{R}-\vec{R}_p|}. \quad (17.10)$$

Но $G_0(\vec{R}, \vec{R}_p)$ - всего лишь одна из множества функций, удовлетворяющих неоднородному уравнению (17.7). Действительно, в общем случае уравнению (17.7) удовлетворяет любая

функция вида $G(\vec{R}, \vec{R}_p) = G_0(\vec{R}, \vec{R}_p) + B(\vec{R}, \vec{R}_p)$, где $B(\vec{R}, \vec{R}_p)$ является решением однородного уравнения Гельмгольца:

$$(\Delta_{\vec{R}} + k^2)B(\vec{R}, \vec{R}_p) = 0. \quad (17.11)$$

Поскольку функция $B(\vec{R}, \vec{R}_p)$ не определена однозначно, то её можно выбрать, например, так, чтобы в формуле (17.9) один из двух поверхностных интегралов обращался в нуль. Этому условию удовлетворяет функция в виде той же сферической волны (17.10), но создаваемой "зеркально" отображенным источником (единичным, точечным и расположенным в точке $\vec{R} = \vec{R}^* = (x, y, -z) = (\vec{r}, -z)$):

$$B(\vec{R}, \vec{R}_p) = \frac{e^{ik|\vec{R}^* - \vec{R}_p|}}{|\vec{R}^* - \vec{R}_p|}. \quad (17.12)$$

Так как точка $\vec{R} = \vec{R}^*$ находится вне рассматриваемого объема V (на рис. 17.3 она находится в верхнем полупространстве), то $B(\vec{R}, \vec{R}_p)$ не имеет особенностей внутри V (при $z > 0$) и, как легко проверить, удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца (17.11).

С учетом (17.12) введем в рассмотрение две функции Грина:

$$G_{\pm}(\vec{R}, \vec{R}_p) = G_0(\vec{R}, \vec{R}_p) \pm B(\vec{R}, \vec{R}_p), \quad (17.13)$$

которые обладают очевидными свойствами:

$$G_+(\vec{R}, \vec{R}_p) \Big|_{z=0} = 2G_0(\vec{r}, \vec{R}_p), \quad (17.14-a)$$

$$G_-(\vec{R}, \vec{R}_p) \Big|_{z=0} = 0 \quad (17.14-b)$$

и

$$\left. \frac{\partial G_+(\bar{R}, \bar{R}_p)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad (17.15-a)$$

$$\left. \frac{\partial G_-(\bar{R}, \bar{R}_p)}{\partial z} \right|_{z=0} = 2 \left. \frac{\partial}{\partial z} G_0(\bar{R}, \bar{R}_p) \right|_{z=0}. \quad (17.15-б)$$

Если в формуле (17.9) в качестве G выбрать G_- , то с учетом определений (17.14-б) и (17.15-б) она примет вид

$$U(\bar{R}_p) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_0} U(\bar{r}) \left. \frac{\partial}{\partial z} G_0(\bar{R}, \bar{R}_p) \right|_{z=0} d\bar{r}. \quad (17.16)$$

Предположим теперь, что точка наблюдения $\bar{R}_p = (\bar{r}_p, z_p)$ находится на достаточно большом расстоянии за экраном (в волновой зоне, когда $kz_p \gg 1$). В этом случае при вычислении производной $\partial G_0/\partial z$ достаточно ограничиться только дифференцированием экспоненты в (17.10):

$$\frac{\partial}{\partial z} G_0(\bar{R}, \bar{R}_p) \approx ik \frac{e^{ik|\bar{R}-\bar{R}_p|}}{|\bar{R}-\bar{R}_p|} \frac{\partial}{\partial z} |\bar{R}-\bar{R}_p|. \quad (17.17)$$

Учитывая, что $|\bar{R}-\bar{R}_p| = \sqrt{(z-z_p)^2 + (\bar{r}-\bar{r}_p)^2}$, где $\bar{r}_p = (x_p, y_p)$, а $\bar{r} = (x, y)$, получаем

$$\left. \frac{\partial}{\partial z} |\bar{R}-\bar{R}_p| \right|_{z=0} = \left. \frac{z-z_p}{|\bar{R}-\bar{R}_p|} \right|_{z=0} = \frac{-z_p}{|\bar{r}-\bar{R}_p|} = -\cos \theta(\bar{r}), \quad (17.18)$$

где $\theta(\bar{r})$ - угол между лучом, проведенным из точки наблюдения P ($\bar{R} = \bar{R}_p$) в текущую точку интегрирования \bar{r} , и перпендикуляром, опущенным из P на плоскость $z=0$ (см. рис. 17.4).

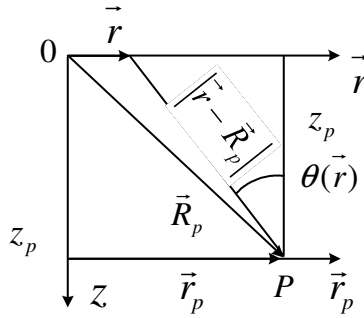


Рис. 17.4.

Подставляя (17.17) и (17.18) в (17.16), приходим к формуле, выражающей **принцип Гюйгенса**:

$$U(\vec{R}_p) = \frac{k}{2\pi i} \int_{\Sigma_0} U(\vec{r}) \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{R}_p|}}{|\vec{r}-\vec{R}_p|} \cos \theta(\vec{r}) d\vec{r}. \quad (17.19)$$

Согласно (17.19) каждая точка экрана $\vec{r} \in \Sigma_0$ является источником расходящейся сферической волны $e^{ik|\vec{r}-\vec{R}_p|}/|\vec{r}-\vec{R}_p|$, амплитуда которой определяется значением поля $U(\vec{r})$ в этой точке и величиной угла $\theta(\vec{r})$ между направлением из \vec{r} в точку наблюдения \vec{R}_p и нормалью к плоскости экрана (осью OZ).

Используя теперь представление поля $U(\vec{r})$ на экране в виде (17.2) и ограничившись лишь случаем чисто "фазового" экрана, когда амплитудная модуляция отсутствует ($\alpha(\vec{r}) \approx 1$), получим

$$U(\vec{R}_p) = \frac{k}{2\pi i} \int_{\Sigma_0} \frac{d\vec{r}}{|\vec{r}-\vec{R}_p|} A_0(\vec{r}) \cos \theta(\vec{r}) e^{ik[|\vec{r}-\vec{R}_p| + \varphi(\vec{r})]}. \quad (17.20)$$

Здесь мы обозначили через $\varphi(\vec{r}) = S(\vec{r})/k$ суммарный эйконал волны, который согласно (17.2) состоит из суммы $\varphi_0(\vec{r}) = S_0(\vec{r})/k$ - невозмущенного эйконала падающей волны и добавки $\tilde{\varphi}(\vec{r}) = \tilde{S}(\vec{r})/k$, возникающей после прохождения волной слоя с неоднородностями.

К интегральным представлениям вида (17.20) сводятся решения достаточно большого числа задач физики и особенно радиофизики. Поэтому представляет интерес провести детальный анализ возможностей МФЭ. В начале мы исследуем задачу в приближении МГО, затем проанализируем возможности решения дифракционной задачи и, наконец, покажем, как необходимо учитывать случайные факторы.

17.3. Решение задачи в рамках метода геометрической оптики

В данном разделе мы покажем, как по заданным в плоскости $z = 0$ распределениям фазы $S(\vec{r}) = k\varphi(\vec{r}) = k[\varphi_0(\vec{r}) + \tilde{\varphi}(\vec{r})]$ и амплитуды $A_0(\vec{r})$, прошедшей через слой с неоднородностями волны, можно вычислить геометрикооптическое значение интенсивности поля в точке наблюдения \vec{R}_p , не прибегая к интегральному представлению (17.20).

Определим вначале уравнение поверхности $z = z_s(\vec{r})$, на которой фаза волны $S(\vec{r}, z)$ на выходе из слоя с неоднородностями постоянна (см. рис. 17.5):

$$S(\vec{r}, z) = S(x, y, z_s) = Const. \quad (17.21)$$

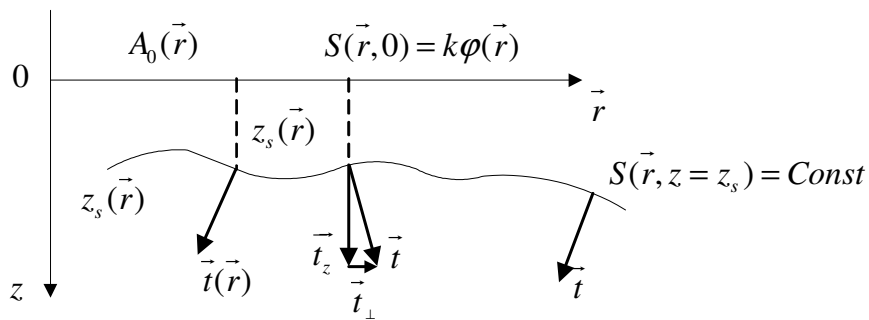


Рис. 17.5.

Для упрощения задачи будем считать, что после прохождения слоя с неоднородностями, направление распространения волны \vec{t} незначительно отличается от исходного \vec{t}_0 , которое, в свою очередь, мало отличается от направления оси OZ (так называемое малоугловое или приближение параксиальной оптики). Спроектируем поверхность постоянной фазы, заданной уравнением (17.21), на плоскость $z = 0$:

$$S(\vec{r}, z)|_{z=0} = S(\vec{r}, 0) = \text{Const} - kz_s(\vec{r}).$$

Полученная величина $S(\vec{r}, z)|_{z=0}$ должна совпасть с заданным распределением фазы на экране - $S(\vec{r}) = k\varphi(\vec{r})$. В результате получаем следующее равенство:

$$S(\vec{r}, 0) = \text{Const} - kz_s(\vec{r}) = k\varphi(\vec{r}). \quad (17.22)$$

Отсюда находим уравнение поверхности постоянной фазы (фазового фронта волны):

$$z = z_s(\vec{r}) = \text{Const} - \varphi(\vec{r}). \quad (17.23)$$

Уравнение нормали $\vec{t}(\vec{r})$ к поверхности постоянной фазы $z = z_s(\vec{r})$ определяется как уравнение нормали к поверхности уровня, которое согласно (17.23) задается в виде $\Phi(x, y, z) = z + \varphi(\vec{r}) = \text{Const}$:

$$\vec{t} = \frac{\vec{\nabla}\Phi}{|\vec{\nabla}\Phi|} = \frac{\vec{e}_z + \vec{\gamma}}{\sqrt{1 + \gamma^2}}, \quad (17.24)$$

где $\vec{\gamma} = \vec{\nabla}_{\vec{r}}\varphi(\vec{r})$. Проекции вектора \vec{t} на оси координат равны $\vec{t}_z = \vec{e}_z / \sqrt{1 + \gamma^2}$ и $\vec{t}_{\perp} = t_x \vec{e}_x + t_y \vec{e}_y = \vec{\gamma} / \sqrt{1 + \gamma^2}$.

Направление лучей, по которым поле $U(\vec{r})$ переносится с плоскости $z = 0$ в область пространства $z > 0$, определяется полем нормалей $\vec{t}(\vec{r})$. Для малых углов отклонения $|\vec{\gamma}| = \gamma \ll 1$ и приближенно можно считать, что

$$\vec{t}_z \approx \vec{e}_z \text{ и } \vec{t}_{\perp} \approx \vec{\gamma} = \vec{\nabla}_{\vec{r}}\varphi(\vec{r}). \quad (17.25)$$

Заметим, что найденное для \vec{t}_{\perp} выражение совпадает с полученной ранее в рамках МГО поправкой к углу прихода \vec{t}_1 .

Таким образом, по известному суммарному эйконалу волны $\varphi(\vec{r})$, на выходе из слоя с неоднородностями ($z = 0$) можно найти закон отклонения лучей $\vec{\gamma} = \vec{\nabla}_{\vec{r}}\varphi(\vec{r})$. Преломленные в плоскости фазового экрана лучи затем вдоль прямых линий достигают плоскости наблюдения ($z = z_p > 0$). Определим координаты лучей, которые, преломившись на фазовом экране, прошли через точку наблюдения $\vec{R}_p = (\vec{r}_p, z_p)$.

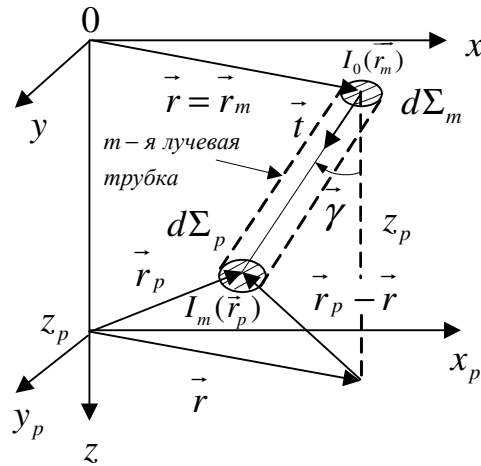


Рис. 17.6.

Согласно рис. 17.6 в малоугловом приближении можно записать следующее равенство:

$$\frac{\vec{r}_p - \vec{r}}{z_p} = \vec{\gamma}(\vec{r}),$$

откуда получаем

$$\vec{r}_p = \vec{r} + z_p \vec{\gamma}(\vec{r}). \quad (17.26)$$

Данное векторное уравнение называется **абберационным**. Оно представляет собой систему двух уравнений (проекции $\vec{r}_p = \vec{r}_p(\vec{r})$ на оси OX, OY) с двумя неизвестными (координаты x, y).

Предположим, что заданному положению наблюдателя $\vec{R}_p = (\vec{r}_p, z_p)$ соответствует $N \geq 1$ действительных корней $\vec{r} = \vec{r}_m$, ($m = 1, 2, \dots, N$) абберационного уравнения (17.26).

Наличие нескольких корней говорит о том, что в точку наблюдения \vec{R}_p приходят одновременно

несколько лучей. Рассмотрим один из корней, например, $\vec{r} = \vec{r}_m$ и предположим, что наблюдатель совершает небольшие перемещения вблизи исходной точки \vec{r}_p , оставаясь при этом в плоскости наблюдения: $\vec{r}_p \rightarrow \vec{r}_p + \delta\vec{r}_p$. Координаты корня \vec{r}_m в плоскости фазового экрана ($z = 0$) при этом также претерпевают небольшие изменения: $\vec{r}_m \rightarrow \vec{r}_m + \delta\vec{r}_m$, причем и $\vec{r}_p + \delta\vec{r}_p$, и $\vec{r}_m + \delta\vec{r}_m$ по-прежнему удовлетворяют исходному абберационному уравнению (17.26):

$$\vec{r}_p + \delta\vec{r}_p = \vec{r}_m + \delta\vec{r}_m + z\vec{\gamma}(\vec{r}_m + \delta\vec{r}_m).$$

Связь между малыми смещениями $\delta\vec{r}_p$ и $\delta\vec{r}_m$ можно определить, линеаризовав данное уравнение. Для этого разложим $\vec{\gamma}(\vec{r}_m + \delta\vec{r}_m)$ в ряд Тейлора по малой величине $\delta\vec{r}_m$ и ограничимся лишь линейными слагаемыми: $\vec{\gamma}(\vec{r}_m + \delta\vec{r}_m) \approx \vec{\gamma}(\vec{r}_m) + (\delta\vec{r}_m \vec{\nabla})\vec{\gamma}(\vec{r}_m)$. В результате получим

$$\vec{r}_p + \delta\vec{r}_p = \vec{r}_m + \delta\vec{r}_m + z_p\vec{\gamma}(\vec{r}_m + \delta\vec{r}_m) \approx \vec{r}_m + \delta\vec{r}_m + z_p\vec{\gamma}(\vec{r}_m) + z_p(\delta\vec{r}_m \vec{\nabla})\vec{\gamma}(\vec{r}_m). \quad (17.27)$$

Учитывая, что $\vec{r} = \vec{r}_m$ удовлетворяет исходному уравнению $\vec{r}_p = \vec{r}_m + z_p\vec{\gamma}(\vec{r}_m)$, получаем

$$\delta\vec{r}_p \approx \delta\vec{r}_m + z_p(\delta\vec{r}_m \vec{\nabla})\vec{\gamma}(\vec{r}_m). \quad (17.28)$$

Воспользуемся теперь одним из основных уравнений МГО – законом сохранения интенсивности внутри бесконечно тонкой лучевой трубки, построенной вблизи луча, соединяющего точки $\vec{r} = \vec{r}_m$ (на входе) и \vec{r}_p (на выходе). Обозначим через $I_m(\vec{r}_p)$ значение интенсивности в точке наблюдения, соответствующее m -му лучу. Учитывая, что интенсивность волны в плоскости фазового экрана в точке $\vec{r} = \vec{r}_m$ равна $I_0(\vec{r}_m) = A_0^2(\vec{r}_m)$, согласно рис.17.6 можем записать следующее равенство (см. 15.14):

$$I_0(\vec{r}_m)d\Sigma_m = I_m(\vec{r}_p)d\Sigma_p. \quad (17.29)$$

Здесь $d\Sigma_p \equiv \delta\vec{r}_p$ - площадь поперечного сечения на выходе лучевой трубки (в плоскости наблюдения), а $d\Sigma_m \equiv \delta\vec{r}_m$ - на входе (в плоскости фазового экрана). Из (17.29) находим вклад в значение интенсивности в точке наблюдения от m - й лучевой трубки:

$$I_m(\vec{r}_p) = I_0(\vec{r}_m) \frac{d\Sigma_m}{d\Sigma_p}. \quad (17.30)$$

Отношение площадей $d\Sigma_m/d\Sigma_p \equiv \delta\vec{r}_m/\delta\vec{r}_p$ легко определяется из линеаризованного уравнения (17.28) через якобиан преобразования от переменных x_p, y_p к переменным x, y :

$$\frac{d\Sigma_m}{d\Sigma_p} \equiv \frac{\delta\vec{r}_m}{\delta\vec{r}_p} = \left| \frac{\partial(x_m, y_m)}{\partial(x_p, y_p)} \right| = \left| \frac{\partial(x_p, y_p)}{\partial(x, y)} \right|_{\vec{r}=\vec{r}_m}^{-1} = \left[\left(1 + z_p \frac{\partial\gamma_x}{\partial x} \right) \left(1 + z_p \frac{\partial\gamma_y}{\partial y} \right) - z_p^2 \left(\frac{\partial\gamma_x}{\partial y} \right)^2 \right]_{\vec{r}=\vec{r}_m}^{-1}. \quad (17.31)$$

Здесь мы воспользовались известной связью между “прямым” и “обратным” якобианами и учли, что согласно определению $\vec{\gamma} = \vec{\nabla}_{\vec{r}}\varphi(\vec{r})$ для смешанных производных должно выполняться равенство: $\partial\gamma_x/\partial y = \partial\gamma_y/\partial x$.

Полную интенсивность в точке наблюдения $I(\vec{r}_p)$ получим, просуммировав вклады от всех лучевых трубок:

$$I(\vec{r}_p) = \sum_{m=1}^N I_m(\vec{r}_p) = \sum_{m=1}^N I_0(\vec{r}_m) \left[\left(1 + z_p \frac{\partial\gamma_x}{\partial x} \right) \left(1 + z_p \frac{\partial\gamma_y}{\partial y} \right) - z_p^2 \left(\frac{\partial\gamma_x}{\partial y} \right)^2 \right]_{\vec{r}=\vec{r}_m}^{-1}. \quad (17.32)$$

17.4. Дифракционное решение задачи

Количественный анализ интегрального представления (17.20) при произвольных зависимостях амплитуды $A_0(\vec{r})$ и фазы $k\varphi(\vec{r})$ в общем случае не представляется возможным. Однако для коротких длин волн, когда λ намного меньше характерного масштаба l_φ изменений эйконала $\varphi(\vec{r})$ в плоскости экрана ($kl_\varphi \gg 1$), интеграл (17.20) может быть оценен методом стационарной фазы. При этом задача существенно упрощается, и в результате удается получить

достаточно простые асимптотические оценки для значения поля в точке наблюдения.

Метод стационарной фазы

В данном разделе в общих чертах мы представим один из мощных математических методов асимптотической оценки интегралов вида (17.20), который в физике называется коротковолновой асимптотикой, а в математике - асимптотической оценкой быстро осциллирующих интегралов (БОИ).

Пусть нам необходимо вычислить однократный интеграл вида

$$J(\Lambda) = \int_a^b q(x) e^{i\Lambda\Phi(x)} dx, \quad (17.33)$$

где $\Lambda \gg 1$ (большой параметр), а $q(x)$ и $\Phi(x)$ - действительные “медленно” изменяющиеся функции (по сравнению с периодом изменения функции $\exp\{i\Lambda\Phi(x)\}$). Поведение подынтегрального выражения похоже на рассмотренный ранее в § 6 амплитудно модулированный процесс: при этом $q(x)$ играет роль огибающей, а $\Phi(x)$ определяет мгновенную частоту заполнения огибающей.

Предположим вначале, что на интервале (a, b) , где $b > a$, функции $q(x)$ и $\Phi(x)$ изменяются монотонно.

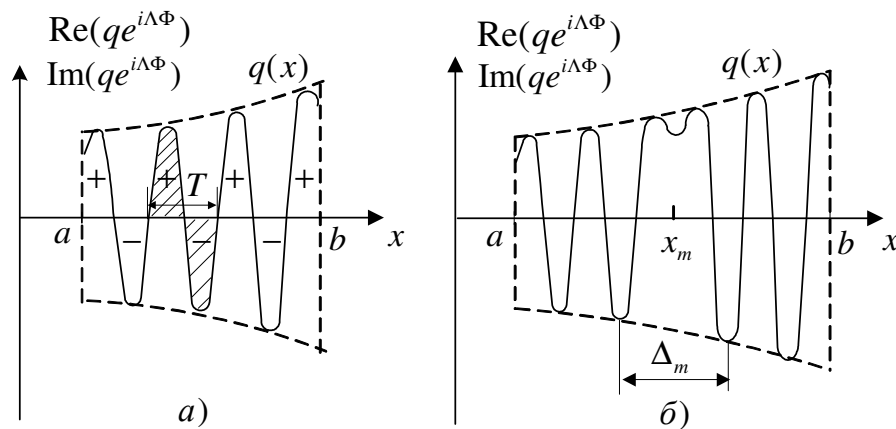


Рис. 17.7.

На рис. 17.7-а показан характерный вид реальной $\operatorname{Re}(qe^{i\Lambda\Phi})$ или мнимой $\operatorname{Im}(qe^{i\Lambda\Phi})$ частей подынтегральной функции. Определенный интеграл на интервале (a, b) по определению равен сумме элементарных “площадок”, заключенных внутри кривой $\operatorname{Re}(qe^{i\Lambda\Phi})$ (или $\operatorname{Im}(qe^{i\Lambda\Phi})$). Произвольно выберем один из периодов изменения подынтегральной функции, например, $\operatorname{Re}(qe^{i\Lambda\Phi})$. В силу медленности изменений $q(x)$ и $\Phi(x)$, при $\Lambda \gg 1$ площадки, соответствующие двум полупериодам, имеют приблизительно равные амплитуды, но разные знаки (+, -). В процессе суммирования они дают ничтожно малый вклад в общий интеграл (17.33). В результате суммирования всех полупериодов с положительными и отрицательными значениями мы получим незначительную величину $J(\Lambda)$. Можно показать, что за счет быстрой осцилляции $\exp\{i\Lambda\Phi(x)\}$ значение интеграла $J(\Lambda)$ будет обратно пропорционально величине Λ : $J(\Lambda) \sim \Lambda^{-1}$.

Ситуация существенно изменяется, если внутри интервала (a, b) функция $\Phi(x)$ достигает экстремума. В этом случае основной вклад в интеграл (17.33) дает небольшая окрестность значений x , лежащих вблизи точки экстремума $x = x_m$ (рис. 17.7-б), где функция $\exp\{i\Lambda\Phi(x)\}$ перестает осциллировать. Области же интегрирования, отстоящие от точки экстремума и где функции $q(x)$ и $\Phi(x)$ монотонно изменяются, вносят значительно меньший вклад в величину интеграла $J(\Lambda)$.

Асимптотическую оценку интеграла при наличии стационарных точек можно получить, произведя следующие упрощения.

1. Предположим вначале, что $x = x_m$ является единственной на интервале (a, b) точкой экстремума, определяемой из условия:

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = 0. \quad (17.34)$$

В окрестности $x = x_m$ разложим $\Phi(x)$ в ряд Тейлора и оставим лишь квадратичное слагаемое:

$$\Phi(x) \approx \Phi(x_m) + \frac{1}{2} \frac{d^2\Phi(x_m)}{dx^2} (x - x_m)^2 = \Phi(x_m) + \frac{1}{2} \Phi''_{xx}(x_m) (\Delta x)^2. \quad (17.35)$$

Здесь $\Delta x = x - x_m$. С учетом (17.35) показатель степени экспоненты вблизи стационарной точки представится в виде

$$\Lambda\Phi(x) \approx \Lambda\Phi(x_m) + \frac{\Lambda}{2} \Phi''_{xx}(x_m) (\Delta x)^2. \quad (17.36)$$

Размер области $\Delta_m = \Delta x$, в пределах которой подынтегральная функция в (17.33) не осциллирует и, следовательно, вносит основной вклад в интеграл (см. рис. 17.7-б), можно оценить из условия $\frac{\Lambda}{2} \Phi''_{xx}(x_m) (\Delta x)^2 \approx \pi$:

$$\Delta_m \approx \sqrt{\frac{2\pi}{\Lambda |\Phi''_{xx}(x_m)|}}. \quad (17.37)$$

2. Амплитудная функция $q(x)$ практически не изменяется в пределах области $x_m - \Delta_m < x < x_m + \Delta_m$ (в силу её медленности), и поэтому ее можно просто вынести за знак интеграла в точке $x = x_m$, т.е. положить $q(x) \approx q(x_m)$.

3. Если область изменений аргумента $x_m - \Delta_m < x < x_m + \Delta_m$ расположена на значительном удалении от границ интервала (a, b) , то пределы интегрирования можно растянуть от $-\infty$ до $+\infty$.

После проделанных упрощений получим

$$\begin{aligned} J_m(\Lambda) &\approx q(x_m) e^{i\Lambda\Phi(x_m)} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{i \frac{\Lambda}{2} \Phi''_{xx}(x_m) (\Delta x)^2\right\} d(\Delta x) = \\ &= q(x_m) \sqrt{\frac{2\pi}{\Lambda |\Phi''_{xx}(x_m)|}} \exp\left\{i \left[\Lambda\Phi(x_m) + \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} \Phi''_{xx}(x_m) \right]\right\}. \end{aligned} \quad (17.38)$$

4. Если уравнение для определения точек стационарности фазы (17.34) имеет не один, а

несколько действительных корней $x = x_m$, ($m = 1, 2, \dots, N$), и области Δ_m не перекрываются и далеко отстоят от границ области интегрирования (случай так называемых изолированных корней), то асимптотическая оценка (17.33) при $\Lambda \gg 1$ равна сумме вкладов от каждой стационарной точки (17.38):

$$J(\Lambda) = \sum_{m=1}^N J_m(\Lambda), \quad (17.39)$$

Представленный на примере анализа однократного БОИ метод стационарной фазы может быть обобщен и на случай кратных интегралов. Для наших расчетов представляет интерес алгоритм оценок двукратного интеграла вида

$$J(\Lambda) = \int_{\Sigma} q(\vec{r}) e^{i\Lambda\Phi(\vec{r})} d\vec{r}, \quad (17.40)$$

где снова Λ - большой параметр ($\Lambda \gg 1$), $q(\vec{r})$ и $\Phi(\vec{r})$ - “медленно” изменяющиеся функции, а Σ - заданная область интегрирования.

1. Из уравнения

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} \Phi(\vec{r}) = 0 \quad (17.41)$$

находятся точки (действительные корни) стационарности фазы: $\vec{r} = \vec{r}_m$, ($m = 1, 2, \dots, N$).

2. В окрестности каждой точки $\vec{r} = \vec{r}_m$ функция $\Phi(\vec{r})$ представляется в виде двумерного ряда Тейлора с точностью до квадратичных членов включительно:

$$\Phi(\vec{r}) \approx \Phi(\vec{r}_m) + \frac{1}{2} \Phi''_{xx}(\vec{r}_m) (\Delta x)^2 + \frac{1}{2} \Phi''_{yy}(\vec{r}_m) (\Delta y)^2 + \Phi''_{xy}(\vec{r}_m) \Delta x \Delta y, \quad (17.42)$$

где $\Delta x = x - x_m$, $\Delta y = y - y_m$, а $\Phi''_{ij}(\vec{r}_m)$ - частные производные второго порядка по переменным x и y .

3. В окрестности \vec{r}_m “медленно” изменяющуюся функцию $q(\vec{r})$ считаем приближенно постоянной и выносим за знак интеграла в точке $\vec{r} = \vec{r}_m$: $q(\vec{r}) \approx q(\vec{r}_m)$.

4. Размеры областей Δ_m , которые дают основные вклады в значение интеграла $J(\Lambda)$, оцениваются с помощью (17.42) из условия $|\Phi(\vec{r}) - \Phi(\vec{r}_m)| \approx \pi$. Видно, что определенные подобным образом области Δ_m есть не что иное, как первые зоны Френеля, описанные вокруг стационарных точек $\vec{r} = \vec{r}_m$.

5. Если области Δ_m отстоят на значительных расстояниях друг от друга и от границы области интегрирования (случай изолированных корней), то при оценке вклада каждой стационарной точки $J_m(\Lambda)$ пределы интегрирования можно растянуть от $-\infty$ до ∞ .

В результате для вклада m -й стационарной точки получается следующая асимптотическая оценка:

$$J_m(\Lambda) \approx q(\vec{r}_m) e^{i\Lambda\Phi(\vec{r}_m)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ i\Lambda \left[\frac{1}{2} \Phi''_{xx}(\vec{r}_m) (\Delta x)^2 + \frac{1}{2} \Phi''_{yy}(\vec{r}_m) (\Delta y)^2 + \Phi''_{xy}(\vec{r}_m) \Delta x \Delta y \right] \right\} d(\Delta x) d(\Delta y) = \frac{2\pi q(\vec{r}_m)}{\Lambda \sqrt{|D(\vec{r}_m)|}} \exp \left\{ i \left[\Lambda \Phi(\vec{r}_m) - \frac{\pi}{2} (1 - \varepsilon_m) \right] \right\}. \quad (17.43)$$

Здесь $D_m = \Phi''_{xx}(\vec{r}_m) \Phi''_{yy}(\vec{r}_m) - \Phi''_{xy}^2(\vec{r}_m)$ - определитель, составленный из вторых производных функции Φ ; $\varepsilon_m = 1$, если \vec{r}_m - точка max; $\varepsilon_m = -1$, если \vec{r}_m - точка min; $\varepsilon_m = 0$, если \vec{r}_m - седловая точка.

Асимптотическая оценка всего интеграла (17.40) получается путем суммирования вкладов от всех стационарных точек:

$$J(\Lambda) = \sum_{m=1}^N J_m(\Lambda) \approx \frac{2\pi}{\Lambda} \sum_{m=1}^N \frac{q(\vec{r}_m)}{\sqrt{|D(\vec{r}_m)|}} \exp \left\{ i \left[\Lambda \Phi(\vec{r}_m) - \frac{\pi}{2} (1 - \varepsilon_m) \right] \right\}. \quad (17.44)$$

Воспользуемся теперь приведенными выше формулами для получения коротковолновой оценки интегрального представления (17.20). Для этого достаточно произвести формальные

переобозначения: $\Lambda \rightarrow k$, $q(\vec{r}) \rightarrow \frac{A_0(\vec{r}) \cos \theta(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{R}_p|}$, $\Phi(\vec{r}) \rightarrow |\vec{r} - \vec{R}_p| + \varphi(\vec{r})$. В малоугловом приближении ($|\vec{\gamma}| \ll 1$) основной вклад по полю в точке наблюдения \vec{R}_p дает лишь малая окрестность \vec{r} на фазовом экране, лежащая вблизи значений $\vec{r} = \vec{r}_p$, так что выполняется неравенство $|\vec{r} - \vec{r}_p| \ll z_p$. В этом случае в подынтегральном выражении (17.20) можно приближенно положить

$$\begin{aligned} \cos \theta(\vec{r}) &\approx \cos \theta(\vec{r}_p) = 1, \\ |\vec{r} - \vec{R}_p| &= \sqrt{z_p^2 + (\vec{r} - \vec{r}_p)^2} \approx z_p + \frac{(\vec{r} - \vec{r}_p)^2}{2z_p}, \\ q(\vec{r}) &\approx \frac{A_0(\vec{r})}{z_p}, \\ \Phi(\vec{r}) &\approx z_p + \frac{(\vec{r} - \vec{r}_p)^2}{2z_p} + \varphi(\vec{r}). \end{aligned} \quad (17.45)$$

В результате проделанных упрощений получим

$$U(\vec{R}_p) \approx \frac{k}{2\pi z_p i} \int_{\Sigma_0} A_0(\vec{r}) \exp\{ik\Phi(\vec{r})\} d\vec{r}, \quad (17.46)$$

где $\Phi(\vec{r}) = z_p + \frac{(\vec{r} - \vec{r}_p)^2}{2z_p} + \varphi(\vec{r})$. Заметим, что для достаточно коротких длин волн $\lambda \ll l_\varphi$, где l_φ - характерный масштаб изменения эйконала $\varphi(\vec{r})$ (радиус кривизны поверхности постоянной фазы $z = z_s(\vec{r})$), в качестве большого параметра Λ в (17.46) фактически выступает безразмерная величина kl_φ ($kl_\varphi \gg 1$).

Следуя методу стационарной фазы, из условия

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} \Phi(\vec{r}) = \frac{\vec{r} - \vec{r}_p}{z_p} + \vec{\nabla}_{\vec{r}} \varphi(\vec{r}) = 0 \quad (17.47)$$

получаем уравнение

$$\vec{r}_p = \vec{r} + z_p \vec{\gamma}(\vec{r}), \quad (17.48)$$

решение которого $\vec{r} = \vec{r}_m$ определяет точки (действительные корни) стационарности фазы (мы снова учли, что $\vec{\gamma}(\vec{r}) = \vec{\nabla}_{\vec{r}} \varphi(\vec{r})$). Из сравнения с (17.26) видно, что (17.48) есть уже известное нам абберационное уравнение в приближении МГО, т.е. точки стационарности фазы $\vec{r} = \vec{r}_m$ есть не что иное, как координаты лучей, приходящих с экрана в точку наблюдения.

Если уравнение (17.48) имеет несколько действительных изолированных корней ($\vec{r} = \vec{r}_m$, $m = 1, 2, \dots, N$), которые лежат в пределах области интегрирования Σ_0 ($\vec{r}_m \in \Sigma_0$) и вдали от её границы, то асимптотическая оценка интеграла (17.46) согласно (17.44) равна

$$U(\vec{R}_p) = \sum_{m=1}^N U_m(\vec{R}_p), \quad (17.49)$$

где $U_m(\vec{R}_p)$ - вклад от m -й стационарной точки, определяемый как

$$U_m(\vec{R}_p) \approx \frac{A_0(\vec{r}_m)}{z_p \sqrt{|D(\vec{r}_m)|}} \exp \left\{ i \left[k\Phi(\vec{r}_m) - \frac{\pi}{2}(1 - \varepsilon_m) \right] \right\}. \quad (17.50)$$

Здесь

$$D(\vec{r}_m) = \left[\Phi''_{xx} \Phi''_{yy} - (\Phi''_{xy})^2 \right]_{\vec{r}=\vec{r}_m} = \frac{1}{z_p^2} \left[\left(1 + z_p \frac{\partial \gamma_x}{\partial x} \right) \left(1 + z_p \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} \right) - z_p^2 \left(\frac{\partial \gamma_x}{\partial y} \right)^2 \right]_{\vec{r}=\vec{r}_m}, \quad (17.51)$$

Таким образом, при наличии нескольких действительных корней $\vec{r} = \vec{r}_m$ в точку наблюдения \vec{R}_p одновременно приходят несколько лучей (волн), причем каждая из пришедших волн $U_m(\vec{R}_p)$ имеет свою амплитуду $A_0(\vec{r}_m) / z_p \sqrt{|D(\vec{r}_m)|}$ и фазу $k\Phi(\vec{r}_m) - \frac{\pi}{2}(1 - \varepsilon_m)$.

Суммарное поле $U(\vec{R}_p)$ образуется в результате когерентного сложения всех составляющих

$$U_m(\vec{R}_p).$$

Воспользовавшись формулой (17.49), определим теперь интенсивность волны в точке наблюдения:

$$\begin{aligned} I(\vec{R}_p) &= U(\vec{R}_p)U^*(\vec{R}_p) = \sum_{m=1}^N |U_m(\vec{R}_p)|^2 + \sum_{n \neq j}^N \sum_{j=1}^N U_n(\vec{R}_p)U_j^*(\vec{R}_p) = \\ &= \sum_{m=1}^N I_m(\vec{R}_p) + \sum_{n \neq j}^N \sum_{j=1}^N \sqrt{I_n(\vec{R}_p)}\sqrt{I_j(\vec{R}_p)} \exp \left\{ i \left[k(\Phi(\vec{r}_n) - \Phi(\vec{r}_j)) + \frac{\pi}{2}(\varepsilon_n - \varepsilon_j) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (17.52)$$

Здесь

$$I_m(\vec{R}_p) = |U_m(\vec{R}_p)|^2 = \frac{A_0^2(\vec{r}_m)}{z_p^2 |D(\vec{r}_m)|} = I_0(\vec{r}_m) \left[\left(1 + z_p \frac{\partial \gamma_x}{\partial x} \right) \left(1 + z_p \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} \right) - z_p^2 \left(\frac{\partial \gamma_x}{\partial y} \right)^2 \right]_{\vec{r}=\vec{r}_m}^{-1} \quad (17.53)$$

- интенсивность волны, пришедшая в точку наблюдения вдоль m -го луча.

Сравнивая формулы для $I(\vec{R}_p)$, полученные в приближениях МГО (17.32) и дифракционном коротковолновом приближении (17.52), видим, что некогерентная

составляющая в дифракционном приближении $\sum_{m=1}^N I_m(\vec{R}_p)$ в точности совпадает с

геометроптической величиной. Учет дифракции при рассмотрении только изолированных корней абберационного уравнения сводится лишь к учету интерференции волн между собой

(слагаемое $\square \sum_{n \neq j}^N$ в формуле (17.52)).

Комментарии

С помощью метода стационарной фазы в приближении МФЭ можно анализировать и более сложные поведения полей. Мы рассмотрели лишь случай конечного числа изолированных корней \vec{r}_m , который соответствует одновременному приходу в точку наблюдения нескольких лучей. Однако при наличии в плоскости наблюдения фокальных образований (фокусы и каустики) в абберационном уравнении (17.48), в зависимости от положения наблюдателя, некоторые из корней могут сближаться друг с другом и даже сливаться в единый - кратный. Для

сливающихся корней $D(\vec{r}_m) \rightarrow 0$, и интенсивности I_m бесконечно возрастают ($I_m(\vec{R}_p) \rightarrow \infty$). В этом случае МГО просто перестает работать. Однако в приближении МФЭ и в этом случае можно получить конечные (дифракционные) значения полей. Для этого в разложении эйконала $\Phi(\vec{r})$ в ряд Тейлора (17.42) необходимо учесть слагаемые более высокого порядка по Δx и Δy , чем квадратичные. Например, при нахождении наблюдателя вблизи гладкой каустики в абберационном уравнении будет присутствовать корень кратности 2, и в разложении эйконала необходимо учитывать члены третьего порядка малости по Δx и Δy . Вклад в результирующее поле от двухкратного корня в этом случае будет выражаться через спецфункцию - функцию Эйри. Поведение полей при наличии корней еще более высокой кратности составляет предмет анализа теории волновых катостроф.

17.5. Дифракция флуктуирующих волн

Согласно (17.2) суммарный набег фазы волны на экране $S(\vec{r}) = k\varphi(\vec{r})$ включает в себя составляющую фазы исходной падающей волны - $S_0(\vec{r}) = k\varphi_0(\vec{r})$ и добавку $\tilde{S}(\vec{r}) = k\tilde{\varphi}(\vec{r})$, связанную с набегом в слое с неоднородностями. Выделим в полной фазе $k\varphi(\vec{r})$ регулярную и случайную составляющие:

$$S(\vec{r}) = k\varphi(\vec{r}) = k \langle \varphi(\vec{r}) \rangle + k\delta\varphi(\vec{r}) = \langle S(\vec{r}) \rangle + \delta S(\vec{r}), \quad (17.54)$$

где по определению $\langle \delta S(\vec{r}) \rangle \equiv 0$. Регулярная составляющая фазы - $\langle S(\vec{r}) \rangle = k \langle \varphi(\vec{r}) \rangle$ в общем случае может содержать не только фазу падающей волны - $k\varphi_0(\vec{r})$, но и регулярную добавку за счет неоднородной среды - $k \langle \tilde{\varphi}(\vec{r}) \rangle$, если таковая не равна 0:

$$k \langle \varphi(\vec{r}) \rangle = k\varphi_0(\vec{r}) + k \langle \tilde{\varphi}(\vec{r}) \rangle = S_0(\vec{r}) + \langle \tilde{S}(\vec{r}) \rangle. \quad (17.55)$$

В качестве примера сред, у которых наряду со случайными “мелкомасштабными” неоднородностями имеются еще и “крупномасштабные” регулярные образования, можно указать на такие, как ионосфера Земли, корона Солнца, так называемые крупномасштабные “линзы” в космосе, атмосфере Земли, морской воде и т. д. Для указанных сред крупномасштабные и долговременные образования удобней относить к регулярной

составляющей, считая, что флуктуирующая часть связана с мелкомасштабными и быстро изменяющимися неоднородностями.

Наличие регулярной и случайной составляющих в фазе волны приводит к тому, что угол выхода лучей из экрана $\vec{\gamma}(\vec{r}) = \vec{\nabla}_{\vec{r}} \varphi(\vec{r})$ также будет включать в себя как регулярную $\langle \vec{\gamma}(\vec{r}) \rangle = \vec{\nabla}_{\vec{r}} \langle \varphi(\vec{r}) \rangle$, так и флуктуирующую $\delta \vec{\gamma}(\vec{r}) = \vec{\nabla}_{\vec{r}} \delta \varphi(\vec{r})$ компоненты: $\vec{\gamma}(\vec{r}) = \langle \vec{\gamma}(\vec{r}) \rangle + \delta \vec{\gamma}(\vec{r})$. С учетом этого абберрационное уравнение (17.26) может быть представлено как

$$\vec{r}_p = \langle \vec{f}(\vec{r}) \rangle + \delta \vec{f}(\vec{r}), \quad (17.56)$$

где $\langle \vec{f}(\vec{r}) \rangle = \vec{r} + z_p \langle \vec{\gamma}(\vec{r}) \rangle$ - регулярная, а $\delta \vec{f}(\vec{r}) = z_p \delta \vec{\gamma}(\vec{r})$ - случайная составляющие. Из-за наличия случайной добавки $\delta \vec{f}(\vec{r})$ действительные корни \vec{r}_m уравнения (17.56) носят случайный характер. Сечения лучевых трубок $d\Sigma_m$ будут при этом флуктуировать (от реализации к реализации) и, как результат, интенсивность волны в точке наблюдения (17.32) является случайной величиной.

С другой стороны, в дифракционной формуле (17.52) влияние случайной составляющей фазы $k\delta\varphi(\vec{r})$ проявляется двояким образом. Во-первых, наличие $\delta\varphi(\vec{r})$ приводит к флуктуациям угла прихода $\vec{\gamma}(\vec{r})$, что приводит к случайным изменениям в положениях точек стационарной фазы \vec{r}_m уравнения (17.48). Во-вторых, в формулу (17.52) в явном виде входят случайные разности фаз волн, приходящих из разных участков фазового экрана.

Учет случайных факторов можно было бы производить, пользуясь уже полученными в рамках МГО и дифракционного анализа формул, задавая статистику случайных флуктуаций фазы $k\delta\varphi(\vec{r})$, углов прихода $\delta\vec{\gamma}(\vec{r})$ и определяя соответствующим образом статистику корней абберрационного уравнения (17.48). Однако удобней это сделать на основе исходного интегрального представления (17.20), которое с учетом (17.54) принимает вид

$$U(\vec{R}_p) = \frac{k}{2\pi i} \int_{\Sigma_0} A_0(\vec{r}) \cos \theta(\vec{r}) \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{R}_p|}}{|\vec{r}-\vec{R}_p|} e^{ik\varphi(\vec{r})} e^{ik\delta\varphi(\vec{r})} d\vec{r}. \quad (17.57)$$

17.6. Статистические моменты поля. Принцип Гюйгенса для интенсивности

Вычислим *среднее поле* в точке наблюдения $\langle U(\vec{R}_p) \rangle$. При усреднении (17.57) по ансамблю реализаций случайной функции $\delta\varphi(\vec{r})$ под интегралом возникает множитель $\langle e^{ik\delta\varphi(\vec{r})} \rangle$. При его вычислении предположим, что случайные флуктуации фазы $\delta S(\vec{r}) = k\delta\varphi(\vec{r})$ статистически однородны и распределены по нормальному закону:

$$W(\delta S) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_S}} \exp\left\{-\frac{(\delta S)^2}{2\sigma_S^2}\right\}, \quad (17.58)$$

где $\sigma_S^2 = \langle (\delta S)^2 \rangle = Const$ - дисперсия флуктуаций фазы на экране. Для нормально распределенной величины δS имеем

$$\langle e^{i\delta S} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\delta S} W(\delta S) d(\delta S) = e^{-\sigma_S^2/2}. \quad (17.59)$$

С учетом этого приходим к следующему определению среднего поля:

$$\langle U(\vec{R}_p) \rangle = e^{-\sigma_S^2/2} U_d(\vec{R}_p). \quad (17.60)$$

Здесь $U_d(\vec{R}_p) = U(\vec{R}_p)|_{\delta S=0}$ есть поле $U(\vec{R}_p)$ (17.57), которое было бы в точке наблюдения \vec{R}_p , если бы случайные флуктуации фазы на экране отсутствовали ($\delta S \equiv 0$). При этом $e^{i\delta S} \equiv 1$ и (17.57) является представлением дифрагированного поля за экраном.

Таким образом, среднее (когерентное) поле за фазовым экраном с пространственно-однородными флуктуациями фазы δS отличается от невозмущенного $U_d(\vec{R}_p)$ только постоянным множителем $e^{-\sigma_S^2/2}$. Поведение $U_d(\vec{R}_p)$ может быть исследовано, например, в рамках метода стационарной фазы.

Среднюю интенсивность, как и раньше, будем отождествлять со вторым статистическим моментом:

$$\begin{aligned} \langle I(\vec{R}_p) \rangle &= \langle U(\vec{R}_p) U^*(\vec{R}_p) \rangle = \frac{k^2}{4\pi^2} \int_{\Sigma_0} d\vec{r}' \int_{\Sigma_0} d\vec{r}'' \frac{A_0(\vec{r}') A_0(\vec{r}'')}{|\vec{r}' - \vec{R}_p| |\vec{r}'' - \vec{R}_p|} \cos \theta(\vec{r}') \cos \theta(\vec{r}'') \times \\ &\times \exp\left\{ ik \left[|\vec{r}' - \vec{R}_p| - |\vec{r}'' - \vec{R}_p| + \bar{\varphi}(\vec{r}') - \bar{\varphi}(\vec{r}'') \right] \right\} \times \langle \exp\left\{ i \left[\delta S(\vec{r}') - \delta S(\vec{r}'') \right] \right\} \rangle. \end{aligned} \quad (17.61)$$

Если $\delta S(\vec{r})$ описывается нормальным распределением, то и разность фаз $\delta S(\vec{r}') - \delta S(\vec{r}'')$ также нормально распределена. В результате для статистически однородных флуктуаций имеем

$$\langle \exp\left\{ i \left[\delta S(\vec{r}') - \delta S(\vec{r}'') \right] \right\} \rangle = \exp\left\{ -\frac{1}{2} D_S(\vec{r}' - \vec{r}'') \right\}, \quad (17.62)$$

где $D_S(\vec{r}' - \vec{r}'') = \langle \left[\delta S(\vec{r}') - \delta S(\vec{r}'') \right]^2 \rangle$ - структурная функция флуктуаций фазы.

Прежде чем анализировать полученную формулу (17.61), произведем некоторые упрощения

1. Воспользуемся упрощениями (17.45), которые можно произвести в малоугловом приближении. При этом (17.61) приводится к следующему виду:

$$\begin{aligned} \langle I(\vec{R}_p) \rangle &= \frac{k^2}{4\pi^2 z_p^2} \int_{\Sigma_0} d\vec{r}' \int_{\Sigma_0} d\vec{r}'' A_0(\vec{r}') A_0(\vec{r}'') \exp\left\{ -\frac{1}{2} D_S(\vec{r}' - \vec{r}'') \right\} \times \\ &\times \exp\left\{ ik \left[\frac{(\vec{r}' - \vec{r}_p)^2}{2z_p} - \frac{(\vec{r}'' - \vec{r}_p)^2}{2z_p} + \bar{\varphi}(\vec{r}') - \bar{\varphi}(\vec{r}'') \right] \right\}. \end{aligned} \quad (17.63)$$

2. Введем в рассмотрение суммарные и разностные координаты:

$$\begin{aligned}\bar{r} &= \frac{1}{2}(\bar{r}' + \bar{r}''), \\ \bar{\rho} &= \bar{r}' - \bar{r}''.\end{aligned}\tag{17.64}$$

При этом, как легко проверить, старые переменные выражаются через новые в виде $\bar{r}' = \bar{r} + \bar{\rho}/2$, $\bar{r}'' = \bar{r} - \bar{\rho}/2$, а модуль якобиана перехода $J = \left| \frac{\partial(\bar{r}', \bar{r}'')}{\partial(\bar{r}, \bar{\rho})} \right| = 1$. После замены формула (17.63) представится в виде

$$\begin{aligned}\langle I(\bar{R}_p) \rangle &= \frac{k^2}{4\pi^2 z_p^2} \int_{\Sigma_r} d\bar{r} \int_{\Sigma_\rho} d\bar{\rho} A_0(\bar{r} + \bar{\rho}/2) A_0(\bar{r} - \bar{\rho}/2) \exp\left\{-\frac{1}{2} D_S(\bar{\rho})\right\} \times \\ &\times \exp\left\{ik \left[\frac{(\bar{r} - \bar{r}_p) \bar{\rho}}{z_p} + \bar{\varphi}(\bar{r} + \bar{\rho}/2) - \bar{\varphi}(\bar{r} - \bar{\rho}/2) \right]\right\},\end{aligned}\tag{17.65}$$

где $\Sigma_{r,\rho}$ - новые области интегрирования для переменных \bar{r} и $\bar{\rho}$.

3. Будем рассматривать статистически однородные и изотропные флуктуации фазы и выразим $D_S(\bar{\rho}) = D_S(\rho)$ через автокорреляционную функцию флуктуаций фазы $B_S(\rho) = \langle \delta S(\bar{r}) \delta S(\bar{r} + \bar{\rho}) \rangle$:

$$D_S(\rho) = 2[\sigma_S^2 - B_S(\rho)] = 2\sigma_S^2[1 - K_S(\rho)],\tag{17.66}$$

где $\sigma_S^2 = B_S(0)$ - дисперсия флуктуаций фазы, а $K_S(\rho) = B_S(\rho)/\sigma_S^2$ - коэффициент корреляции.

4. Коэффициент корреляции $K_S(\rho)$ по определению равен 1 при $\rho = 0$ и быстро убывает до 0 для разнота между точками, превосходящего характерный масштаб убывания l_S ($K_S(\rho) \rightarrow 0$ при $\rho > l_S$). При сильных флуктуациях фазы на экране, когда $\sigma_S^2 \gg 1$, основной вклад в интеграл (17.65) дает лишь малая окрестность значений ρ , лежащая вблизи $\rho = 0$, там, где функция $D_S(\rho)$ достаточно мала (напомним, что $D_S(\rho) \rightarrow 0$ при

$\rho \rightarrow 0$). Для малых ρ коэффициент корреляции $K_S(\rho)$ можно разложить в ряд Тейлора и ограничиться первыми неисчезающими членами:

$$K_S(\rho) \approx K_S(0) + \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\rho^2} K_S(0) \rho^2 = 1 - \frac{\rho^2}{2l_S^2} = 1 - \frac{\rho_x^2 + \rho_y^2}{2l_S^2}. \quad (17.67)$$

Здесь через соотношение $l_S^{-2} = -\frac{d^2}{d\rho^2} K_S(0)$, введен радиус корреляции флуктуаций фазы l_S , совпадающий по порядку величины с характерным линейным размером неоднородностей фазы на экране. В результате “режущий” фактор в формуле (17.65) приближенно принимает вид

$$\exp\left\{-\frac{1}{2} D_S(\rho)\right\} \approx \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{\sigma_S^2}{l_S^2} \rho^2\right\}. \quad (17.68)$$

Характерный размер области $\rho = \rho_{ef}$, который дает основной вклад в интеграл по $d\vec{\rho}$, можно оценить из условия $\sigma_S^2 \rho_{ef}^2 / 2l_S^2 \approx 1$, откуда получаем $\rho_{ef} \approx l_S / \sigma_S$.

5. Если значение ρ_{ef} намного меньше характерных масштабов $L_{x,y}$ изменений регулярной составляющей эйконала $\bar{\varphi}(\vec{r})$, определяемых вдоль осей координат x и y из соотношений

$$\left| \frac{1}{\bar{\varphi}(\vec{r})} \frac{\partial}{\partial x} \bar{\varphi}(\vec{r}) \right| \approx \frac{1}{L_x}, \quad \left| \frac{1}{\bar{\varphi}(\vec{r})} \frac{\partial}{\partial y} \bar{\varphi}(\vec{r}) \right| \approx \frac{1}{L_y}, \quad (17.69)$$

то регулярную разность фаз в разнесенных точках можно разложить в ряд Тейлора в точке $\vec{\rho} = 0$ и ограничиться первыми неисчезающими членами:

$$\bar{\varphi}\left(\vec{r} + \frac{\vec{\rho}}{2}\right) - \bar{\varphi}\left(\vec{r} - \frac{\vec{\rho}}{2}\right) \approx \vec{\nabla}_{\vec{r}} \bar{\varphi}(\vec{r}) \vec{\rho} = \langle \vec{\gamma}(\vec{r}) \rangle \vec{\rho}. \quad (17.70)$$

6. “Медленно” изменяющийся амплитудный фактор в (17.65) $A_0(\bar{r} + \bar{\rho}/2)A_0(\bar{r} - \bar{\rho}/2)$ по тем же причинам, что и в п.5, можно приближенно взять в совмещенных точках, т.е. при $\bar{\rho} = 0$:

$$A_0(\bar{r} + \bar{\rho}/2)A_0(\bar{r} - \bar{\rho}/2) \approx A_0^2(\bar{r}) = I_0(\bar{r}). \quad (17.71)$$

7. С учетом того, что при сильных флуктуациях фазы $\rho_{ef} \approx l_s/\sigma_s \ll l_s$, интегрирование по $d\bar{\rho}$ в (17.65) можно проводить в бесконечных пределах, а область интегрирования по суммарной координате \bar{r} практически совпадает со старой Σ_0 ($\Sigma_r \approx \Sigma_0$).

В результате проделанных упрощений получим

$$\langle I(\bar{R}_p) \rangle \approx \frac{k^2}{4\pi^2 z_p^2} \int_{\Sigma_0} I_0(\bar{r}) d\bar{r} \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{\rho} \exp\left\{-\frac{\sigma_s^2}{2l_s^2} \rho^2\right\} \times \exp\left\{ik \left[\frac{\bar{r} - \bar{r}_p}{z_p} + \langle \bar{\gamma}(\bar{r}) \rangle \right] \bar{\rho}\right\}. \quad (17.72)$$

Вычисление интеграла вида

$$J(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{\rho} \exp\{-\alpha\rho^2 + i\bar{\beta}\bar{\rho}\} \quad (17.73)$$

удобней проводить в полярных координатах $\bar{\rho} = (\rho, \varphi_\rho)$ и $\bar{\beta} = (\beta, \varphi_\beta)$. При этом интегрирование по $d\varphi_\rho$ приводит к функции Бесселя первого рода нулевого порядка - $J_0(x)$, а оставшийся интеграл по $d\rho$ есть табличный интеграл:

$$\begin{aligned} J(\alpha, \beta) &= \int_0^{\infty} \rho \exp\{-\alpha\rho^2\} d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi_\rho \exp\{i\beta\rho \cos(\varphi_\rho - \varphi_\beta)\} = \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} \rho e^{-\alpha\rho^2} J_0(\beta\rho) d\rho = \frac{\pi}{\alpha} \exp\left\{-\frac{\beta^2}{4\alpha}\right\}. \end{aligned} \quad (17.74)$$

В нашем случае $\alpha = \sigma_S^2 / 2l_S^2$, $\bar{\beta} = k \left[\frac{\bar{r} - \bar{r}_p}{z_p} + \langle \bar{\gamma}(\bar{r}) \rangle \right]$, и интегрирование (17.72) по

разностной переменной $d\bar{\rho}$ приводит к следующему выражению:

$$\langle I(\bar{R}_p) \rangle \approx \frac{k^2 l_S^2}{2\pi z_p^2 \sigma_S^2} \int_{\Sigma_0} I_0(\bar{r}) \exp \left\{ -\frac{k^2 l_S^2}{2z_p^2 \sigma_S^2} [\bar{r}_p - \langle \bar{r}(\bar{r}) \rangle]^2 \right\} d\bar{r}, \quad (17.75)$$

Согласно определению случайные флуктуации фазы δS и угла прихода $\delta \bar{\gamma}$ связаны между собой соотношением $\delta \bar{\gamma}(\bar{r}) = \bar{\nabla}_{\bar{r}} \delta \varphi(\bar{r}) = \frac{1}{k} \bar{\nabla}_{\bar{r}} \delta S(\bar{r})$. В § 7, посвященном линейным преобразованиям случайных процессов, нами было показано, что автокорреляционная функция $B_x(\tau) = \langle x(t)x(t+\tau) \rangle$ стационарного процесса $x(t)$ и автокорреляционная функция $B_y(\tau) = \langle y(t)y(t+\tau) \rangle$ его производной $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ связаны между собой соотношением $B_y(\tau) = -\frac{d^2}{d\tau^2} B_x(\tau)$ (см.(7.29)). Аналогичную связь можно записать и для статистически однородных полей $\delta \varphi(\bar{r})$ и $\delta \bar{\gamma}(\bar{r})$.

С учетом того, что вектор $\delta \bar{\gamma}(\bar{r})$ представляет собой сумму двух ортогональных составляющих

$$\delta \bar{\gamma}(\bar{r}) = \delta \gamma_x(\bar{r}) \bar{e}_x + \delta \gamma_y(\bar{r}) \bar{e}_y,$$

где $\delta \gamma_x(\bar{r}) = \frac{\partial}{\partial x} \delta \varphi(\bar{r})$ и $\delta \gamma_y(\bar{r}) = \frac{\partial}{\partial y} \delta \varphi(\bar{r})$, дисперсия случайного векторного поля отклонений лучей $\delta \bar{\gamma}$ имеет вид

$$\sigma_{\bar{\gamma}}^2 = \langle \delta \bar{\gamma}^2 \rangle = \langle \delta \gamma_x^2 \rangle + \langle \delta \gamma_y^2 \rangle. \quad (17.76)$$

Для определения связи между дисперсиями флуктуаций углов выхода из экрана $\langle \delta \gamma_x^2 \rangle$, $\langle \delta \gamma_y^2 \rangle$ и дисперсией флуктуаций фазы на экране σ_S^2 построим вначале следующие

автокорреляционные функции:

$$B_{xx}^{\gamma}(\vec{r}', \vec{r}'') = \langle \delta\gamma_x(\vec{r}') \delta\gamma_x(\vec{r}'') \rangle = \frac{\partial^2}{\partial x' \partial x''} \langle \delta\varphi(\vec{r}') \delta\varphi(\vec{r}'') \rangle = \frac{\partial^2}{\partial x' \partial x''} B_{\varphi}(\vec{r}', \vec{r}''), \quad (17.77-a)$$

$$B_{yy}^{\gamma}(\vec{r}', \vec{r}'') = \langle \delta\gamma_y(\vec{r}') \delta\gamma_y(\vec{r}'') \rangle = \frac{\partial^2}{\partial y' \partial y''} \langle \delta\varphi(\vec{r}') \delta\varphi(\vec{r}'') \rangle = \frac{\partial^2}{\partial y' \partial y''} B_{\varphi}(\vec{r}', \vec{r}''), \quad (17.77-б)$$

Подобные формулы можно записать и для смешанных корреляторов в разнесенных точках: B_{xy}^{γ} и B_{yx}^{γ} . Для статистически однородного поля $B_{\varphi}(\vec{r}', \vec{r}'') = B_{\varphi}(\vec{r}' - \vec{r}'') = B_{\varphi}(\vec{\rho})$ и формулы (17.77) аналогично (7.19) могут быть переписаны в виде

$$B_{xx}^{\gamma}(\vec{\rho}) = -\frac{\partial^2}{\partial \rho_x^2} B_{\varphi}(\vec{\rho}), \quad (17.78-a)$$

$$B_{yy}^{\gamma}(\vec{\rho}) = -\frac{\partial^2}{\partial \rho_y^2} B_{\varphi}(\vec{\rho}). \quad (17.78-б)$$

Учитывая теперь, что $\langle \delta\gamma_x^2 \rangle = B_{xx}^{\gamma}(0)$, $\langle \delta\gamma_y^2 \rangle = B_{yy}^{\gamma}(0)$, а также связь между автокорреляционными функциями эйконала и фазы: $B_{\varphi}(\vec{\rho}) = \frac{1}{k^2} B_S(\vec{\rho}) = \frac{\sigma_S^2}{k^2} K_S(\vec{\rho})$, окончательно получим

$$\sigma_{\gamma}^2 = -\frac{\sigma_S^2}{k^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial \rho_x^2} K_S(\vec{\rho}) + \frac{\partial^2}{\partial \rho_y^2} K_S(\vec{\rho}) \right]_{\vec{\rho}=0}. \quad (17.79)$$

Производные $\frac{\partial^2}{\partial \rho_{x,y}^2} K_S(0)$ определяют характерные масштабы корреляции (размеры неоднородностей) вдоль осей координат l_{sx} и l_{sy} . Для изотропных флуктуаций эти значения совпадают: $l_{sx} = l_{sy} = l_s$, $K_S(\vec{\rho})$ представляется в виде (17.67), и согласно (17.79) мы получаем следующее соотношение:

$$\sigma_\gamma^2 = 2 \frac{\sigma_S^2}{k^2 l_S^2}. \quad (17.80)$$

С учетом найденной связи между дисперсиями перепишем (17.75) в окончательном виде:

$$\langle I(\vec{R}_p) \rangle = \frac{1}{\pi z_p^2 \sigma_\gamma^2} \int_{\Sigma_0} I_0(\vec{r}) \exp \left\{ -\frac{1}{z_p^2 \sigma_\gamma^2} [\vec{r}_p - \langle \vec{f}(\vec{r}) \rangle]^2 \right\} d\vec{r}. \quad (17.81)$$

Полученная формула играет такую же роль для средней интенсивности $\langle I(\vec{R}_p) \rangle$, что и дифракционный принцип Гюйгенса для поля $U(\vec{R}_p)$: средняя интенсивность в произвольной точке наблюдения \vec{R}_p представляется в виде суммы интенсивностей от каждого элемента поверхности $d\vec{r}$ фазового экрана с учетом диаграммы направленности рассеянного излучения (индикатриссы рассеяния), которая определяется как

$$F(\vec{r}) = \frac{1}{\pi z_p^2 \sigma_\gamma^2} \exp \left\{ -\frac{1}{z_p^2 \sigma_\gamma^2} [\vec{r}_p - \langle \vec{f}(\vec{r}) \rangle]^2 \right\}. \quad (17.82)$$

Таким образом, при $\sigma_S^2 \gg 1$ в точке наблюдения \vec{R}_p волновые поля, приходящие от различных точек фазового экрана ($z=0$), складываются “по интенсивности”, т.е. некогерентно.

Проведем теперь сравнение полученного выражения (17.81) с результатами дифракционного и геометрического анализа. Выражение для $\langle I(\vec{R}_p) \rangle$ представляется в виде интеграла лапласовского типа. Если $z_p \sigma_\gamma \ll L_{x,y}$, то основной вклад в интеграл дают небольшие области \vec{r} фазового экрана, расположенные вблизи точек, где обращается в 0 показатель степени экспоненты:

$$\vec{r}_p = \langle \vec{f}(\vec{r}) \rangle = \vec{r} + z_p \langle \vec{\gamma}(\vec{r}) \rangle. \quad (17.83)$$

Мы снова получили хорошо известное нам абберационное уравнение, но только для

регулярной составляющей фазы волны. Его решениями являются регулярные значения действительных корней: $\vec{r} = \langle \vec{r}_m \rangle$, $m=1,2,..N$. Асимптотическую оценку интеграла можно получить, произведя некоторые упрощения аналогично тому, как это мы делали в методе стационарной фазы. Так, для произвольно выбранного корня, например m -го, аналогично (17.27) линеаризуем $\langle \vec{f}(\vec{r}) \rangle$ в окрестности точки $\vec{r} = \langle \vec{r}_m \rangle$. Положив $\vec{r} = \langle \vec{r}_m \rangle + \delta\vec{r}$, для небольших смещений $\delta\vec{r}$ можно положить:

$$\langle \vec{f}(\vec{r}) \rangle = \langle \vec{f}(\langle \vec{r}_m \rangle + \delta\vec{r}) \rangle \approx \langle \vec{f}(\langle \vec{r}_m \rangle) \rangle + (\delta\vec{r} \vec{\nabla}_{\vec{r}}) \langle \vec{f}(\langle \vec{r}_m \rangle) \rangle. \quad (17.84)$$

С учетом того, что $\vec{r}_p = \langle \vec{f}(\langle \vec{r}_m \rangle) \rangle$, в показателе степени экспоненты в (17.81) вблизи корня $\vec{r} = \langle \vec{r}_m \rangle$ можно приближенно записать:

$$\vec{r}_p - \langle \vec{f}(\vec{r}) \rangle \approx (\delta\vec{r}_m \vec{\nabla}_{\vec{r}}) \langle \vec{f}(\langle \vec{r}_m \rangle) \rangle. \quad (17.85)$$

Характерные размеры области $\Delta_m = |\delta\vec{r}|$, вносящей основной вклад в интеграл (17.81), можно оценить, приравняв показатель степени экспоненты единице, т.е. положив $\left| (\delta\vec{r} \vec{\nabla}_{\vec{r}}) \langle \vec{f}(\langle \vec{r}_m \rangle) \rangle \right| \approx z_p \sigma_\gamma$. Если все области Δ_m достаточно малы, не перекрываются и лежат вдали от границы области интегрирования (изолированные корни), то при оценке вклада каждого корня можно, во-первых, множитель $I_0(\vec{r})$ в окрестности точки $\vec{r} = \vec{r}_m$ считать постоянным и равным $I_0(\vec{r}_m)$, во-вторых, пределы интегрирования по $d\vec{r}$ растянуть от $-\infty$ до ∞ . В результате для вклада m -го корня получаем следующую асимптотическую оценку:

$$\begin{aligned} \langle I_m(\vec{R}_p) \rangle &\approx \frac{1}{\pi z_p^2 \sigma_\gamma^2} I_0(\vec{r}_m) \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{\pi z_p^2 \sigma_\gamma^2} \left[(\delta\vec{r}_m \vec{\nabla}_{\vec{r}}) \langle \vec{f}(\langle \vec{r}_m \rangle) \rangle \right]^2 \right\} d(\delta\vec{r}_m) = \\ &= \frac{I_0(\vec{r}_m)}{|\tilde{D}(\langle \vec{r}_m \rangle)|}, \end{aligned} \quad (17.86)$$

где $\tilde{D}(\langle \vec{r}_m \rangle)$ - определитель, построенный из первых производных от регулярной составляющей $\langle \vec{f}(\vec{r}) \rangle = \vec{r} + z_p \langle \vec{\gamma}(\vec{r}) \rangle$ и вычисленный в точке $\vec{r} = \langle \vec{r}_m \rangle$:

$$\begin{aligned} \tilde{D}(\langle \vec{r}_m \rangle) &= \left[\frac{\partial \langle f_x \rangle}{\partial x} \frac{\partial \langle f_y \rangle}{\partial y} - \left(\frac{\partial \langle f_x \rangle}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \langle f_y \rangle}{\partial x} \right) \right]_{\vec{r}=\langle \vec{r}_m \rangle} = \\ &= \left[\left(1 + z_p \frac{\partial \langle \gamma_x \rangle}{\partial x} \right) \left(1 + z_p \frac{\partial \langle \gamma_y \rangle}{\partial y} \right) - z_p^2 \left(\frac{\partial \langle \gamma_x \rangle}{\partial y} \frac{\partial \langle \gamma_y \rangle}{\partial x} \right) \right]_{\vec{r}=\langle \vec{r}_m \rangle}. \end{aligned} \quad (17.87)$$

Полная средняя интенсивность в точке наблюдения определится как сумма вкладов от всех регулярных корней:

$$\begin{aligned} \langle I(\vec{R}_p) \rangle &= \sum_{m=1}^N \langle I_m(\vec{R}_p) \rangle \approx \\ &\approx \sum_{m=1}^N I_0(\vec{r}_m) \left[\left(1 + z_p \frac{\partial \langle \gamma_x \rangle}{\partial x} \right) \left(1 + z_p \frac{\partial \langle \gamma_y \rangle}{\partial y} \right) - z_p^2 \left(\frac{\partial \langle \gamma_x \rangle}{\partial y} \frac{\partial \langle \gamma_y \rangle}{\partial x} \right) \right]_{\vec{r}=\langle \vec{r}_m \rangle}^{-1}. \end{aligned} \quad (17.88)$$

Комментарии

1. При рассмотрении МФЭ мы использовали лишь упрощение, связанное с малоугловым распространением и не накладывали условия дальней зоны, когда в разложении фазы волны на экране (17.46) можно было бы пренебречь слагаемым $kr^2/2z_p \leq kL^2/2z_p \ll 1$ (здесь $L \approx \sqrt{\Sigma_0}$ - характерный размер области интегрирования). Это означает, что полученные формулы справедливы и в ближней зоне, когда $kL^2/2z_p > 1$.

2. Из сравнения формул, полученных в приближении МГО, учета дифракции и случайных факторов, видно, что случайные флуктуации фазы на экране приводят к уничтожению когерентности волн, приходящих в точку наблюдения от различных участков экрана (когерентная составляющая в (17.52) при сильных флуктуациях фазы обращается в 0). Как результат, средняя интенсивность в точке наблюдения определяется так же, как и в приближении МГО, но только с учетом не полной фазы, а её регулярной составляющей (регулярного угла отклонения).

3. Отсутствие в конечном результате (17.88) характерного угла рассеяния σ_γ связано с рассмотрением случая изолированных корней. Если в плоскости наблюдения после прохождения волной слоя с неоднородностями показателя преломления - $n(\vec{R})$ возникают регулярные фокальные образования (фокусы, каустики), то среди корней абберационного уравнения так же, как и в случае дифракции, появляются сливающиеся (кратные). В этом случае для сливающейся пары (корень кратности 2) $\tilde{D}(\langle \vec{r}_m \rangle) \rightarrow 0$ и вклад $\langle I_m(\vec{R}_p) \rangle \rightarrow \infty$. Это означает, что в разложении (17.84) уже недостаточно линейных слагаемых, а необходимо учитывать члены более высокого порядка. В результате в конечные выражения для вкладов войдет угол рассеяния σ_γ , а само значение $\langle I_m(\vec{R}_p) \rangle$ представится через соответствующие спецфункции. Например, при нахождении наблюдателя вблизи гладкой каустики средняя интенсивность $\langle I_m(\vec{R}_p) \rangle$ будет выражаться через **функцию параболического цилиндра**.

В качестве простейшего *примера* рассмотрим задачу о прохождении плоской волны

$$U_0(\vec{R}) = A_0 e^{ikz}, \quad A_0 = \text{Const.}, \quad (17.89)$$

через бесконечный в поперечном направлении (по \vec{r}) и конечной толщины в продольном направлении (по z) случайно-неоднородный слой. Предполагается, что волна падает на слой ортогонально, слой с неоднородностями статистически однородный и изотропный. При ортогональном падении плоской волны регулярная рефракция лучей в слое отсутствует. Следовательно, $\langle \gamma(\vec{r}) \rangle = 0$, $\langle \vec{f}(\vec{r}) \rangle = \vec{r}$, и формула (17.81) принимает следующий вид:

$$\langle I(\vec{R}_p) \rangle = \frac{A_0^2}{\pi z_p^2 \sigma_\gamma^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{z_p^2 \sigma_\gamma^2} (\vec{r}_p - \vec{r})^2 \right\} d\vec{r} = A_0^2 = I_0. \quad (17.90)$$

Оказалось, что средняя интенсивность в произвольной точке наблюдения за неограниченным фазовым экраном совпадает с интенсивностью падающей волны I_0 . Этот неожиданный результат легко объясняется из закона сохранения энергии.

ЗАДАЧИ

1. На неограниченный фазовый экран ($z=0$) ортогонально падает плоская волна $U_0(\vec{R}, t) = A_0 e^{i(\vec{k}\vec{R} - \omega t)}$, где $\vec{k} = k\vec{e}_z$, $k = \omega/c$. Используя принцип Гюйгенса, рассчитать среднее поле и среднюю интенсивность за экраном для полностью когерентного поля ($\sigma_S^2 = 0$).

Решение. Согласно определению, фаза исходной волны в плоскости фазового экрана ($z=0$) равна нулю ($S_0 = 0$). Кроме того, случайные флуктуации фазы в “бесконечно тонком” экране отсутствуют ($\delta S = 0$). Следовательно, поле на выходе из экрана ($z=0$) имеет вид

$$U|_{z=0} \equiv U_0(\vec{r}, t) \equiv U_0(x, y, t) = A_0 e^{-i\omega t}. \quad (1)$$

Так как направление распространения исходной плоской волны совпадает с направлением оси OZ ($\vec{k} = k\vec{e}_z$), решение задачи можно проводить в малоугловом приближении. В этом случае в формуле (17.57), выражающей принцип Гюйгенса, можно положить $\cos\theta = 1$. В результате с учетом (1) в произвольной точке наблюдения за экраном поле определяется так:

$$U(\vec{R}_p) = \frac{kU_0 e^{-i\omega t}}{2\pi i} \int_{\Sigma_0} \frac{e^{ikR}}{R} dx dy, \quad \text{где } R = |\vec{r} - \vec{R}_p|. \quad (2)$$

Из-за того что в рассматриваемой задаче случайные флуктуации фазы отсутствуют, статистически среднее поле $\bar{U}(\vec{R}_p)$ совпадает с дифракционным значением (2): $\bar{U}(\vec{R}_p) = U(\vec{R}_p)$. В приближении френелевской дифракции (малоугловом приближении) представим расстояние $R = |\vec{r} - \vec{R}_p|$ от произвольной точки экрана $\vec{R} = (0, \vec{r})$ до точки наблюдения $\vec{R}_p = (z_p, x_p, y_p)$ (см. рис.17.8) в виде

$$R = \left[z_p^2 + (x_p - x)^2 + (y_p - y)^2 \right]^{1/2} \approx z_p + \frac{(x_p - x)^2 + (y_p - y)^2}{2z_p}. \quad (3)$$

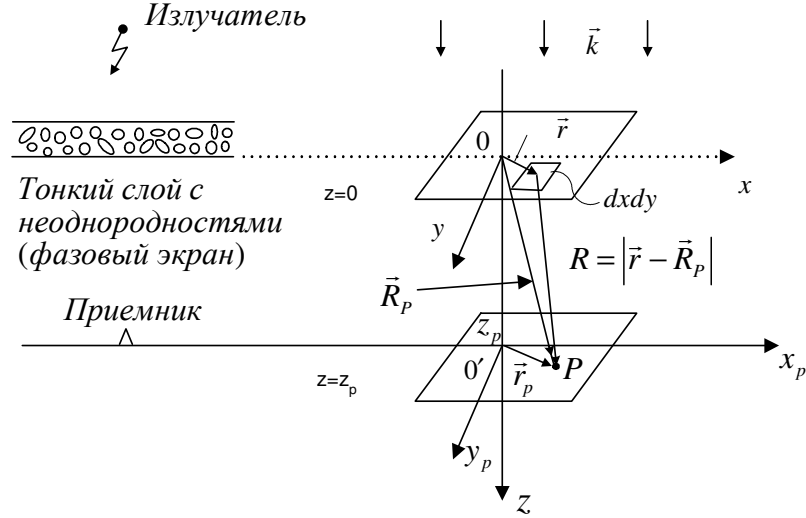


Рис. 17.8

Произведя далее в выражении (2) замену переменных $x' = x - x_p$, $y' = y - y_p$, получим

$$\bar{U}(\vec{R}_p) = \frac{k}{2\pi i z_p} A_0 e^{i(kz_p - \omega t)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ ik \left(\frac{x'^2}{2z_p} + \frac{y'^2}{2z_p} \right) \right\} dx' dy'. \quad (4)$$

В знаменателе подынтегрального выражения для $\bar{U}(\vec{R}_p)$ мы приближенно положили $R \approx z_p$.

Каждый из интегралов в последнем выражении равен $\sqrt{\frac{2\pi z_p}{ik}}$. Таким образом, окончательно

можно записать

$$\bar{U}(\vec{R}_p) = A_0 e^{i(kz_p - \omega t)}, \quad |\bar{U}(\vec{R}_p)| = A_0. \quad (5)$$

Теперь не составляет труда определить когерентную составляющую средней интенсивности $\bar{I}_{\text{коз}} = |\bar{U}(\vec{R}_p)|^2$. Так как $U(\vec{R}_p) = \bar{U}(\vec{R}_p)$, то $|U(\vec{R}_p)| = |\bar{U}(\vec{R}_p)|$ и

$$\bar{I}_{\text{коз}} = A_0^2 = I_0. \quad (6)$$

Полученные результаты вполне естественны. Поскольку флуктуации фазы и поглощение волны на экране отсутствуют, то при бесконечном фазовом экране (бесконечном фронте волны) волна за экраном по-прежнему остается плоской с постоянными амплитудой и интенсивностью.

2. На “тонкий” слой, безграничный в поперечном направлении и конечной толщины в продольном, со статистически однородными неоднородностями показателя преломления ортогонально падает плоская волна. На выходе из слоя ($z=0$) находится непрозрачная круглая заслонка радиусом a . Считая, что регулярная рефракция в неоднородном слое отсутствует, определить среднюю интенсивность поля $\bar{I}(z_p)$ на оси заслонки, пользуясь принципом Гюйгенса для полностью некогерентного поля ($\sigma_s^2 \gg 1$).

Решение. В качестве исходного используем выражение (17.90), полученное для случая сильных флуктуаций фазы ($\sigma_s^2 \gg 1$). Поместив начало декартовой системы координат в центр заслонки, в произвольной точке наблюдения за экраном получим

$$\langle I(\bar{R}_p) \rangle = \frac{A_0^2}{\pi z_p^2 \sigma_\gamma^2} \int_{\Sigma_0} \exp \left\{ -\frac{1}{z_p^2 \sigma_\gamma^2} (\bar{r}_p - \bar{r})^2 \right\} d\bar{r} = A_0^2 = I_0. \quad (1)$$

Здесь Σ_0 - область интегрирования, представляющая собой бесконечную плоскость $z = 0$, за вычетом круга радиусом a . По условию задачи точка наблюдения находится на оси заслонки, следовательно, мы должны положить $\bar{r}_p = 0$. Интеграл в (1) проще вычислять в полярных координатах $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $\varphi = \arctg(x/y)$, в которых он принимает вид

$$\begin{aligned} \bar{I} &= \frac{I_0}{\pi z_p^2 \sigma_\gamma^2} \int_a^\infty \rho e^{-\frac{\rho^2}{z_p^2 \sigma_\gamma^2}} d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi = \\ &= \frac{I_0}{z_p^2 \sigma_\gamma^2} \int_a^\infty e^{-\frac{t}{z_p^2 \sigma_\gamma^2}} dt = I_0 e^{-\frac{a^2}{z_p^2 \sigma_\gamma^2}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Проанализируем полученный результат. Дисперсия флуктуаций углов рассеяния σ_γ^2 связана с дисперсией флуктуаций фазы σ_s^2 соотношением (17.80): $\sigma_\gamma^2 = 2 \frac{\sigma_s^2}{k^2 l_s^2}$.

Следовательно,

$$\bar{I} = I_0 \exp \left\{ -\frac{a^2 k^2 l_s^2}{2 \sigma_s^2 z_p^2} \right\} = I_0 \exp \left\{ -\frac{2 \pi^2 a^2 l_s^2}{\sigma_s^2 z_p^2 \lambda^2} \right\}. \quad (3)$$

Из полученного выражения видно, что при $\sigma_s^2 \rightarrow \infty$ $\bar{I} \rightarrow I_0$. С другой стороны, при большой, но фиксированной дисперсии флуктуаций фазы на экране ($\sigma_s^2 \gg 1$) предельное значение $\bar{I} = I_0$ будет достигаться тем быстрее, чем больше длина волны λ и расстояние до экрана z_p , а также чем меньше радиус заслонки a и масштаб неоднородностей фазы l_s . Физически это означает, что волна с достаточно большой (по сравнению с радиусом заслонки a) длиной λ “не замечает” заслонки. При бесконечно большом радиусе заслонки ($a \rightarrow \infty$), как и следовало ожидать, $\bar{I} \rightarrow 0$ (заслонка перекрывает все падающее излучение).

Случай $\sigma_s^2 \rightarrow 0$ полученным выражением не описывается, поскольку в соответствии с условием задачи в качестве исходного было взято выражение для \bar{I} , справедливое только для $\sigma_s^2 \gg 1$.

3. На длиннофокусную тонкую линзу с мелкомасштабными неоднородностями показателя преломления внутри ортогонально падает плоская волна $U_0(\vec{R}) = A_0 e^{ikz}$ (рис. 17.9).

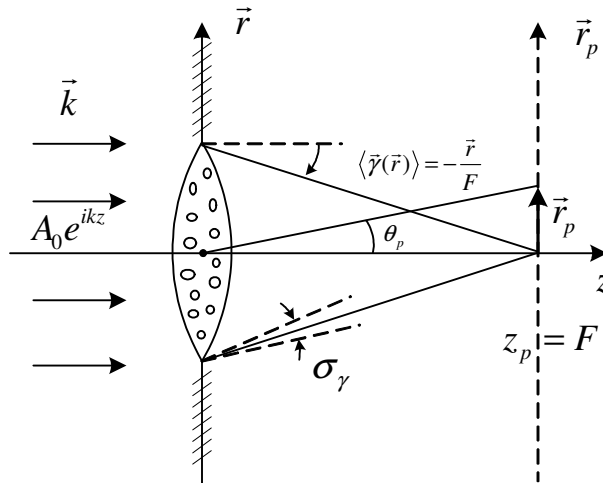


Рис. 17.9

В приближении сильных, статистически однородных и изотропных флуктуаций фазы ($\sigma_s^2 \gg 1$) в круглом раскрыве линзы ($0 \leq r \leq a$) и заданной корреляционной функции $B_s(\rho)$ определить распределения среднего поля и средней интенсивности в фокальной плоскости линзы ($z_p = F$, где F - фокальная длина линзы). Считать, что случайное рассеяние лучей происходит на малые углы.

Решение. Тонкую линзу, воздействующую на проходящую сквозь неё плоскую волну, можно рассматривать как тонкий фазовый корректор (фазовый экран). После прохождения на выходе линзы падающее поле приобретает вид

$$U(\vec{R}) = A_0 \exp\{i[\bar{S}(\vec{r}) + \delta S(\vec{r})]\}, \quad (1)$$

где регулярный набег фазы для идеальной линзы равен

$$\bar{S}(\vec{r}) = -k \frac{r^2}{2F}. \quad (2)$$

Регулярный угол преломления $\langle \vec{\gamma}(\vec{r}) \rangle$ лучей на выходе длиннофокусной линзы определяется согласно формуле (17.70) как

$$\langle \vec{\gamma}(\vec{r}) \rangle = \frac{1}{k} \vec{\nabla}_{\vec{r}} \langle \bar{S}(\vec{r}) \rangle = -\frac{\vec{r}}{F}. \quad (3)$$

Для длиннофокусных линз должно выполняться неравенство $r/F \leq a/F \ll 1$. При этом, учитывая, что согласно определению случайное рассеяние лучей происходит на малые углы вблизи регулярного отклонения (3), решение задачи будем проводить в рамках малоуглового приближения.

Среднее поле в произвольной точке наблюдения, находящейся за фазовым экраном (линзой), задается выражением (17.60), где $U_d(\vec{R}_p)$ - дифракционное значение поля, определяемое формулой (17.57) при отсутствии случайных флуктуаций фазы ($\delta S \equiv 0$). Воспользовавшись определением средней фазы (2) и упрощением (3) в первой задаче, для фокальной плоскости линзы ($z_p = F$) дифракционное поле $U_d(\vec{R}_p)$ мы определяем так:

$$U_d(F, \vec{r}_p) \approx \frac{kA_0}{2\pi iF} e^{ik(F+r_p^2/2F)} \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} \exp\left\{ik \frac{rr_p}{F} \cos(\varphi - \varphi_p)\right\} d\varphi. \quad (4)$$

Мы записали интеграл по поверхности фазового экрана Σ_0 в полярных координатах $\vec{r} = (r, \varphi)$ и $\vec{r}_p = (r_p, \varphi_p)$. Интегрирование по углу приводит к следующему выражению:

$$U_d(F, r_p) \approx \frac{kA_0}{iF} e^{ik(F+r_p^2/2F)} \int_0^a r J_0\left(k \frac{r_p}{F} r\right) dr. \quad (5)$$

При вычислении оставшегося интеграла по dr введем новую переменную $x = kr\theta_p$ и обозначение $t = ka\theta_p$, где $\theta_p = r_p/F$ - угловое смещение наблюдателя относительно центра линзы (см. рис. 17.9). В результате (5) преобразуется к виду

$$U_d(F, r_p) \approx \frac{ka^2 A_0}{iF} e^{ikF(1+\theta_p^2/2)} \frac{1}{t^2} \int_0^t x J_0(x) dx = U_F \cdot \left[\frac{2J_1(t)}{t} \right], \quad (6)$$

где $U_F = \frac{ka^2 A_0}{2iF} e^{ikF(1+\theta_p^2/2)}$. При вычислении мы воспользовались табличным значением неопределенного интеграла $\int x J_0(x) dx = x J_1(x)$, где $J_1(x)$ - функция Бесселя первого рода первого порядка.

Таким образом, для среднего поля в фокальной плоскости мы получаем следующее выражение:

$$\langle U(F, r_p) \rangle \approx U_F \left[\frac{2J_1(t)}{t} \right] e^{-\sigma_3^2/2}, \quad (7)$$

Для ответа на второй вопрос воспользуемся выражением для средней интенсивности (17.81), которое применительно к нашей задаче принимает вид

$$\langle I(F, \vec{r}_p) \rangle = \frac{A_0^2}{\pi F^2 \sigma_\gamma^2} \int_{\Sigma_0} \exp \left\{ -\frac{1}{F^2 \sigma_\gamma^2} [\vec{r}_p - \langle \vec{f}(\vec{r}) \rangle]^2 \right\} d\vec{r}. \quad (8)$$

Согласно формуле (17.56) определим $\langle \vec{f}(\vec{r}) \rangle = \vec{r} + z_p \langle \vec{\gamma}(\vec{r}) \rangle$. С учетом (3) для расстояния $z_p = F$ получим $\langle \vec{f}(\vec{r}) \rangle = \vec{r} - F \frac{\vec{r}}{F} = 0$. В результате вычисление (8) дает

$$\langle I(F, r_p) \rangle = I_{\max} e^{-\theta_p^2 / \sigma_\gamma^2}, \text{ где } I_{\max} = \frac{a^2 A_0^2}{F^2 \sigma_\gamma^2}.$$

Для окончательного ответа нам необходимо выразить дисперсию углов разброса излучения σ_γ^2 через заданную корреляционную функцию фазы $B_S(\rho)$. Воспользовавшись связью (17.80) между дисперсиями σ_γ^2 и σ_S^2 ($\sigma_\gamma^2 = 2\sigma_S^2 / k^2 l_S^2$) а также определением (17.67) характерного размера l_S неоднородностей фазы ($l_S^{-2} = -B_S''(0) / \sigma_S^2$) получим

$$\sigma_\gamma^2 = \frac{2}{k^2} |B_S''(0)|.$$

4. Плоская волна $U_0(\vec{R}) = A_0 e^{i\vec{k}\vec{R}}$, где $\vec{k} = k\vec{e}_z$, $k = \omega/c$ падает ортогонально на неоднородный слой конечной толщины в продольном направлении. Показатель преломления среды внутри слоя $n = const$. Толщина слоя h изменяется случайным образом от точки к точке ($h = h(x, y)$). Случайное поле толщин $h = h(x, y)$ статистически однородно и изотропно: $\langle h \rangle = h_0$, $\sigma_h^2 = const$, $B_h(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = B_h(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$. Выразить среднее значение поля и интенсивности плоской волны после прохождения слоя как функции h, n, B_h , рассматривая слой как фазовый экран.

Решение. Будем считать, что вне слоя волна распространяется в вакууме ($n=1$). Изобразим заданный слой в системе координат x, y, z (см. рис. 17.10) и определим среднее значение фазы $\bar{S}(\vec{r})$ и дисперсию флуктуаций σ_S^2 на выходе из слоя. Случайные флуктуации $S(\vec{r})$ обусловлены случайными вариациями толщины слоя h . В малоугловом приближении

дополнительная фазовая модуляция, возникающая вследствие отличия n от 1 и разной толщины слоя, равна

$$S(x, y) = kh(x, y)(n - 1) . \quad (1)$$

В силу того, что $n = Const$ и $\bar{h} = Const$, средний набег фазы $S(\bar{r})$ на экране также является постоянной величиной:

$$\bar{S} = k(n - 1)\bar{h} = Const . \quad (2)$$

Флуктуации фазы $\delta S(x, y)$ на экране, обусловленные случайным полем толщин $h(\bar{r})$, согласно (1) и (2) можно записать в виде

$$\delta S(x, y) = S - \bar{S} = k(n - 1) \delta h(x, y) . \quad (3)$$

Отсюда находим связь между корреляционными функциями фазы $B_S(\rho)$ и толщин $B_h(\rho)$:

$$B_S(\rho) = k^2(n - 1)^2 B_h(\rho) . \quad (4)$$

Положив $\rho = 0$, находим также связь между дисперсиями флуктуаций фазы на экране σ_S^2 и толщины слоя σ_h^2 :

$$\sigma_S^2 = k^2(n - 1)^2 \sigma_h^2 . \quad (5)$$

Учитывая, что по условию задачи $\sigma_h^2 = Const$, приходим к выводу, что и $\sigma_S^2 = Const$.

Для вычисления среднего поля воспользуемся формулой (17.60)

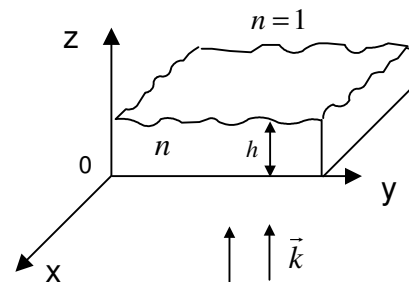


Рис.17.10

$$\langle U(\vec{R}_p) \rangle = e^{-\sigma_s^2/2} U_d(\vec{R}_p), \quad (6)$$

где $U_d(\vec{R}_p)$ – дифракционное значение поля в точке наблюдения, которое согласно (17.57) равно

$$U_d(\vec{R}_p) = \frac{kA_0}{2\pi i} e^{i\bar{S}(\vec{r})} \int_{\Sigma_0} d\vec{r} \cos \theta(\vec{r}) \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{R}_p|}}{|\vec{r}-\vec{R}_p|}. \quad (7)$$

Найденное выражение является окончательным ответом на первый вопрос задачи. Для конкретизации $U_d(\vec{R}_p)$ необходимо задать область интегрирования Σ_0 . Например, если Σ_0 представляет собой бесконечную плоскость, то, как было показано в задаче 1, в процессе интегрирования мы приходим к результату

$$U_d(\vec{R}_p) = \frac{kA_0}{2\pi i} e^{i\bar{S}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \theta(\vec{r}) \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{R}_p|}}{|\vec{r}-\vec{R}_p|} d\vec{r} = A_0 e^{i(\bar{S}+kz_p)}. \quad (8)$$

Учитывая теперь найденные значения средней фазы \bar{S} и её дисперсии σ_s^2 , среднее поле (6) в произвольной точке за экраном определяется так:

$$\bar{U}(P) = U_0 \exp \left\{ ik \left[z_p + (n-1)\bar{h} \right] - \frac{k^2(n-1)^2 \sigma_h^2}{2} \right\}. \quad (9)$$

Прежде чем переходить ко второму вопросу задачи, рассмотрим некоторые соотношения между статистическими характеристиками фазы волны и толщин неоднородного слоя. Согласно (4) вычислим вторую производную от $B_S(\rho)$ в точке $\rho = 0$:

$$B_S''(0) = k^2(n-1)^2 B_h''(0). \quad (10)$$

По вторым производным $B_S''(0)$ и $B_h''(0)$ введем в рассмотрение характерные размеры флуктуаций фазы l_s и толщин l_h :

$$\frac{1}{l_s^2} = -\frac{B_s'(0)}{\sigma_s^2}, \quad \frac{1}{l_h^2} = -\frac{B_h'(0)}{\sigma_h^2}. \quad (11)$$

При этом формула (10) может быть переписана в следующем виде:

$$\frac{\sigma_s^2}{l_s^2} = k^2(n-1)^2 \frac{\sigma_h^2}{l_h^2}. \quad (12)$$

Из последнего равенства с учетом соотношения для дисперсий (5) следует, что $l_s \equiv l_h$, т.е. характерные масштабы флуктуаций толщины слоя и фазы на выходе из экрана совпадают.

Перейдем теперь к определению средней интенсивности поля, которая определяется выражением (17.90):

$$\bar{I}(\bar{R}_p) = \frac{I_0}{\pi z_p^2 \sigma_\gamma^2} \int_{\Sigma_0} e^{-\frac{(\bar{r}-\bar{r}_p)^2}{z_p^2 \sigma_\gamma^2}} d\bar{r}. \quad (13)$$

Чтобы определить \bar{I} по этой формуле, в данной задаче необходимо знать дисперсию углов разброса лучей σ_γ^2 на выходе из слоя (экрана). Эта дисперсия может быть выражена через дисперсию флуктуаций фазы (см. формулу (17.80)):

$$\sigma_\gamma^2 = 2 \frac{\sigma_s^2}{k^2 l_s^2}.$$

Следовательно, для того чтобы найти σ_γ^2 , нужно знать дисперсию σ_s^2 и радиус корреляции l_s случайной фазы. С учетом соотношения (12) получим

$$\sigma_\gamma^2 = 2 \frac{(n-1)^2 \sigma_h^2}{l_h^2}. \quad (14)$$

С другой стороны, воспользовавшись определением l_h (11), перепишем данное выражение в виде

$$\sigma_\gamma^2 = 2 \frac{(n-1)^2 \sigma_h^2}{l_h^2} = 2(n-1)^2 |B_h''(0)|. \quad (15)$$

Таким образом, искомая средняя интенсивность (13) определяется как

$$\bar{I}(\bar{R}_p) = \frac{I_0}{2\pi z_p^2 (n-1)^2 |B_h''(0)|} \int_{\Sigma_0} \exp \left\{ -\frac{(\bar{r}_p - \bar{r})^2}{2z_p^2 (n-1)^2 |B_h''(0)|} \right\} d\bar{r}. \quad (16)$$

Данное выражение является окончательным ответом на второй вопрос задачи, так как интегрирование в (16) можно произвести только при заданной форме экрана Σ_0 .

5. Во сколько раз ослабляется тропосферой Земли среднее поле сигнала, передаваемого с Земли на Луну? Считать, что толщина тропосферы $h(\bar{r})$ распределена по нормальному закону со средним значением $\bar{h} = 10 \text{ км}$ и среднеквадратичным отклонением $\sigma_h = 10^{-2} \bar{h}$, а коэффициент преломления тропосферы n равен 1,0001. Расчеты произвести для $\lambda = 10 \text{ см}$.

Решение. Толщина тропосферы намного меньше расстояния между Землей и Луной. Поэтому тропосферу можно рассматривать как фазовый экран и воспользоваться соотношением (17.60) для среднего поля

$$\bar{U}(\bar{R}_p) = e^{-\sigma_s^2/2} U_d(\bar{R}_p),$$

где σ_s^2 – дисперсия флуктуаций фазы волны на выходе из тропосферы, а $U_d(\bar{R}_p)$ – поле в точке наблюдения при отсутствии случайных возмущений. Следовательно, ослабление среднего поля

$$N = \frac{U_d(\bar{R}_p)}{\bar{U}(\bar{R}_p)} = e^{\sigma_s^2/2}, \quad (1)$$

Согласно формуле (5) предыдущей задачи, имеем

$$\sigma_s^2 = k^2(n-1)^2 \sigma_h^2 = \frac{4\pi^2}{\lambda^2}(n-1)^2 \sigma_h^2. \quad (2)$$

По условию $\sigma_h = 10^{-2} \bar{h} = 100 \text{ м}$, следовательно, $\sigma_h^2 = 10^4 \text{ м}^2$. Кроме того, $n-1 = 10^{-4}$.
Учитывая данные оценки, согласно (2) имеем $\sigma_s^2/2 \approx 0,2$ и в соответствии с (1) получаем следующее значение ослабления: $N \approx 1,2$.

§ 18. Диаграмма направленности зеркальной антенны со случайными искажениями фазы на апертуре

В качестве примера использования полученных в предыдущем параграфе формул рассмотрим влияние случайных флуктуаций фазы на диаграмму направленности зеркальной антенны с параболическим отражателем M (рис.18.1-а).

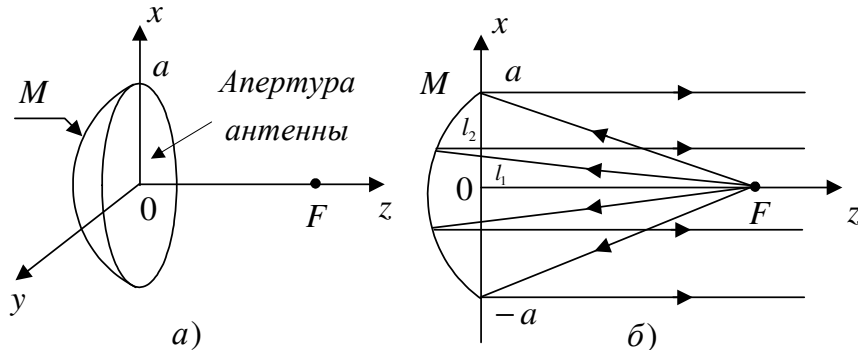


Рис. 18.1.

Источником излучения является “точечный” облучатель, помещенный в фокусе ($r = 0, z = F$) параболоида вращения. Падающая из источника сферическая волна, отражаясь по законам геометрической оптики от параболического зеркала M , становится плоской волной, фаза которой на апертуре $z = 0$ является постоянной величиной. Это свойство параболического зеркала есть следствие определения параболоида вращения. На рис.18.1-б представлено сечение параболоида вращения в плоскости XOZ (плоскость рисунка). Уравнение параболы M в плоскости XOZ определяется как геометрическое место точек, для которых сумма расстояний l_1 (от фокуса F до произвольной точки кривой M) и l_2 (от точки M до прямой $z = 0$) есть величина постоянная: $l_1 + l_2 = l = Const$. Все семейство лучей получим, вращая плоскость рисунка вокруг оси OZ . Часть плоскости $z = 0$, заключенная внутри параболоида вращения, называется **раскрывом**, или **апертурой антенны**. Для рассматриваемой антенны апертура представляет собой круг радиуса $r = \sqrt{x^2 + y^2} = a$. Таким образом, длины всех лучей, вышедших из облучателя и отразившихся от зеркала, оказываются постоянными во всех точках раскрыва, т.е. в плоскости раскрыва фаза $S = kl$ является постоянной величиной. Сформированная таким способом плоская волна с ограниченным волновым фронтом, распространяясь в полупространство $z > 0$, дифрагирует на апертуре $r \leq a$, в результате

чего и формируется ее **диаграмма направленности (ДН) в дальней зоне**. В реальных условиях фаза S в плоскости апертуры не является постоянной величиной, а испытывает флуктуации $\delta S(\vec{r})$. Причин этих флуктуаций может быть несколько. Во-первых, неточности в изготовлении параболоида приводят к отклонениям $\delta z(\vec{r})$ его поверхности от расчетной (см. рис. 18.2), в результате чего волна приобретает дополнительный набег фазы $\delta S(\vec{r}) = 2k\delta z(\vec{r})$.

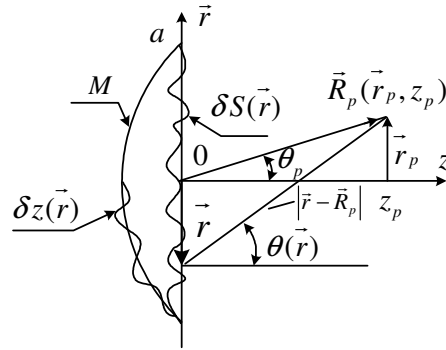


Рис. 18.2.

Во-вторых, даже при идеально точно изготовленном зеркале никогда невозможно полностью устранить флуктуации показателя преломления среды $\delta n(\vec{R})$ между облучателем и зеркалом, которые также приводят к дополнительным набегам фазы. В результате поле $U(\vec{r})$ в плоскости апертуры ($z=0, r \leq a$) отличается от расчетного $U_0 = A_0 e^{ikl} = Const$ переменным множителем $e^{i\delta S(\vec{r})}$. Таким образом, в раскрыве антенны в реальных условиях имеется поле

$$U(\vec{r}) = U_0 e^{i\delta S(\vec{r})}, \quad U_0 = A_0 e^{ikl}. \quad (18.1)$$

Для расчета поля U в точке наблюдения с радиус-вектором $\vec{R}_p = (\vec{r}_p, z_p)$ (рис.18.2) воспользуемся принципом Гюйгенса (17.20):

$$U(\vec{R}_p) = \frac{kU_0}{2\pi i} \int_{\Sigma_0} \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{R}_p|}}{|\vec{r}-\vec{R}_p|} e^{i\delta S(\vec{r})} \cos \theta(\vec{r}) d\vec{r}. \quad (18.2)$$

18.1. Вычисление среднего поля

Если флуктуации фазы на апертуре $\delta S(\vec{r})$ статистически однородны и распределены по нормальному закону, то среднее (когерентное) поле $\langle U(\vec{R}_p) \rangle$ в волновой зоне ($kR_p \gg 1$) определяется формулой (17.60)

$$\langle U(\vec{R}_p) \rangle = e^{-\sigma_s^2/2} U_d(\vec{R}_p), \quad (18.3)$$

где $U_d(\vec{R}_p)$ - невозмущенное (дифракционное) поле, создаваемое идеальной антенной:

$$U_d(\vec{R}_p) = \frac{kU_0}{2\pi i} \int_{\Sigma_0} \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{R}_p|}}{|\vec{r}-\vec{R}_p|} \cos \theta(\vec{r}) d\vec{r}. \quad (18.4)$$

Пусть точка наблюдения $\vec{R}_p = (\vec{r}_p, z_p)$ достаточно удалена от антенны и находится вблизи ее оси (**малюгловое приближение**). В этом случае выполняются неравенства $r/z_p \leq a/z_p \ll 1$, $r_p/z_p \ll 1$, и в исходной формуле (18.4) можно произвести некоторые упрощения:

$$\operatorname{tg} \theta_p \approx \theta_p \approx \frac{r_p}{z_p} \ll 1, \quad (18.5-a)$$

$$\operatorname{tg} \theta(\vec{r}) \approx \theta(\vec{r}) \approx \frac{|\vec{r}-\vec{r}_p|}{z_p} \leq \frac{\max(r_p, a)}{z_p} \ll 1, \quad \cos \theta(\vec{r}) \approx 1; \quad (18.5-b)$$

$$|\vec{r}-\vec{R}_p| = \sqrt{z_p^2 + (\vec{r}-\vec{r}_p)^2} \approx z_p + \frac{(\vec{r}-\vec{r}_p)^2}{2z_p}. \quad (18.5-в)$$

После проделанных упрощений в полярных координатах $\vec{r} = (r, \varphi)$, $\vec{r}_p = (r_p, \varphi_p)$ формула (18.4) представится в виде

$$\begin{aligned}
U_d(\vec{R}_p) &\approx \frac{kU_0}{2\pi iz_p} e^{ik(z_p+r_p^2/2z_p)} \int_0^a e^{ikr^2/2z_p} r dr \int_0^{2\pi} \exp\left\{-ik \frac{rr_p}{z_p} \cos(\varphi - \varphi_p)\right\} d\varphi = \\
&= \frac{kU_0}{iz_p} e^{ik(z_p+r_p^2/2z_p)} \int_0^a e^{ikr^2/2z_p} J_0\left(k \frac{r_p}{z_p} r\right) r dr.
\end{aligned} \tag{18.6}$$

При вычислении интеграла по dr ограничимся областью дальней зоны (зоны Фраунгофера) относительно антенны, когда под знаком интеграла можно положить $e^{ikr^2/2z_p} \approx 1$. Это допустимо, если выполняется неравенство

$$\frac{kr^2}{2z_p} \leq \frac{ka^2}{2z_p} \ll 1. \tag{18.7}$$

Неравенство (18.7) можно записать также в виде

$$\theta_a \ll \theta_d, \tag{18.8}$$

где $\theta_a = a/z_0$ - угол, под которым антенный раскрыт виден из точки наблюдения, а $\theta_d = 1/ka \sim \lambda/a$ - угол дифракции на апертуре антенны.

Учитывая неравенство (18.7) и сделав замену переменных $x = kr\theta_p = kr \frac{r_p}{z_p}$,

получим

$$U_d(\vec{R}_p) \approx \frac{kU_0}{iz_p} \cdot \frac{1}{(k\theta_p)^2} \cdot e^{ikz_p(1+\theta_p^2/2)} \int_0^{ka\theta_p} x J_0(x) dx. \tag{18.9}$$

Неопределенный интеграл по dx выражается через функцию Бесселя первого рода первого порядка - $J_1(x)$:

$$\int x J_0(x) dx = x J_1(x). \tag{18.10}$$

Перечислим некоторые основные свойства функции $J_1(x)$: $J_1(x)$ функция нечетная, ограниченная по модулю ($|J_1(x)| < 1$), при малых значениях аргумента ($x \ll 1$)

представляемая в виде $J_1(x) \approx x/2$ и имеющая асимптотическое представление при больших значениях x :

$$J_1(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right), \quad x \gg 1. \quad (18.11)$$

Кроме того, при вещественном x функция $J_1(x)$ имеет бесчисленное количество действительных нулей: $J_1(x) = 0$ в точках $x = x_m$ ($m = 1, 2, \dots$). Приведем приближенные значения нескольких первых нулей: $x_1 = 0$; $x_2 \approx 3,83$; $x_3 \approx 7,02$; $x_4 \approx 10,17$.

С учетом (18.10) вычисление (18.9) приводит к следующему результату:

$$U_d(\vec{R}_p) \approx U_p \cdot \left[\frac{2J_1(t)}{t} \right], \quad (18.12)$$

где параметр $t = ka\theta_p$, а

$$U_p = U_0 \frac{ka^2}{2iz_p} e^{ikz_p(1+\theta_p^2/2)}. \quad (18.13)$$

График зависимости нормированной на $|U_p|$ амплитуды $|U_d|$ от безразмерного параметра t приведен на рис.18.3 сплошной линией. Изображенная на рис. 18.3 функция называется **диаграммой направленности (ДН) антенны "по полю" или "по амплитуде"**.

Согласно формуле (18.3) напряженность среднего (когерентного) поля $\langle U(\vec{R}_p) \rangle$ отличается от $U_d(\vec{R}_p)$ только постоянным множителем $\langle e^{i\delta S} \rangle$, который для нормального распределения флуктуации фазы δS равен $e^{-\sigma_s^2/2}$. График зависимости амплитуды среднего поля $|\langle U(\vec{R}_p) \rangle|$ от параметра $t = ka\theta_p$ приведен на том же рис. 18.3 штриховой линией. Видно, что ДН антенны по среднему полю так же, как и для идеальной антенны ($\sigma_s = 0$), имеет "лепестковый" характер. Максимум "главного" лепестка направлен вдоль оси антенны, а его угловая ширина $\Delta\theta_p$ может быть

определена по первому нулю функции $J_1(t)$. Так, положив $\Delta t = ka\Delta\theta_p \approx 4$, получим

$$\Delta\theta_p \approx \frac{4}{ka}, \text{ что совпадает с углом дифракции } \theta_d \sim \lambda/a: \Delta\theta_p \approx \theta_d.$$

$$\Delta\theta_p \approx \frac{4}{ka}, \text{ что совпадает с углом дифракции } \theta_d \sim \lambda/a: \Delta\theta_p \approx \theta_d.$$

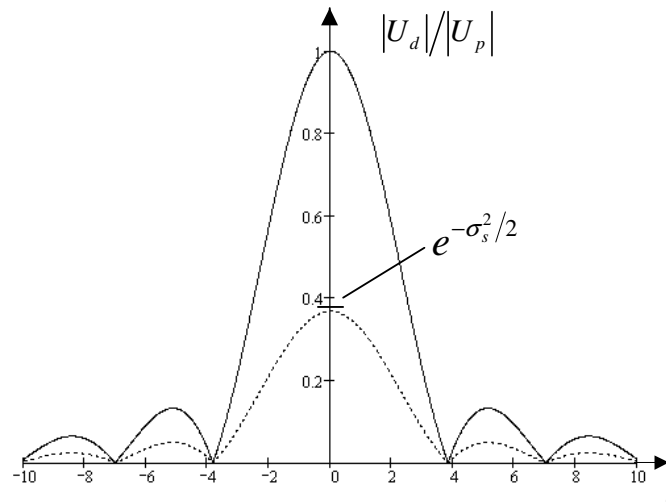


Рис. 18.3

18.2. Определение средней интенсивности

Для идеальной антенны в дальней зоне распределение интенсивности по углам согласно (18.12) имеет следующий вид:

$$I_d(\bar{R}_p) = U_d(\bar{R}_p)U_d^*(\bar{R}_p) \approx I_{d \max} \left[\frac{2J_1(t)}{t} \right]^2, \quad (18.14)$$

где

$$I_{d \max} = |U_p|^2 = \left(\frac{ka^2}{2z_p} \right)^2 A_0^2 \quad (18.15)$$

- максимальное значение интенсивности, достигаемое при $t=0$ ($\theta_p=0$). Отношение

$I_d/I_{d \max}$ определяет ДН идеальной антенны по интенсивности.

Представим теперь поле в точке наблюдения $U(\vec{R}_p)$ в виде регулярной $\langle U(\vec{R}_p) \rangle$ и флуктуирующей $\delta U(\vec{R}_p)$ составляющих:

$$U(\vec{R}_p) = \langle U(\vec{R}_p) \rangle + \delta U(\vec{R}_p), \quad (18.16)$$

где по определению $\langle \delta U(\vec{R}_p) \rangle = 0$. С помощью (18.16) построим выражение для средней интенсивности:

$$\langle I(\vec{R}_p) \rangle = \langle U(\vec{R}_p) U^*(\vec{R}_p) \rangle = \langle |U(\vec{R}_p)|^2 \rangle + \langle |\delta U(\vec{R}_p)|^2 \rangle. \quad (18.17)$$

Слагаемое $\langle |U| \rangle^2$ представляет собой интенсивность когерентной составляющей - $I_{\text{ког}} = \langle |U| \rangle^2$. Из приведенных выше формул (18.3) и (18.12) следует, что зависимость $I_{\text{ког}}$ от угла θ_p определяется ДН по интенсивности идеальной антенны (18.14):

$$I_{\text{ког}}(\vec{R}_p) = \langle |U(\vec{R}_p)| \rangle^2 = e^{-\sigma_s^2} I_d(\vec{R}_p) = I_{\text{ког max}} \left[\frac{2J_1(t)}{t} \right]^2. \quad (18.18)$$

Здесь

$$I_{\text{ког max}} = I_{d \text{ max}} e^{-\sigma_s^2} = \left(\frac{ka^2}{2z_p} \right)^2 A_0^2 e^{-\sigma_s^2}. \quad (18.19)$$

- максимальное значение когерентной составляющей интенсивности, достигаемое для угла наблюдения $\theta_p = 0$ ($t = 0$).

Согласно (18.18) $I_{\text{ког}}(\vec{R}_p)$ отличается от $I_d(\vec{R}_p)$ только постоянным множителем $e^{-\sigma_s^2}$. Уменьшение интенсивности когерентной составляющей (среднего поля) легко объясняется тем, что за счет флуктуации фазы δS в раскрыве антенны, волны, приходящие в точку наблюдения \vec{R}_p , также имеют случайную фазу, усреднение по которой и приводит к уменьшению интерференционных максимумов поля в $e^{-\sigma_s^2}$ раз. Отметим важный факт: $I_{\text{ког}} \sim a^4$, что является следствием когерентного сложения полей. Действительно, при когерентном сложении полей в точке наблюдения суммируются

волны, приходящие от всех элементарных площадок апертуры (или от различных частей зеркала). Результирующее поле при этом оказывается пропорциональным площади всей апертуры антенны, т.е. $\langle U \rangle \sim U_d \sim a^2$, а $I_{\text{ког}} = |\langle U \rangle|^2 \sim a^4$.

Второе слагаемое в формуле (18.17) представляет собой интенсивность некогерентной компоненты - $I_{\text{нек}}(\vec{R}_p) = \langle |\delta U(\vec{R}_p)|^2 \rangle$. При анализе этого слагаемого рассмотрим наиболее интересный случай, когда флуктуации фазы δS в раскрыве антенны велики ($\sigma_s^2 \gg 1$). При сильных флуктуациях фазы в раскрыве когерентная составляющая интенсивности согласно (18.18) мала ($I_{\text{ког}} \rightarrow 0$) и ею можно вообще пренебречь, т.е. в формуле (18.17) приближенно считать, что некогерентная составляющая практически совпадает со средней интенсивностью:

$$I_{\text{нек}}(\vec{R}_p) = \langle |\delta U(\vec{R}_p)|^2 \rangle \approx \langle I(\vec{R}_p) \rangle. \quad (18.20)$$

При вычислении $\langle I(\vec{R}_p) \rangle$ мы могли бы сразу воспользоваться принципом Гюйгенса для интенсивности в виде (17.81), переписав формулу для дальней зоны ($kr^2/2z_p \leq ka^2/2z_p \ll 1$) и отсутствия регулярной рефракции ($\langle \vec{\gamma}(\vec{r}) \rangle = 0$). Не составляет труда показать, что этот переход легко осуществить, если в индикатрисе рассеяния (17.82) просто положить $\langle \vec{f}(\vec{r}) \rangle = 0$, после чего она принимает вид

$$F(\vec{r}) = \frac{1}{\pi z_p^2 \sigma_\gamma^2} \exp \left\{ -\frac{1}{z_p^2 \sigma_\gamma^2} [\vec{r}_p - \langle \vec{f}(\vec{r}) \rangle]^2 \right\} \approx \frac{1}{\pi z_p^2 \sigma_\gamma^2} \exp \left\{ -\frac{\theta_p^2}{\sigma_\gamma^2} \right\}. \quad (18.21)$$

Получим этот же результат, вычислив $\langle I(\vec{R}_p) \rangle$ несколько иначе, чем в предыдущем параграфе. С учетом упрощений (18.5) и неравенства (18.7) перепишем формулу (18.2) для дальней зоны в малоугловом приближении:

$$U(\vec{R}_p) \approx \frac{kU_0}{2\pi i z_p} e^{ik(z_p + r_p^2/2z_p)} \int_{-\infty}^{\infty} M(\vec{r}) e^{i\delta S(\vec{r})} e^{-ik \frac{\vec{r}\vec{r}_p}{z_p}} d\vec{r}. \quad (18.22)$$

Мы растянули пределы интегрирования от $-\infty$ до ∞ , но зато ввели так называемую функцию зрачка - $M(\vec{r})$, которая по определению равна

$$M(\vec{r}) = \begin{cases} 1, & \text{если } r \leq a; \\ 0, & \text{если } r > a. \end{cases} \quad (18.23)$$

Для второго статистического момента (средней интенсивности) имеем

$$\begin{aligned} \langle I(\vec{R}_p) \rangle &= \langle U(\vec{R}_p) U^*(\vec{R}_p) \rangle \approx \\ &\approx \left(\frac{kA_0}{2\pi z_p} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r}' \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r}'' M(\vec{r}') M(\vec{r}'') e^{-ik \frac{\vec{r}_p}{z_p} (\vec{r}' - \vec{r}'')} \langle e^{i[\delta S(\vec{r}') - \delta S(\vec{r}'')]} \rangle d\vec{r}. \end{aligned} \quad (18.24)$$

Аналогично предыдущему параграфу произведем некоторые упрощения.

1. Для статистически однородного и изотропного поля флуктуаций $\delta S(\vec{r})$ при $\sigma_S^2 \gg 1$ согласно (17.68) можно записать:

$$\langle e^{i[\delta S(\vec{r}') - \delta S(\vec{r}'')]} \rangle = e^{-\frac{1}{2} D_S(\vec{r}' - \vec{r}'')} \approx \exp \left\{ -\frac{\sigma_S^2}{2l_S^2} (\vec{r}' - \vec{r}'')^2 \right\}, \quad (18.25)$$

где $\sigma_S^2 = const$, а l_S - характерный размер неоднородностей фазы в раскрыве антенны.

2. С учетом (18.25) перепишем (18.24) в суммарных - $\vec{r} = \frac{1}{2}(\vec{r}' + \vec{r}'')$ и разностных - $\vec{\rho} = \vec{r}' - \vec{r}''$ координатах:

$$\langle I(\vec{R}_p) \rangle \approx \left(\frac{kA_0}{2\pi z_p} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\rho} M(\vec{r} + \vec{\rho}/2) M(\vec{r} - \vec{\rho}/2) \exp \left\{ -\frac{\sigma_S^2}{2l_S^2} \rho^2 - i \frac{k}{z_0} \vec{r}_p \vec{\rho} \right\}. \quad (18.26)$$

3. Характерный размер области $\rho = \rho_{ef}$, который дает основной вклад в интеграл по $d\vec{\rho}$, можно оценить из условия $\sigma_S^2 \rho_{ef}^2 / 2l_S^2 \approx 1$, откуда получаем $\rho_{ef} \approx l_S / \sigma_S$. Если $\rho_{ef} \ll a$ ($l_S \ll \sigma_S a$), то в функциях зрачка $M(\vec{r} \pm \vec{\rho}/2)$ можно пренебречь зависимостью

от переменной $\bar{\rho}$:

$$M(\bar{r} + \bar{\rho}/2)M(\bar{r} - \bar{\rho}/2) \approx M^2(\bar{r}) = M(\bar{r}). \quad (18.27)$$

В результате проделанных упрощений мы приходим к следующему выражению для средней интенсивности:

$$\langle I(\bar{R}_p) \rangle \approx \left(\frac{kA_0}{2\pi z_p} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} M(\bar{r}) d\bar{r} \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{\rho} \exp \left\{ -\frac{\sigma_S^2}{2l_S^2} \rho^2 - i \frac{k}{z_p} \bar{r}_p \bar{\rho} \right\}. \quad (18.28)$$

Видно, что четырехкратный интеграл распался на произведение двух двукратных, причем интеграл по $d\bar{r}$ равен площади апертуры антенны - $\Sigma_0 = \pi a^2$, а вычисление интеграла по $d\bar{\rho}$ было проведено в предыдущем параграфе (см. (17.73)). В результате после вычислений получим

$$\langle I(\bar{R}_p) \rangle = \frac{A_0^2 a^2}{z_p^2} \cdot \frac{k^2 l_S^2}{2\sigma_S^2} \exp \left\{ -\frac{k^2 l_S^2}{2\sigma_S^2} \theta_p^2 \right\}. \quad (18.29)$$

Заметим, что это же выражение мы бы получили, если бы пользовались формулой (17.81) с индикатрисой рассеяния в дальней зоне в виде (18.21).

С учетом связи между дисперсиями флуктуаций фазы $\sigma_S^2 = \langle \delta S^2 \rangle$ и углов прихода $\sigma_\gamma^2 = \langle (\delta \gamma)^2 \rangle$: $\sigma_\gamma^2 = 2 \frac{\sigma_S^2}{k^2 l_S^2}$ (см. (17.80)) некогерентную составляющую

интенсивности можно представить в следующем окончательном виде:

$$I_{нек}(\bar{R}_p) \approx I_{нек \max} e^{-\theta_p^2 / \sigma_\gamma^2}, \quad (18.30)$$

где

$$I_{нек \max} = \frac{a^2 A_0^2}{\sigma_\gamma^2 z_p^2}. \quad (18.31)$$

максимальное значение некогерентной составляющей интенсивности, достигаемое при угле наблюдения $\theta_p = 0$.

Выводы

- Из сравнения результатов расчета дифракционных и средних полей, а также средних интенсивностей в фокальной плоскости идеальной линзы с неоднородностями (см. задачу 3 предыдущего параграфа) и в дальней зоне несфокусированной антенны со случайными флуктуациями фазы в раскрыве видно, что формулы с точностью до нормировочных коэффициентов полностью совпадают. Этот факт часто используют для экспериментального определения диаграммы направленности антенны. По определению, диаграмма направленности (по полю или по интенсивности) формируется в дальней зоне антенны, что накладывает некоторые трудности измерений из-за больших расстояний. Однако, если мы сфокусируем антенну на определенное (приемлемое) расстояние (для зеркальных антенн это можно сделать, например, небольшими смещениями облучателя вдоль оси OZ из точки фокуса зеркала) и померяем распределение полей и интенсивности в фокальной плоскости, то, тем самым, определим диаграмму направленности антенны в дальней зоне.

- Согласно (18.30) ДН антенны по интенсивности в пренебрежении когерентной компонентой поля является гауссоидой, угловая ширина которой $\Delta\theta_p$ не зависит от размера антенны a и совпадает с дисперсией углов выхода лучей из апертуры σ_γ : $\Delta\theta_p \approx \sigma_\gamma$.

- Следует обратить внимание на то, что $I_{нек\ max}$ оказывается пропорциональной площади апертуры антенны ($I_{нек\ max} \sim a^2$), а не квадрату площади, как это имело место для когерентной компоненты ($I_{ког\ max} \sim a^4$). Отсюда следует, что сколь бы ни были велики флуктуации фазы σ_s^2 и, следовательно, сколь бы ни была мала когерентная компонента поля $I_{ког}$, при достаточно большом размере антенны a ($a > a_{кр}$) все равно будет выполняться неравенство $I_{ког} > I_{нек}$.

Из равенства $I_{ког\ max} = I_{нек\ max}$, согласно формулам (18.19) и (18.31), определим величину $a_{кр}$:

$$a_{кр} = \sqrt{2} \frac{l_s}{\sigma_s} e^{\sigma_s^2/2}. \quad (18.32)$$

Таким образом, при $a < a_{кр}$ когерентная компонента интенсивности $I_{ког}(\vec{R}_p)$ меньше некогерентной $I_{нек}(\vec{R}_p)$, и ширина $\Delta\theta_p$ ДН антенны по интенсивности определяется только дисперсией углов выхода лучей σ_γ^2 и не зависит от размера антенны a (и длины волны λ , если флуктуации фазы δS связаны только с неровностями δz зеркала антенны, т.к. в этом случае $\sigma_\gamma^2 \sim \sigma_z^2/l_s^2$). Ширина ДН антенны достаточно больших линейных размеров, для которых выполняется обратное неравенство $a > a_{кр}$, определяется когерентной компонентой интенсивности и совпадает с углом дифракции $\Delta\theta_p \approx \theta_d \sim \lambda/a$.

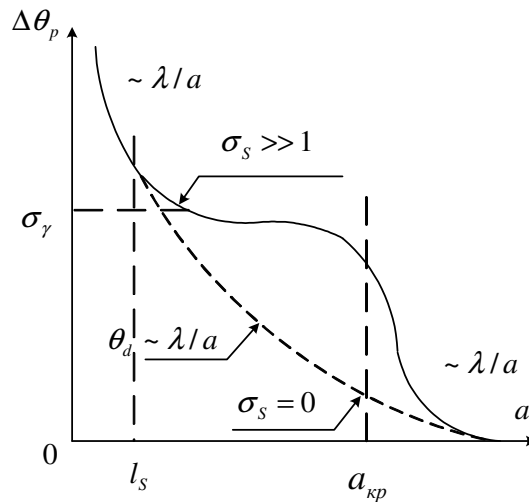


Рис. 18.4.

Качественная зависимость $\Delta\theta_p$ от a при $\sigma_s^2 \gg 1$ приведена на рис. 18.4, где выделены три области:

1. Радиус антенны a меньше характерного размера неоднородностей l_s в раскрыве ($a < l_s$). Искажения фазы $\delta S(\vec{r})$ на апертуре практически не влияют на ДН антенны, т.к. размер антенны значительно меньше радиуса корреляции флуктуаций фазы, и в пределах апертуры фаза поля может считаться постоянной. Ширина ДН антенны в этом случае приближенно совпадает с углом дифракции ($\Delta\theta_p \approx \theta_d \sim \lambda/a$).

2. Радиус антенны лежит в пределах $l_S < a < a_{кр}$. В этом диапазоне при $\sigma_s^2 \gg 1$ когерентная компонента мала по сравнению с некогерентной и ширина ДН антенны не зависит от размера антенны a ($\Delta\theta_p \approx \sigma_\gamma$).

3. Сверхбольшие размеры антенны ($a > a_{кр}$). Когерентная компонента интенсивности становится больше некогерентной. ДН начинает сужаться с увеличением a , и ее ширина стремится к углу дифракции ($\Delta\theta_p \approx \theta_d \sim \lambda/a$).

ЗАДАЧИ

1. Параболическая антенна работает на волне с $\lambda = 10 \text{ см}$. Какова допустимая погрешность в изготовлении параболоида, если допускается уменьшение поля в e раз? Считать, что случайные отклонения формы рефлектора от параболоида распределены по нормальному закону.

Решение. Поскольку флуктуации фазы в плоскости апертуры антенны вызваны погрешностями изготовления поверхности отражателя антенны δz , то с учетом двойного пути волны от излучателя к отражателю и обратно к апертуре имеем

$$\delta S = 2k\delta z, \quad \sigma_s^2 = 4k^2\sigma_z^2. \quad (1)$$

Из линейности связи между δS и δz следует, что флуктуации фазы δS так же, как и флуктуации отклонений формы поверхности δz , распределены по нормальному закону. Для нормально распределенных флуктуаций фазы в раскрыве среднее поле в волновой зоне определяется выражением (18.3)

$$\langle U(\vec{R}_p) \rangle = e^{-\sigma_s^2/2} U_d(\vec{R}_p). \quad (2)$$

Отсюда видно, что среднее поле $\langle U \rangle$ отличается от дифракционного U_d только множителем $\exp(-\sigma_s^2/2)$. Поэтому ослабление поля равно

$$N = \frac{U_d(\vec{R}_p)}{\overline{U(\vec{R}_p)}} = e^{\frac{\sigma_s^2}{2}}. \quad (3)$$

Уменьшение поля в e раз будет иметь место при $\sigma_s^2 = 2$. Следовательно, для заданных условий задачи можно записать

$$2k^2\sigma_z^2 = 1, \quad \sigma_z = \frac{1}{\sqrt{2}k}.$$

Учитывая, что $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ и подставляя заданное значение $\lambda = 10\text{см}$, находим допустимую

среднеквадратическую погрешность изготовления отражателя $\sigma_z = \frac{\lambda}{2\sqrt{2}\pi} \approx 1,1\text{ см}$.

2. Случайные отклонения формы поверхности, возникающие при изготовлении отражателя параболической антенны, распределены по нормальному закону со среднеквадратическим отклонением $\sigma_z = 1\text{мм}$. На какой длине волны амплитуда среднего поля в направлении максимума излучения уменьшится в e раз?

Ответ: $\lambda = 8,9\text{мм}$.

§ 19. Рассеяние волн на слабошероховатой поверхности

При распространении радиоволн в естественных условиях часто необходимо учитывать не только их рассеяние на неоднородностях показателя преломления, но и преобразование их на границах раздела различных сред. Например, отражение радиоволн от земной поверхности приводит к многолучевому характеру распространения, когда в точку наблюдения приходит не только "прямая" волна, а и рассеянные на поверхности "вторичные" волны. В результате интерференции "прямых" и "вторичных" волн наблюдаются флуктуации параметров радиосигналов, как правило, ухудшающие характеристики радиотехнических систем. В то же время последовательные отражения радиоволн от земной поверхности и от ионосферы делают возможным распространение радиоволн вокруг Земли на расстояния в тысячи и десятки тысяч километров, т.е. играют в каком-то смысле положительную роль. Статистические параметры такого канала связи также во многом определяются характером отражения и рассеяния волн на поверхностях суши и акваторий. В радиолокации при оценке отражательных свойств реальных целей приходится учитывать естественную шероховатость их поверхностей. В радиоастрономии шероховатости поверхностей небесных тел являются, по сути, единственным фактором, позволяющим исследовать поверхностные характеристики радиолокационными методами. Исследование земной поверхности с борта летательных, в том числе и космических, аппаратов методами дистанционного радиозондирования также основано на различии отражательных и рассеивающих свойств участков земной поверхности, отличающихся как характером шероховатости, так и электродинамическими параметрами (диэлектрической проницаемостью, проводимостью и т.д.). Такие же задачи возникают и в оптическом, и даже в рентгеновском диапазонах длин волн, так как реальные границы раздела сред всегда обладают "естественной" шероховатостью с широким спектром масштабов (от атомных микроскопических размеров до крупных неровностей, например, рельефа земной поверхности или волн на поверхности океана). С аналогичными проблемами приходится сталкиваться в задачах акустики, например, рассеяние звука на поверхности раздела различных сред приводит к явлению реверберации. В гидроакустике существенны эффекты отражения звука от водной поверхности и дна океана, плавающих льдов и т.д.

В математическом отношении все перечисленные выше физические задачи сводятся к решению уравнений Максвелла или более простого волнового уравнения, например, для задач акустики с граничными условиями, которым должны удовлетворять волновые поля на поверхности раздела двух различных в электродинамическом отношении сред. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением задачи о рассеянии скалярной волны на

шероховатостях (неровностях) в среднем плоской поверхности, которую всегда можно совместить с координатой плоскостью $z = 0$. Отклонения реальной поверхности от этой плоскости (рис. 19.1) будем описывать уравнением $z = \xi(\vec{r})$, где $\vec{r} = (x, y)$, а $\xi(\vec{r})$ - случайная функция двух переменных (случайное поле возвышений), в среднем равная нулю: $\langle \xi(\vec{r}) \rangle = 0$.

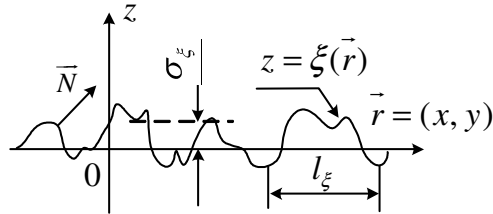


Рис. 19.1.

При решении широкого класса задач (например, рассеяния радиоволн или звука на морской поверхности) функция ξ может зависеть также и от времени t : $\xi = \xi(\vec{r}, t)$.

19.1. Граничные условия

Из курса электродинамики известно, что на границе раздела двух сред $z = \xi(\vec{r}, t)$ при отсутствии поверхностных токов должны быть непрерывны тангенциальные (касательные к поверхности) компоненты напряженностей электрических \vec{E}_t и магнитных \vec{H}_t полей, а также нормальные компоненты индукций $D_N = (\vec{D}\vec{N})$ и $B_N = (\vec{B}\vec{N})$, где \vec{N} - единичный вектор нормали к границе раздела. Не ограничивая существенно общности, верхнее полупространство $z > \xi(\vec{r}, t)$, где расположены источники волнового поля, можно считать вакуумом ($\epsilon = 1$), а нижнее $z < \xi(\vec{r}, t)$ - однородной средой с произвольным значением комплексной диэлектрической проницаемости $\epsilon = \epsilon' + i\epsilon''$, зависящей, вообще говоря, от частоты излучения ω . Если форма границы раздела не зависит от времени: $\xi(\vec{r}, t) = \xi(\vec{r})$, то в силу принципа суперпозиции достаточно рассматривать только монохроматические поля $\vec{E}, \vec{H} \sim e^{-i\omega t}$, опуская зависящий от t экспоненциальный множитель. Падающая из вакуума на границу раздела $z = \xi(\vec{r})$ электромагнитная волна частично отражается, а частично, преломляясь, проникает внутрь среды. При этом, если среда обладает большой

проводимостью (велика мнимая составляющая ε''), волна внутри среды быстро затухает. Характерный масштаб затухания определяется скин-слоем $\delta \approx \lambda / \sqrt{|\varepsilon|}$. Для сред с $|\varepsilon| \gg 1$ можно приближенно считать, что поле внутри среды вообще отсутствует и вместо "двусторонних" граничных условий, связывающих поля по обе стороны от границы раздела, можно воспользоваться **импедансным граничным условием** (М.А.Леонтович, 1948 г.), связывающим между собой \vec{E} и \vec{H} на границе только со стороны вакуума:

$$\vec{E}_t = \eta [\vec{N} \vec{H}_t]. \quad (19.1)$$

Введенная здесь величина $\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ называется **поверхностным импедансом**. В дальнейшем мы будем рассматривать только среды, у которых магнитная проницаемость μ считается равной единице и, следовательно, $\eta = 1/\sqrt{\varepsilon}$. Приближенные **граничные условия Леонтовича** (19.1) применимы для сред, у которых $|\eta| \ll 1$ и имеет место сильный скин-эффект, когда толщина скин-слоя δ мала по сравнению с характерными размерами поверхности во всех направлениях. Их удобство состоит в том, что при решении задачи рассеяния волны, падающей на такую поверхность сверху, поле в нижней среде $z < \xi(\vec{r})$ можно вообще не рассматривать, а решать волновые уравнения только в вакууме $z > \xi(\vec{r})$ с граничным условием (19.1). В частности, из (19.1) следует, что в предельном случае идеально проводящей поверхности, когда $|\varepsilon| \rightarrow \infty$ и, следовательно, $|\eta| \rightarrow 0$, тангенциальная компонента электрического поля \vec{E}_t на поверхности обращается в нуль:

$$\vec{E}_t \Big|_{z=\xi(\vec{r})} = 0. \quad (19.2)$$

19.2. Построение приближенного решения

Как и раньше, для простоты будем рассматривать дифракцию не векторных электромагнитных волн (\vec{E}, \vec{H}) , а скалярного волнового поля $U(\vec{R})$, удовлетворяющего при $z > \xi(\vec{r})$ уравнению Гельмгольца:

$$(\Delta_{\vec{R}} + k^2)U(\vec{R}) = 0 \quad (19.3)$$

и простейшему граничному условию на поверхности раздела $z = \xi(\vec{r})$:

$$U(\vec{R})\Big|_{z=\xi(\vec{r})} = U[\vec{r}, z = \xi(\vec{r})] = 0. \quad (19.4)$$

В акустике в роли $U(\vec{R})$ обычно выступает потенциал скорости (звуковое давление), а поверхность, на которой выполняется граничное условие (19.4), называется "**абсолютно мягкой**", в отличие от "**абсолютно жесткой**", на которой имеет место граничное условие

$$\frac{\partial U(\vec{R})}{\partial N}\Big|_{z=\xi(\vec{r})} = 0. \quad (19.5)$$

В электромагнитной задаче граничным условиям (19.4) и (19.5) соответствуют **идеально проводящая поверхность** ($\vec{E}_t = 0$) и **поверхность идеального магнетика** ($\vec{H}_t = 0$).

Общих аналитических методов решения уравнения (19.3) с граничными условиями, заданными на поверхности произвольной формы $z = \xi(\vec{r})$ (даже в простейших случаях абсолютно мягкой или абсолютно жесткой поверхности), не существует. Поэтому приходится прибегать либо к численным, либо к различным приближенным методам. В этом разделе в качестве примера рассмотрим рассеяние скалярного волнового поля $U(\vec{R})$ на шероховатой абсолютно мягкой поверхности с малыми неровностями, когда можно воспользоваться методом возмущений.

Если величина $\xi(\vec{r})$ достаточно мала (истинный смысл безразмерного малого параметра мы установим позже), то левую часть граничного условия (19.4) можно разложить в ряд Тейлора по степеням $\xi(\vec{r})$ и ограничиться несколькими первыми членами ряда:

$$U[\vec{r}, z = \xi(\vec{r})] = U(\vec{r}, 0) + \xi(\vec{r}) \frac{\partial U(\vec{r}, z)}{\partial z}\Big|_{z=0} + \frac{1}{2} \xi^2(\vec{r}) \frac{\partial^2 U(\vec{r}, z)}{\partial z^2}\Big|_{z=0} + \dots = 0. \quad (19.6)$$

Представим теперь волновое поле $U(\vec{R})$ в виде суммы известного (заданного) падающего на поверхность поля $U_{nad}(\vec{R})$ и искомого отраженного (рассеянного) поля $U_{omp}(\vec{R})$:

$$U(\vec{R}) = U_{nad}(\vec{R}) + U_{omp}(\vec{R}), \quad (19.7)$$

которое будем искать в виде ряда теории возмущений:

$$U_{omp} = U_0 + U_1 + \dots + U_m + \dots, \quad (19.8)$$

где $U_m \sim \xi^m$. Подставляя $U(\vec{R}) = U_{nad}(\vec{R}) + U_{omp}(\vec{R})$ в (19.6) и пользуясь для $U_{omp}(\vec{R})$ представлением (19.8), получим следующий вид граничного условия для абсолютно мягкой поверхности:

$$\begin{aligned} & (U_{nad} + U_0 + U_1 + \dots)|_{z=0} + \xi(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial z} (U_{nad} + U_0 + U_1 + \dots)|_{z=0} + \\ & + \frac{1}{2} \xi^2(\vec{r}) \frac{\partial^2}{\partial z^2} (U_{nad} + U_0 + U_1 + \dots)|_{z=0} + \dots = 0. \end{aligned} \quad (19.9)$$

Соберем вместе члены одного порядка малости по ξ и потребуем, чтобы условие (19.9) удовлетворялось в каждом порядке, независимо от остальных. В результате из (19.9) получаем систему связанных между собой (рекуррентных) граничных условий для полей U_m , заданных, однако, уже не на неровной поверхности, а на плоскости $z = 0$:

$$(\xi^0) \quad [U_{nad}(\vec{R}) + U_0(\vec{R})]_{z=0} = 0, \quad (19.10-a)$$

$$(\xi^1) \quad \left[U_1(\vec{R}) + \xi(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial z} (U_{nad}(\vec{R}) + U_0(\vec{R})) \right]_{z=0} = 0, \quad (19.10-b)$$

$$(\xi^2) \quad \left[U_2(\vec{R}) + \xi(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial z} U_1(\vec{R}) + \frac{1}{2} \xi^2(\vec{r}) \frac{\partial^2}{\partial z^2} (U_{nad}(\vec{R}) + U_0(\vec{R})) \right]_{z=0} = 0. \quad (19.10-в)$$

Предположим теперь, что каждое из полей U_{nad} , U_0 , U_1 и т.д. удовлетворяет уравнению Гельмгольца (19.3). В силу принципа суперпозиции полное поле

$U(\vec{R}) = U_{nad}(\vec{R}) + U_0(\vec{R}) + U_1(\vec{R}) + \dots$ также будет удовлетворять этому уравнению. В результате, поля U_0 , U_1 и т.д. можно находить, последовательно решая уравнения Гельмгольца с соответствующими граничными условиями (19.10).

Приближение нулевого порядка

В нулевом порядке по ξ , исходя из вышеизложенного, мы должны решить следующую задачу:

$$\begin{cases} (\Delta_{\vec{R}} + k^2)U_0(\vec{R}) = 0, \\ U_0(\vec{r}, 0) = -U_{nad}(\vec{r}, 0). \end{cases} \quad (19.11)$$

Видно, что задача нахождения поля U_0 свелась к задаче об отражении падающей волны U_{nad} от плоскости $z = 0$, на которой значение U_0 выражается через известное (заданное) поле U_{nad} (19.10-а). В качестве падающего поля выберем плоскую монохроматическую волну с амплитудой A_0 :

$$U_{nad}(\vec{R}) = A_0 e^{i\vec{k}_0 \vec{R}} = A_0 e^{i(\vec{k}_{0\perp} \vec{r} + k_{0z} z)}. \quad (19.12)$$

Здесь введены тангенциальная $\vec{k}_{0\perp}$ и нормальная $\vec{k}_{0z} = k_{0z} \vec{e}_z$ компоненты волнового вектора \vec{k}_0 падающей волны ($\vec{k}_0 = \vec{k}_{0\perp} + \vec{k}_{0z}$). Если мы направим ось Ox декартовой системы координат XYZ вдоль тангенциальной составляющей $\vec{k}_{0\perp}$ волнового вектора \vec{k}_0 (рис. 19.2), то \vec{k}_0 будет лежать в плоскости XOZ . (её называют **плоскостью падения**).

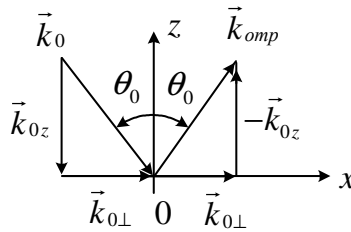


Рис. 19.2.

В этом случае проекции вектора \vec{k}_0 на оси выбранной системы координат будут равны $\vec{k}_{0\perp} = k_{0\perp}\vec{e}_x$, $\vec{k}_{0z} = k_{0z}\vec{e}_z$, где $k_{0\perp} = k \sin \theta_0$, $k_{0z} = -k \cos \theta_0$, θ_0 - угол падения. Согласно закону отражения волны от плоской границы поле U_0 будет представляться также плоской волной с волновым вектором \vec{k}_{omp} , лежащим в той же плоскости, что и \vec{k}_0 (плоскости падения XOZ). При этом тангенциальная компонента \vec{k}_{omp} совпадает с $\vec{k}_{0\perp}$, а нормальная противоположна по знаку \vec{k}_{0z} ($\vec{k}_{omp} = \vec{k}_{0\perp} - \vec{k}_{0z}$):

$$U_0(\vec{R}) = A_{omp} e^{i\vec{k}_{omp}\vec{R}} = A_{omp} e^{i(\vec{k}_{0\perp}\vec{r} - k_{0z}z)}. \quad (19.13)$$

Здесь через A_{omp} обозначена амплитуда отраженной волны. Подставляя (19.12) и (19.13) в граничное условие (19.10-а), получим

$$A_{omp} e^{i\vec{k}_{0\perp}\vec{r}} = -A_0 e^{i\vec{k}_{0\perp}\vec{r}}, \quad (19.14)$$

откуда следует, что $A_{omp} = -A_0$.

Таким образом, решение задачи в приближении нулевого порядка имеет вид

$$U_{nao}(\vec{R}) + U_0(\vec{R}) = A_0 e^{i\vec{k}_{0\perp}\vec{r}} \left(e^{ik_{0z}z} - e^{-ik_{0z}z} \right). \quad (19.15)$$

Приближение первого порядка

Для нахождения отраженного поля первого порядка $U_1(\vec{R})$ мы должны решить уравнение Гельмгольца с граничными условиями (19.10-б):

$$\begin{cases} (\Delta_{\vec{R}} + k^2)U_1(\vec{R}) = 0, \\ U_1(\vec{r}, 0) = -\xi(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial z} \left[U_{nao}(\vec{R}) + U_0(\vec{R}) \right]_{z=0}. \end{cases} \quad (19.16)$$

Используя найденное решение (19.15), определим значение поля U_1 на плоскости $z = 0$:

$$U_1(\vec{r}, 0) = -\xi(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial z} [U_{nad}(\vec{R}) + U_0(\vec{R})]_{z=0} = -2ik_{0z}\xi(\vec{r})A_0e^{ik_{01}\vec{r}}. \quad (19.17)$$

Из (19.16) и (19.17) видно, что задача нахождения $U_1(\vec{R})$ свелась к определению поля U_1 в произвольной точке наблюдения $\vec{R} = \vec{R}_p$, находящейся в верхнем полупространстве (см. рис. 19.3), при заданном его распределении на плоскости $z = 0$.

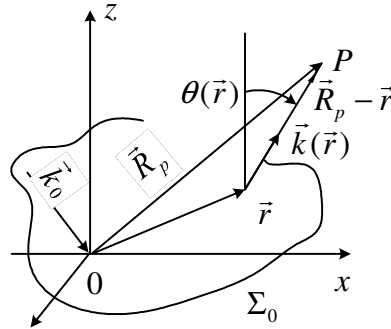


Рис. 19.3.

Для решения данной задачи воспользуемся формулой Гюйгенса (17.19):

$$U_1(\vec{R}_p) = \frac{k}{2\pi i} \int_{\Sigma_0} U_1(\vec{r}, 0) \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{R}_p|}}{|\vec{r}-\vec{R}_p|} \cos \theta(\vec{r}) d\vec{r}, \quad (19.18)$$

где интегрирование проводится по той части Σ_0 плоскости $z = 0$, которая покрыта неровностями, $\theta(\vec{r})$ - угол между нормалью к плоскости $z = 0$ и направлением в точку наблюдения $P (\vec{R} = \vec{R}_p)$ из произвольной точки \vec{r} области интегрирования Σ_0 (см. рис.19.3). Подставляя теперь в (19.18) найденное значение поля $U_1(\vec{r}, 0)$ (19.17), окончательно получим

$$U_1(\vec{R}_p) = -\frac{A_0 k^2 \cos \theta_0}{\pi} \int_{\Sigma_0} \xi(\vec{r}) e^{i(k|\vec{r}-\vec{R}_p| + \vec{k}_{01}\vec{r})} \frac{\cos \theta(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{R}_p|} d\vec{r}. \quad (19.19)$$

Формула (19.19) является решением "динамической" части задачи, устанавливая

связь между рассеянным полем $U_1(\vec{R}_p)$ (в первом порядке теории возмущений) и формой $z = \xi(\vec{r})$ каждой реализации случайной поверхности. Видно, что связь между U_1 и ξ является линейной. Если в области интегрирования Σ_0 находится много некоррелированных неровностей, т.е. если выполняется неравенство $L \gg l_\xi$, где $L \approx \sqrt{\Sigma_0}$ - линейный размер рассеивающей поверхности, а l_ξ - радиус корреляции случайной функции $\xi(\vec{r})$ (характерный горизонтальный размер или "длина" неровностей в плоскости $z = 0$), то согласно центральной предельной теореме теории вероятностей поле $U_1(\vec{R}_p)$ будет распределено по закону Гаусса даже при негауссовом распределении $\xi(\vec{r})$. Это следует из того, что (19.19) указывает на аддитивный вклад каждой неровности в суммарное рассеянное поле в точке наблюдения \vec{R}_p . Учитывая вышеизложенное, при анализе можно ограничиться исследованием только первых двух статистических моментов поля $U_1(\vec{R}_p)$, т.к. для нормально распределенных величин в них и содержится вся статистическая информация.

19.3. Среднее поле и средняя интенсивность

Непосредственное усреднение формулы (19.19) с учетом того, что $\langle \xi(\vec{r}) \rangle = 0$, приводит к следующему результату:

$$\langle U_1(\vec{R}_p) \rangle = 0.$$

Таким образом, в первом порядке по $\xi(\vec{r})$ рассеянное поле $U_1(\vec{R}_p)$ является некогерентным.

Средняя интенсивность рассеянного поля $\langle I(\vec{R}_p) \rangle = \langle |U_1(\vec{R}_p)|^2 \rangle$ согласно (19.19) выражается через второй момент случайной функции $\xi(\vec{r})$:

$$\begin{aligned} \langle I_1(\vec{R}_p) \rangle &= \frac{I_0 k^4 \cos^2 \theta_0}{\pi^2} \int_{\Sigma_0} \int_{\Sigma_0} \langle \xi(\vec{r}') \xi(\vec{r}'') \rangle \exp\{ik(|\vec{r}' - \vec{R}_p| - |\vec{r}'' - \vec{R}_p|)\} + \\ &+ i\vec{k}_{0\perp}(\vec{r}' - \vec{r}'') \left\{ \frac{\cos \theta(\vec{r}')}{|\vec{r}' - \vec{R}_p|} \frac{\cos \theta(\vec{r}'')}{|\vec{r}'' - \vec{R}_p|} \right\} d\vec{r}' d\vec{r}'', \end{aligned} \quad (19.20)$$

где $I_0 = |A_0|^2$ - интенсивность падающей плоской волны. Для статистически пространственно однородных неровностей ("стационарных" по пространственным переменным) имеем

$$\langle \xi(\vec{r}') \xi(\vec{r}'') \rangle = B_\xi(\vec{r}' - \vec{r}''),$$

где B_ξ - пространственная автокорреляционная функция неровностей. Вместо \vec{r}', \vec{r}'' введем в (19.20) новые суммарные $\vec{r} = \frac{1}{2}(\vec{r}' + \vec{r}'')$ и разностные $\vec{\rho} = \vec{r}' - \vec{r}''$ переменные интегрирования. При этом старые переменные выражаются через новые как $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{\rho}/2$, $\vec{r}'' = \vec{r} - \vec{\rho}/2$. Учитывая, что $B_\xi(\vec{\rho})$ отлична от нуля лишь для "небольших" значений $\rho \ll l_\xi$, при выполнении неравенства $L \gg l_\xi$ в формуле (19.20) можно произвести некоторые упрощения. Во-первых, интегрирование по $d\vec{\rho}$ можно проводить в бесконечных пределах, а область интегрирования по суммарной координате \vec{r} практически совпадает со старой Σ_0 . Во-вторых, разность $|\vec{r}' - \vec{R}_p| - |\vec{r}'' - \vec{R}_p|$ в показатели степени экспоненты можно разложить в ряд Тейлора в точке $\vec{\rho} = 0$ до первого ненулевого слагаемого:

$$|\vec{r}' - \vec{R}_p| - |\vec{r}'' - \vec{R}_p| = \left| \vec{r} - \vec{R}_p + \frac{\vec{\rho}}{2} \right| - \left| \vec{r} - \vec{R}_p - \frac{\vec{\rho}}{2} \right| \approx \frac{\vec{r} - \vec{R}_p}{|\vec{r} - \vec{R}_p|} \vec{\rho}.$$

В-третьих, медленно изменяющиеся сомножители с направляющими косинусами можно приближенно взять в точке $\vec{\rho} = 0$:

$$\frac{\cos[\theta(\vec{r} + \vec{\rho}/2)] \cos[\theta(\vec{r} - \vec{\rho}/2)]}{\left| \vec{r} - \vec{R}_p + \frac{\vec{\rho}}{2} \right| \left| \vec{r} - \vec{R}_p - \frac{\vec{\rho}}{2} \right|} \approx \frac{\cos^2 \theta(\vec{r})}{(\vec{r} - \vec{R}_p)^2}.$$

После проделанных упрощений получим

$$\langle I_1(\vec{R}_p) \rangle \approx \frac{I_0 k^4 \cos^2 \theta_0}{\pi^2} \int_{\Sigma_0} \frac{\cos^2 \theta(\vec{r})}{(\vec{r} - \vec{R}_p)^2} d\vec{r} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\rho} e^{-i\vec{q}_\perp(\vec{r})\vec{\rho}} B_\xi(\vec{\rho}). \quad (19.21)$$

Здесь мы ввели текущий **вектор рассеяния** $\vec{q}(\vec{r}) = \vec{k}(\vec{r}) - \vec{k}_0$, где $\vec{k}(\vec{r}) = k \frac{\vec{R}_p - \vec{r}}{|\vec{R}_p - \vec{r}|}$ - вектор, направленный из текущей точки поверхности \vec{r} в точку наблюдения \vec{R}_p (см. рис. 19.3). При этом мы учли, что в скалярном произведении $\vec{q}(\vec{r}) \vec{\rho}$ можно \vec{q} заменить на $\vec{q}_\perp = (q_x, q_y)$ (проекцию \vec{q} на плоскость $z = 0$).

По аналогии с (14.32) введем в рассмотрение пространственный энергетический спектр неровностей $S_\xi(\vec{\chi})$, взятый для фиксированной “волновой” гармонике $\vec{\chi} = \vec{q}_\perp(\vec{r})$:

$$S_\xi[\vec{q}_\perp(\vec{r})] = S_\xi(\vec{\chi}) \Big|_{\vec{\chi}=\vec{q}_\perp(\vec{r})} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\rho} e^{-i\vec{\chi}\vec{\rho}} B_\xi(\vec{\rho}) \Big|_{\vec{\chi}=\vec{q}_\perp(\vec{r})}. \quad (19.22)$$

С учетом (19.22) формула (19.21) принимает вид

$$\langle I_1(\vec{R}_p) \rangle \approx 4I_0 k^4 \cos^2 \theta_0 \int_{\Sigma_0} \frac{\cos^2 \theta(\vec{r})}{(\vec{r} - \vec{R}_p)^2} S_\xi[\vec{q}_\perp(\vec{r})] d\vec{r}. \quad (19.23)$$

Согласно (19.23) каждый элемент поверхности $d\vec{r}$ с центром в точке \vec{r} вносит в суммарную интенсивность $\langle I_1(\vec{R}_p) \rangle$ вклад

$$d\bar{I}(\vec{R}_p) = 4k^4 \cos^2 \theta_0 \cos^2 \theta(\vec{r}) S_\xi[\vec{q}_\perp(\vec{r})] \frac{I_0 d\vec{r}}{(\vec{r} - \vec{R}_p)^2}. \quad (19.24)$$

Величина

$$\sigma[\vec{q}_\perp(\vec{r})] = 4k^4 \cos^2 \theta_0 \cos^2 \theta(\vec{r}) S_\xi[\vec{q}_\perp(\vec{r})], \quad (19.25)$$

т.е. коэффициент при $I_0 d\vec{r} / (\vec{r} - \vec{R}_p)^2$ в формуле (19.24) носит название **сечения рассеяния** единичной площадки абсолютно мягкой поверхности в направлении $(\vec{R}_p - \vec{r}) / |\vec{R}_p - \vec{r}|$. С учетом определения (19.25) формула (19.23) принимает окончательный и простой вид

$$\langle I_1(\vec{R}_p) \rangle \approx I_0 \int_{\Sigma_0} \frac{\sigma[\vec{q}_\perp(\vec{r})]}{(\vec{r} - \vec{R}_p)^2} d\vec{r}. \quad (19.26)$$

Предположим теперь, что наблюдатель находится в дальней зоне относительно поверхности Σ_0 (в зоне Фраунгофера). Условие дальней зоны, как уже было показано в предыдущих разделах, формулируется в виде следующих неравенств:

$$\frac{r}{R_p} \leq \frac{L}{R_p} \ll 1 \quad \text{и} \quad \frac{kL^2}{R_p} \ll 1, \quad (19.27)$$

где $R_p = |\vec{R}_p|$. Мы, естественно, предполагаем, что начало декартовой системы координат XYZ помещено в “центр” рассеивающей площадки Σ_0 . При выполнении неравенств (19.27) в формуле (19.23) можно приближенно считать, что вектор $\vec{k}(\vec{r})$, направляющий косинус $\cos\theta(\vec{r})$, и расстояние от текущей точки поверхности до точки наблюдения $|\vec{r} - \vec{R}_p|$ в пределах области интегрирования практически не изменяются, и их можно выбрать при $\vec{r} = 0$: $\vec{k}(\vec{r}) \approx \vec{k}(0) = k\vec{R}_p/R_p$, $\cos\theta(\vec{r}) \approx \cos\theta(0) = \cos\theta_p$ и $|\vec{r} - \vec{R}_p| \approx R_p$. Учитывая данные упрощения, под знаком интеграла в (19.23) можно положить

$$\vec{q}(\vec{r}) = \vec{k}(\vec{r}) - \vec{k}_0 \approx \vec{q}(0) = k \frac{\vec{R}_p}{R_p} - \vec{k}_0,$$

$$\frac{\cos\theta(\vec{r})}{(\vec{r} - \vec{R}_p)^2} \approx \frac{\cos\theta(0)}{R_p^2} = \frac{\cos\theta_p}{R_p^2},$$

и в дальней зоне для средней интенсивности получаем следующее выражение:

$$\langle I_1(\vec{R}_p) \rangle \approx \frac{I_0 \sigma(\vec{q}_\perp)}{R_p^2} \Sigma_0. \quad (19.28)$$

Здесь Σ_0 - суммарная площадь рассеивающей поверхности, а

$$\sigma(\vec{q}_\perp) = 4k^4 \cos^2\theta_0 \cos^2\theta_p S_\xi(\vec{q}_\perp) - \quad (19.29)$$

фиксированное значение сечения рассеяния.

Выводы

1. Формулы (19.26) и (19.28) играют в теории рассеяния волн на статистически шероховатой поверхности ту же роль, что и формула (14.31) в теории объемного рассеяния на флуктуациях показателя преломления. Физический смысл этих формул также практически совпадает, и приближение, в котором получена формула (19.26) и следующая из нее (19.28), также называется "**борновским**".

2. В формуле (19.26) с учетом определения (19.25) под знаком интеграла стоит множитель $\cos^2 \theta_0 \cos^2 \theta(\vec{r})$, который обращается в нуль при скользящих углах падения и отражения, т.е. при $\theta_0, \theta(\vec{r}) \rightarrow \pi/2$. Именно поэтому интеграл (19.26) сходится даже при интегрировании по всей бесконечной плоскости $z = 0$.

2. Зависимость $\langle I_1 \rangle \sim 1/R_p^2$ в формуле (19.28) говорит о том, что в дальней зоне поле U_1 , рассеянное на малой шероховатой площадке, имеет вид расходящейся сферической волны (средняя интенсивность убывает с ростом расстояния R_p только за счет сферической расходимости).

3. С увеличением размеров площади поверхности Σ_0 средняя интенсивность $\langle I_1 \rangle$ растет пропорционально Σ_0 , что является признаком некогерентного сложения полей, рассеянных на отдельных неровностях поверхности. Действительно, среднее число N отдельных неровностей можно оценить как $N \approx \Sigma_0/\Sigma_l$, где $\Sigma_l \sim l_\xi^2$ - площадь, приходящаяся на одну неровность, и, следовательно, $\langle I_1 \rangle \sim \Sigma_0 \sim N$, т.е. $\langle I_1 \rangle$ растет пропорционально числу рассеивающих элементов, а не их квадрату, как это имеет место при когерентном сложении полей.

4. Так же, как и в теории рассеяния на слабых флуктуациях показателя преломления, рассеяние на слабошероховатой поверхности является резонансным: из всего спектра неровностей $S_\xi(\vec{\chi})$ при рассеянии из направления \vec{k}_0 в направление \vec{k} принимает участие только одна единственная пространственная гармоника Фурье с "волновым" вектором $\vec{\chi} = \vec{q}_\perp$.

5. Наконец, в (19.26) и (19.28) присутствует тот же, что и в (14.31), "релеевский" множитель k^4 , благодаря которому интенсивность рассеяния на мелких неровностях ($kl_\xi \ll 1$) оказывается пропорциональной четвертой степени частоты. Действительно, из-за

быстрого спадаания до нуля автокорреляционной функции $B_\xi(\vec{\rho})$ для пространственных частот, когда $|\vec{q}_\perp \vec{\rho}| \leq 2kl_\xi \ll 1$, экспоненциальный множитель $e^{i\vec{q}_\perp \vec{\rho}}$ можно приближенно заменить на единицу. При этом спектр $S_\xi(\vec{q}_\perp)$ оказывается не зависящим от частоты:

$$S_\xi(\vec{q}_\perp) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\rho} e^{-i\vec{q}_\perp \vec{\rho}} B_\xi(\vec{\rho}) \approx S_\xi(0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} B_\xi(\vec{\rho}) d\vec{\rho} \approx \frac{\sigma_\xi^2 l_\xi^2}{(2\pi)^2} \quad (19.30)$$

и, следовательно, $S_\xi(0) = \frac{\sigma_\xi^2}{(2\pi)^2}$. Здесь $\sigma_\xi^2 = B_\xi(0) = \langle \xi^2 \rangle$ - дисперсия отклонений неровной поверхности $z = \xi(\vec{r})$ от средней плоскости $z = 0$.

19.4. Индикатриса рассеяния

Анализ зависимости средней интенсивности от направления рассеяния проведем на основе формулы (19.28), справедливой для дальней зоны. При этом положение точки наблюдения будем задавать в сферических координатах $\vec{R}_p = (R_p, \theta_p, \varphi_p)$, где θ_p - полярный угол, отсчитываемый от оси OZ , а φ_p - азимутальный угол, отсчитываемый от оси OX в плоскости XOY (см. рис. 19.4).

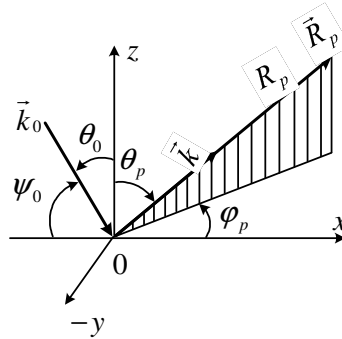


Рис. 19.4.

Распределение по углам θ_p и φ_p средней интенсивности удобно описывать индикатрисой рассеяния, которую по аналогии с §14 мы определим как отношение $\langle I_1(\theta_p, \varphi_p) \rangle$ к средней интенсивности, рассеянной в зеркальном направлении ($\vec{q}_\perp = 0 \rightarrow \theta_p = \theta_0, \varphi_p = 0$):

$$F(\theta_p, \varphi_p) = \frac{\langle I_1(\theta_p, \varphi_p) \rangle}{\langle I_1(\theta_0, 0) \rangle} = \frac{S_\xi(\vec{q}_\perp) \cos^2 \theta_p}{S_\xi(0) \cos^2 \theta_0}. \quad (19.31)$$

Для дальнейшего анализа имеет смысл привести в явном виде декартовы компоненты вектора \vec{q} , записанные в сферических координатах:

$$\vec{q} = \begin{cases} q_x = k(\sin \theta_p \cos \varphi_p - \sin \theta_0), \\ q_y = k \sin \theta_p \sin \varphi_p, \\ q_z = k(\cos \theta_p + \cos \theta_0). \end{cases} \quad (19.32)$$

Исследуем общий вид индикатрисы рассеяния $F(\theta_p, \varphi_p)$ в двух предельных случаях - мелких ($kl_\xi \ll 1$) и крупных ($kl_\xi \gg 1$) неровностей (здесь крупными считаются неровности с большим горизонтальным линейным размером l_ξ , т.е. "длинные", а высоты их ξ по-прежнему считаются достаточно малыми для того, чтобы был применим метод возмущений).

1. Для **мелких неровностей**, когда $kl_\xi \ll 1$ ($l_\xi \ll \lambda$), можно воспользоваться формулой (19.30), т.е. считать $S_\xi(\vec{q}_\perp) \approx S_\xi(0)$, после чего из (19.31) следует

$$F(\theta_p, \varphi_p) = \frac{\cos^2 \theta_p}{\cos^2 \theta_0}. \quad (19.33)$$

В отличие от объемного рассеяния, которое в рассматриваемом случае было изотропным: ($F(\theta_p, \varphi_p) \approx 1$), индикатриса рассеяния от шероховатой поверхности оказывается зависящей от полярного угла θ_p . Однако, учитывая, что эта зависимость очень плавная ($\sim \cos^2 \theta_p$), приближенно можно по-прежнему считать рассеяние **диффузным**, так как угловая ширина $\Delta\theta_p$ индикатрисы рассеяния имеет порядок единицы, а положение ее максимума не зависит от направления облучения θ_0 (оно соответствует рассеянию в нормальном к плоскости $z = 0$ направлении $\theta_p = 0$, см. рис. 19.5-а).

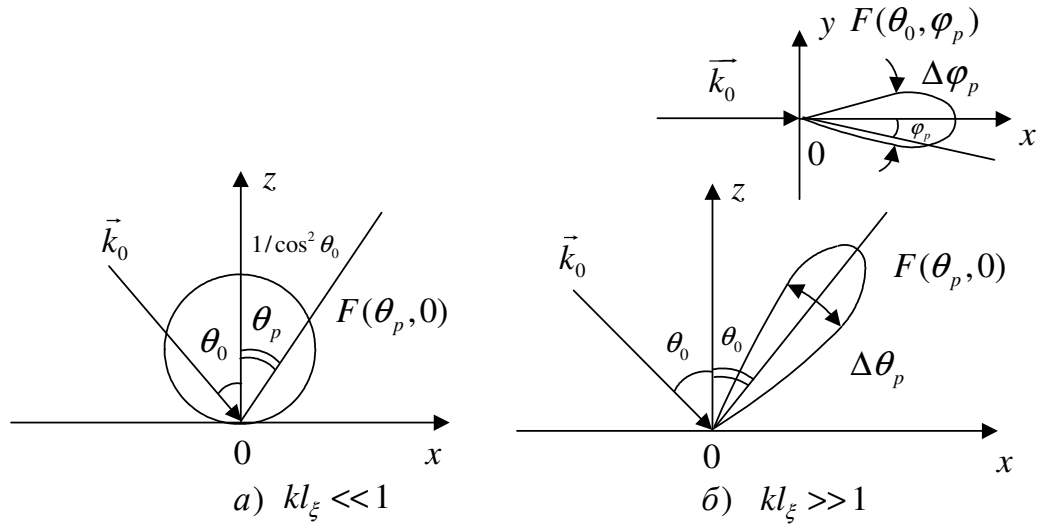


Рис. 19.5.

2. В обратном предельном случае, когда $kl_\xi \gg 1$ ($l_\xi \gg \lambda$, **длинные пологие неровности**), угловая ширина индикатрисы рассеяния $F(\theta_p, \varphi_p)$ определяется поведением спектра $S_\xi(\vec{q}_\perp)$, который оказывается быстро изменяющейся функцией углов θ_p и φ_p . Ширину спектра $S_\xi(\vec{q}_\perp)$ можно оценить из соотношения неопределенности (см. §13). Например, для изотропных неровностей согласно (13.34) это соотношение имеет вид $q_\perp l_\xi \approx 1$, где $q_\perp = |\vec{q}_\perp| = \sqrt{q_x^2 + q_y^2}$. Подставив сюда, взятые из (19.32) значения проекций вектора рассеяния, получаем

$$kl_\xi \sqrt{(\sin \theta_p \cos \varphi_p - \sin \theta_0)^2 + (\sin \theta_p \sin \varphi_p)^2} \approx 1. \quad (19.34)$$

В плоскости падения XOZ ($\varphi_p = 0$) угловая ширина $\Delta\theta_p$ индикатрисы рассеяния согласно (19.34) определяется из следующего соотношения:

$$kl_\xi |\sin \theta_p - \sin \theta_0| \approx 1. \quad (19.35)$$

Так как $kl_\xi \gg 1$, это равенство может выполняться только вблизи направления зеркального отражения ($\theta_p = \theta_0$). Положив $\theta_p = \theta_0 + \Delta\theta_p$, разложим $\sin \theta_p = \sin(\theta_0 + \Delta\theta_p)$ в степенной

ряд по малой добавке $\Delta\theta_p$:

$$\sin \theta_p = \sin(\theta_0 + \Delta\theta_p) \approx \sin \theta_0 + \Delta\theta_p \cos \theta_0 - \frac{1}{2}(\Delta\theta_p)^2 \sin \theta_0. \quad (19.36)$$

Если в правой части ограничиться лишь линейным по $\Delta\theta_p$ слагаемым, то после подстановки (19.36) в (19.35) получаем оценку для угловой ширины $\Delta\theta_p$ индикатрисы рассеяния в вертикальной плоскости

$$\Delta\theta_p \approx \frac{1}{kl_\xi \cos \theta_0} \square \frac{\lambda}{l_\xi} \ll 1. \quad (19.37)$$

Отметим, что найденная величина $\Delta\theta_p$ справедлива при не очень скользких углах падения, когда в разложении (19.36) можно пренебречь третьим слагаемым в правой части по сравнению со вторым. Это возможно при выполнении неравенства

$$\cos \theta_0 \operatorname{ctg} \theta_0 \ll \frac{1}{kl_\xi}. \quad (19.38)$$

При $kl_\xi \gg 1$ условие (19.38) может нарушаться только при очень малых углах скольжения

$\Psi_0 = \frac{\pi}{2} - \theta_0$ (см. рис. 19.4):

$$\Psi_0^2 \leq \frac{1}{kl_\xi} \ll 1. \quad (19.39)$$

Таким образом, при достаточно крутых углах облучения ($\Psi_0 \gg 1/\sqrt{kl_\xi}$) ширина индикатрисы рассеяния $\Delta\theta_p$ определяется углом дифракции на горизонтальном линейном размере неровностей l_ξ :

$$\Delta\theta_p \approx \frac{1}{kl_\xi} \square \frac{\lambda}{l_\xi} \ll 1 \quad (19.40)$$

(безразмерный множитель 2π , как всегда, при качественных оценках можно опустить). Следует, однако, отметить, что, строго говоря, согласно (19.37) угол дифракции определяется не самим горизонтальным размером l_ξ , а его проекцией - $l_\xi \cos \theta_0$ на плоскость, перпендикулярную к направлению падающего на поверхность излучения.

Аналогично, из соотношения неопределенности оценивается и ширина индикатрисы $\Delta \varphi_p$ в горизонтальной плоскости. Положив в (19.34) $\theta_p = \theta_0$, получим

$$kl_\xi \sin \theta_0 \sqrt{(\cos \varphi_p - 1)^2 + \sin^2 \varphi_p} \approx 1.$$

При $kl_\xi \gg 1$ и наклонном падении волны ($\sin \theta_0 \neq 0$) данное условие может быть реализовано лишь в области малых углов φ_p ($\varphi_p \ll 1$). Разложив $\cos \varphi_p$ и $\sin \varphi_p$ в ряд Тейлора, с точностью до линейных слагаемых по φ_p получаем следующую оценку:

$$\Delta \varphi_p = \varphi_p \approx \frac{1}{kl_\xi \sin \theta_0} \square \frac{\lambda}{l_\xi} \ll 1. \quad (19.41)$$

Таким образом, при $kl_\xi \gg 1$ индикатриса рассеяния $F(\theta_p, \varphi_p)$ имеет острый максимум в направлении зеркального отражения, ширина которого имеет порядок угла дифракции $\theta_d \square \lambda/l_\xi \ll 1$ (см. рис. 19.5-б).

19.5. Область применимости “борновского” приближения

В заключение этого параграфа установим границы применимости приближения первого порядка теории возмущений (“борновского” приближения). Это можно сделать на основе формулы (19.28), исходя из достаточно естественного, с физической точки зрения, требования малости потока рассеянной в верхнее полупространство энергии P_1 , уносимого от поверхности полем U_1 , по сравнению с полным потоком энергии P_0 , приносимого на поверхность Σ_0 полем падающей волны U_{nad} :

$$P_1 \ll P_0. \quad (19.42)$$

Так как плотность потока энергии пропорциональна средней интенсивности поля, то полный поток рассеянной энергии можно записать в следующем виде (ср. (14.42)):

$$P_1 = a \int_{C_R} \langle I_1(\vec{R}_p) \rangle d\Sigma, \quad (19.43)$$

где интегрирование ведется по C_R - поверхности верхней полусферы большого радиуса $R = R_p$ с центром в начале координат O (см. рис. 19.6), a - несущественный для дальнейшего анализа постоянный множитель (равный, например, $c/4\pi$, если U_1 - компонента электрического или магнитного поля, при этом величина $\frac{c}{4\pi} \langle |U_1|^2 \rangle$ будет совпадать с плотностью потока энергии - модулем вектора Умова-Пойтинга рассеянного поля).

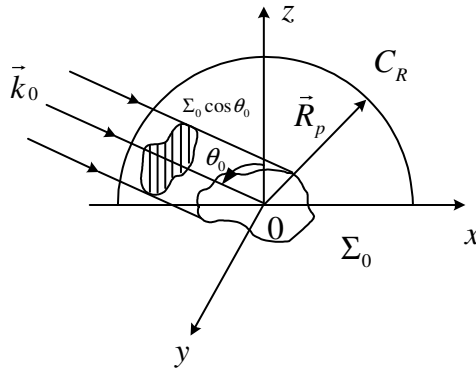


Рис. 19.6

Поток энергии, падающего на поверхность Σ_0 излучения, очевидно, равен (ср. с (14.43))

$$P_0 = aI_0 \Sigma_0 \cos \theta_0 \quad (19.44)$$

Переходя в (19.43) к сферическим координатам (см. рис. 19.4), в которых элемент поверхности $d\Sigma = R_p^2 \sin \theta_p d\theta_p d\varphi_p$, и используя формулу (19.28), получаем

$$P_1 = 4aI_0 k^4 \Sigma_0 \cos^2 \theta_0 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta_p \sin \theta_p d\theta_p \int_0^{2\pi} S_{\xi}(\vec{q}_{\perp}) d\varphi_p. \quad (19.45)$$

С учетом (19.44) и (19.45) неравенство (19.42) может быть записано в форме

$$4k^4 \cos \theta_0 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta_p \sin \theta_p d\theta_p \int_0^{2\pi} S_\xi(\bar{q}_\perp) d\varphi_p \ll 1. \quad (19.46)$$

Интеграл в левой части этого неравенства оценим в двух предельных случаях - мелких ($kl_\xi \ll 1$) и крупных пологих ($kl_\xi \gg 1$) неровностей.

1. При $kl_\xi \ll 1$ для $S_\xi(\bar{q}_\perp)$ можно воспользоваться оценкой (19.30), после чего интегралы по углам θ_p и φ_p легко вычисляются, и неравенство (19.46) принимает вид

$$\frac{2}{3\pi} (k\sigma_\xi)^2 (kl_\xi)^2 \cos \theta_0 \ll 1. \quad (19.47)$$

2. В обратном предельном случае, когда $kl_\xi \gg 1$, функция $S_\xi(\bar{q}_\perp)$, как было показано выше, имеет острый максимум в направлении зеркального отражения ($\theta_p = \theta_0, \varphi_p = 0$). Это позволяет оценить интеграл (19.46), вынося подынтегральную функцию за знак интеграла при $\theta_p = \theta_0$ и $\varphi_p = 0$, а оставшийся интеграл по $d\theta_p d\varphi_p$ заменить на произведение $\Delta\theta_p \Delta\varphi_p$:

$$\begin{aligned} 4k^4 \Sigma_0 \cos \theta_0 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta_p \sin \theta_p d\theta_p \int_0^{2\pi} S_\xi(\bar{q}_\perp) d\varphi_p &\approx \\ &\approx 4k^4 \Sigma_0 \cos^3 \theta_0 \sin \theta_0 S_\xi(0) \Delta\theta_p \Delta\varphi_p. \end{aligned} \quad (19.48)$$

Если мы теперь учтем полученные ранее оценки (19.37) и (19.41), то условие применимости борновского приближения (19.42) можем записать в виде

$$\frac{1}{\pi^2} (k\sigma_\xi \cos \theta_0)^2 \ll 1. \quad (19.49)$$

Более точные вычисления интеграла в (19.46) приводят к неравенству

$$(2k\sigma_\xi \cos \theta_0)^2 \ll 1. \quad (19.50)$$

Отличие (19.49) от (19.50) на множитель $(2\pi)^2$ в левой части связано с качественным характером оценок интеграла (19.48), а также угловых размеров $\Delta\theta_p$ и $\Delta\varphi_p$ индикатрисы рассеяния, исходя из соотношения неопределенности (19.34).

Величина $P = 2k\sigma_\xi \cos \theta_0$ называется **параметром Релея**, и требование его малости, как видно из (19.50), является условием применимости борновского приближения в задаче рассеяния волн на шероховатой поверхности с пологими ($kl_\xi \gg 1$) неровностями. При $kl_\xi \ll 1$ применимость борновского приближения ограничивается неравенством (19.47).

Выводы

Из полученных неравенств следует, что теория возмущений при не очень малых углах скольжения ($\cos \theta_0 \approx 1$) применима только для невысоких неровностей $\xi(\vec{r})$ по сравнению с длиной волны λ . Чем меньше угол скольжения $\Psi_0 = \frac{\pi}{2} - \theta_0$, тем к более высоким неровностям применима теория возмущений (см. (19.50)). Однако при $\theta_0 \rightarrow \pi/2$ ($\Psi_0 \rightarrow 0$) приведенные выше оценки оказываются слишком грубыми (неравенства (19.47) и (19.50) при $\theta_0 \rightarrow \pi/2$ выполняются для сколь угодно высоких неровностей). Случай скользящего распространения волн вдоль шероховатой поверхности требует отдельного, более строгого рассмотрения, что связано с необходимостью учета эффектов затенения и переотражения волн. Круг этих вопросов выходит за рамки данного курса.

ЗАДАЧИ

1. Рассчитать методом малых возмущений распределение средней интенсивности в дальней зоне, предполагая, что характерный размер рассеивающей поверхности $L \ll \sqrt{\Sigma_0}$ намного превосходит масштаб неоднородностей l_ξ случайной поверхности

$$z(x, y) = \xi(x, y) \sin(\alpha x + \nu). \quad (1)$$

Здесь $\xi(x, y)$ - нормально распределенное статистически однородное и изотропное поле случайных амплитуд возвышений (с нулевым средним значением $\bar{\xi} = 0$ и дисперсией σ_ξ^2), α - детерминированная величина, обратно пропорциональная периоду “решетки” L_p ($\alpha = 2\pi/L_p$), а ν - случайная величина, равномерно распределенная в интервале $[-\pi, \pi]$. Считая $\xi(x, y)$ и ν статистически независимыми, построить схематический график $\bar{I}_1(\theta_p, \varphi_p)$.

Решение. Чтобы найти распределение $\bar{I}_1(\theta_p, \varphi_p)$, необходимо знать пространственный спектр шероховатостей $S_z(\vec{q}_\perp)$ (см. формулы (19.28) и (19.29)), который может быть получен путем Фурье преобразования корреляционной функции шероховатостей $B_z(\vec{r}', \vec{r})$. Обозначения, используемые в решении, приведены на рис. 19.7.

При вычислении статистических характеристик случайной поверхности воспользуемся свойством плотности распределения вероятностей для независимых величин

$$W(\xi, \nu) = W(\xi)W(\nu).$$

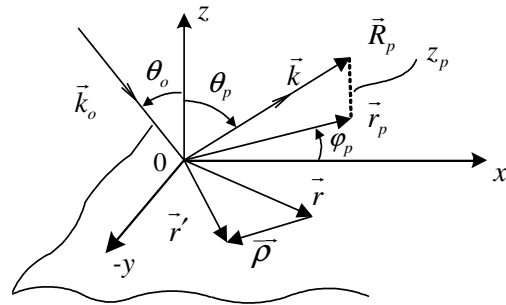


Рис. 19.7

Будем обозначать $\langle \dots \rangle_\xi$ и $\langle \dots \rangle_\nu$ соответственно усреднения по ξ и по ν . Согласно определению (1), среднее значение отклонений $\langle z(x, y) \rangle$ равно

$$\langle z(x, y) \rangle = \langle \xi(x, y) \rangle_\xi \langle \sin(\alpha x + \nu) \rangle_\nu = 0.$$

Построим теперь автокорреляционную функцию шероховатостей поверхности

$$B_z(\vec{r}', \vec{r}) = \langle z(\vec{r}')z(\vec{r}) \rangle = \langle \xi(\vec{r}')\xi(\vec{r}) \rangle_\xi \times \langle \sin(\alpha x' + \nu)\sin(\alpha x'' + \nu) \rangle_\nu.$$

Согласно условию задачи

$$\langle \xi(\vec{r}') \xi(\vec{r}) \rangle_{\xi} = \sigma_{\xi}^2 \exp \left\{ -\frac{(\vec{r}' - \vec{r})^2}{l_{\xi}^2} \right\}. \quad (2)$$

Усреднение по случайной величине v дает

$$\begin{aligned} \langle \sin(\alpha x' + v) \sin(\alpha x + v) \rangle_v &= \\ &= \frac{1}{2} \langle \{ \cos[\alpha(x' - x)] - \cos[\alpha(x' - x) + 2v] \} \rangle_v = \\ &= \frac{1}{2} \cos \alpha(x' - x) - \frac{1}{2} \langle \cos[\alpha(x' + x) + 2v] \rangle_v. \end{aligned} \quad (3)$$

Не составляет труда показать, что второе слагаемое в (3) равно нулю. Действительно,

$$\begin{aligned} \langle \cos[\alpha(x' + x) + 2v] \rangle_v &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos[\alpha(x' + x) + 2v] W(v) dv = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos[\alpha(x' + x) + 2v] dv \equiv 0. \end{aligned}$$

Таким образом, корреляционная функция для заданной случайной поверхности имеет вид

$$B_z(\vec{\rho}) = \frac{\sigma_{\xi}^2}{2} e^{-(\rho_x^2 + \rho_y^2)/l_{\xi}^2} \cos \alpha \rho_x, \quad (4)$$

где $\vec{\rho} = \vec{r}' - \vec{r} = (\rho_x, \rho_y)$. С помощью формулы Винера-Хинчина находим спектральную плотность рассеянного излучения

$$\begin{aligned} S_z(\vec{q}_{\perp}) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} B_z(\vec{\rho}) e^{-i\vec{q}_{\perp} \vec{\rho}} d\vec{\rho} = \\ &= \frac{\sigma_{\xi}^2}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\rho_x^2/l_{\xi}^2 - iq_x \rho_x} \cos \alpha \rho_x d\rho_x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\rho_y^2/l_{\xi}^2 - iq_y \rho_y} d\rho_y. \end{aligned} \quad (5)$$

Представив $\cos \alpha \rho_x = \frac{1}{2} (e^{i\alpha \rho_x} + e^{-i\alpha \rho_x})$, после интегрирования получим

$$S_z(\vec{q}_\perp) = \frac{\sigma_\xi^2}{16\pi^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\rho_x^2/l_\xi^2 - i(q_x + \alpha)\rho_x} d\rho_x + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\rho_x^2/l_\xi^2 - i(q_x - \alpha)\rho_x} d\rho_x \right] \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\rho_y^2/l_\xi^2 - iq_y \rho_y} d\rho_y = \frac{\sigma_\xi^2 l_\xi^2}{16\pi} \left[e^{-(q_x + \alpha)^2 l_\xi^2/4} + e^{-(q_x - \alpha)^2 l_\xi^2/4} \right] e^{-q_y^2 l_\xi^2/4}. \quad (6)$$

Искомая интенсивность рассеянного поля, согласно (19.28), пропорциональна $S_z(\vec{q}_\perp)$:

$$\bar{I}(\theta_p, \varphi_p) \sim S_z(\vec{q}_\perp) \cos^2 \theta_0 \cos^2 \theta_p. \quad (7)$$

Проанализируем теперь найденную зависимость $\bar{I}_1(\theta_p, \varphi_p)$ от углов наблюдения.

Для этого воспользуемся формулой (19.32) для проекций вектора рассеяния:

$$\begin{cases} q_x = k \sin \theta_p \cos \varphi_p - k \sin \theta_0 = k(\sin \theta_p \cos \varphi_p - \sin \theta_0), \\ q_y = k \sin \theta_p \sin \varphi_p - k \sin 0 = k \sin \theta_p \sin \varphi_p. \end{cases} \quad (8)$$

Из (6) и (7) видно, что функция $\bar{I}_1(\theta_p, \varphi_p)$ имеет максимумы при углах наблюдения, удовлетворяющих условиям $q_x = \mp \alpha$ и $q_y = 0$. Отсюда, с учетом (8), получаем

$$\begin{cases} q_x = k \sin \theta_p \cos \varphi_p - k \sin \theta_0 = \mp \alpha, \\ q_y = k \sin \theta_p \sin \varphi_p = 0. \end{cases} \quad (9)$$

После деления второго уравнения на первое при $k \sin \theta_0 \mp \alpha \neq 0$ получаем соотношение $\operatorname{tg} \varphi_p = 0$, т.е. $\varphi_p = 0, \pi$. Это означает, что максимумы рассеянного излучения лежат в плоскости падения. Первое уравнения в (9) при этом принимает вид

$$k \sin \theta_p = \pm [k \sin \theta_0 \mp \alpha], \quad (10)$$

где знак “+” перед квадратными скобками соответствует азимутальному углу $\varphi_p = 0$, а знак “-” – соответственно $\varphi_p = \pi$. При нахождении действительных корней уравнения (10) мы должны учитывать, что области изменения углов θ_p и θ_0 лежат в пределах $0 \leq \theta_{p,0} \leq \pi/2$. Если мы предположим, полярный угол θ_p может принимать и отрицательные значения $-\pi/2 \leq \theta_p \leq \pi/2$, то анализировать уравнение (10) можно с одним знаком “+” перед квадратными скобками, считая, что отрицательным углам θ_p соответствует азимутальный угол $\varphi_p = \pi$. Учитывая, что $L_p = 2\pi/\alpha$ и $k = 2\pi/\lambda$, окончательно получаем

$$\sin \theta_p = \sin \theta_0 \mp \frac{\lambda}{L_p}, \quad (11)$$

где $0 \leq \theta_0 \leq \pi/2$. Решение данного уравнения

$$\theta_p = \theta_{1,2} = \arcsin \left(\sin \theta_0 \mp \frac{\lambda}{L_p} \right) \quad (12)$$

легко проиллюстрировать с помощью рис 19.8.

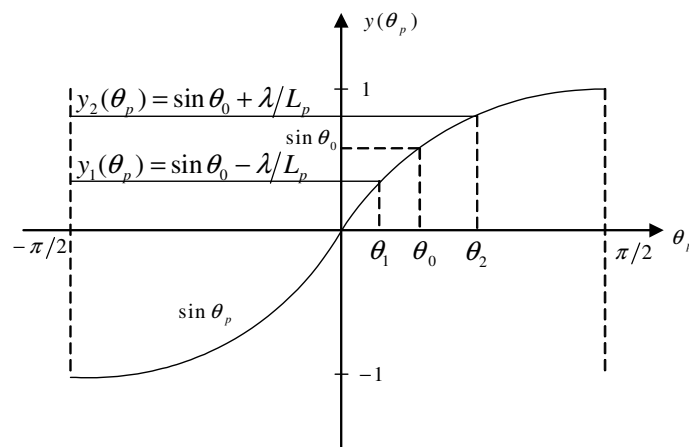


Рис. 19.8.

Видно, что корни уравнения (11) определяются как точки пересечения кривой $y(\theta_p) = \sin \theta_p$ и двух прямых $y_{1,2}(\theta_p) = \sin \theta_0 \mp \frac{\lambda}{L_p}$. Для заданного угла падения θ_0 в зависимости от величины отношения λ/L_p могут наблюдаться либо два действительных корня, либо один, либо вообще ни одного. Отсутствие действительных корней (это возможно при $\lambda/L_p > 1$) говорит о том, что они становятся мнимыми. Соответствующая этим условиям рассеянная волна будет неоднородной (не распространяющейся от поверхности: мнимость величины k_z для нее означает экспоненциальное затухание интенсивности в направлении от поверхности). В другом предельном случае, когда $\lambda/L_p \ll 1$, рассеянная волна распространяется в “почти зеркальных” направлениях ($\theta_p = \theta_{1,2} \approx \theta_0$). Углы, под которыми рассеиваются волны в рассматриваемом случае, определим, положив в (11) $\theta_p = \theta_{1,2} \approx \theta_0 + \Delta\theta_p$, где $\Delta\theta_p \ll \theta_0$. При этом в линейном по малому параметру $\lambda/L_p \ll 1$ приближении решение (12) имеет вид

$$\theta_{1,2} \approx \theta_0 \mp \frac{\lambda}{L_p \cos \theta_0}. \quad (13)$$

Таким образом, направления максимальной интенсивности в плоскости падения совпадают с направлениями $\varphi_p = 0, \pi$; $\theta_p = \theta_{1,2}$.

Схематическое изображение индикатрисы рассеяния приведено на рис. 19.9.

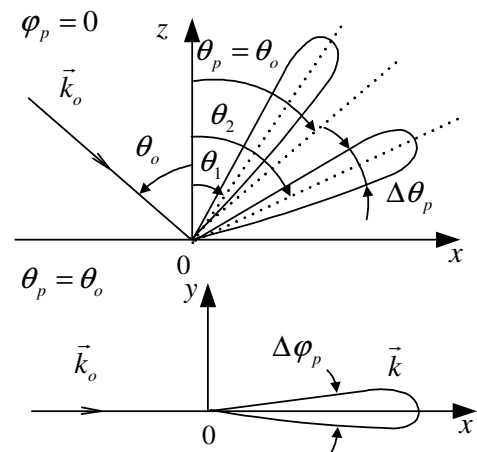


Рис. 19.9

Согласно (6) ширина лепестков $\Delta\theta_p$ на уровне $1/e$ оцениваются из следующих соотношений:

$$(q_x \pm \alpha)^2 l_\xi^2 = 4,$$

$$q_y^2 l_\xi^2 = 4.$$

Для первого лепестка ($\theta_p = \theta_1$), положив в (8) $\varphi_p = 0$, $\theta_p = \theta_1 + \Delta\theta_p$, получаем

$$l_\xi^2 \left\{ k \left[\sin(\theta_1 + \Delta\theta_p) - \sin \theta_0 \right] + \alpha \right\}^2 = 4 \quad (14)$$

Предположив $|\Delta\theta_p| \ll \theta_1$, упростим (14):

$$\begin{aligned} l_\xi^2 \left\{ k \left[\sin \theta_1 + \Delta\theta_p \cos \theta_1 - \sin \theta_0 \right] + \alpha \right\}^2 &\approx \\ \approx l_\xi^2 \left\{ k \left[\cancel{\sin \theta_0} - \frac{\alpha}{k} + \Delta\theta_p \cos \theta_1 - \cancel{\sin \theta_0} \right] + \alpha \right\}^2 &= \\ = k^2 l_\xi^2 (\Delta\theta_p)^2 \cos^2 \theta_1 \approx 4. \end{aligned} \quad (15)$$

Отсюда получаем

$$\Delta\theta_p \approx \frac{2}{kl_\xi \cos \theta_1} \ll 1. \quad (16)$$

Аналогичную оценку можно получить и для второго лепестка ($\theta_p = \theta_2$):

$$\Delta\theta_p \approx \frac{2}{kl_\xi \cos \theta_2} \ll 1. \quad (17)$$

Если $\alpha/k \ll 1$, то, как было показано выше, $\theta_{1,2} \approx \theta_0$ и мы приходим к следующей оценке:

$$\Delta\theta_p \approx \frac{2}{kl_\xi \cos \theta_0}. \quad (18)$$

Для практического использования дифракционных решеток интерес представляет лишь случай $\Delta\theta_p \ll \theta_2 - \theta_1$. В рамках принятых допущений, согласно (13) имеем

$\theta_2 - \theta_1 \approx \frac{2\alpha}{k \cos \theta_0}$. Отсюда с учетом (18) получаем $\frac{1}{l_\xi} \ll \alpha = \frac{2\pi}{L_p}$. Следовательно, для

рассматриваемой периодической структуры на l_ξ накладывается ограничение $l_\xi \gg L_p/2\pi$.

Рассматриваемый случай наглядно демонстрирует резонансный характер рассеяния: каждой гармонике неоднородностей соответствует свое рассеянное поле. Поскольку в данной задаче возмущение границы описывается одной гармоникой, то в рассеянном поле существуют только две волны с векторами рассеяния $\vec{q}_{1,2} = (\pm\alpha, 0, 0)$.

Для физической интерпретации полученных формул рассмотрим случай нормального падения волны ($\theta_0 = 0$) на поверхность, заданную выражением (1). На рис. 19.10 показан процесс отражения плоской волны от идеальной синусоидальной дифракционной решетки с периодом $L_p = 2\pi/\alpha$ и начальной фазой ν .

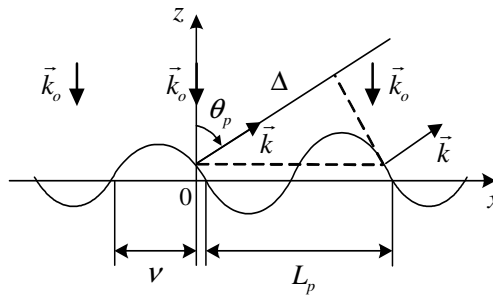


Рис. 19.10

Каждая точка поверхности является источником расходящейся сферической волны. Волны, рассеянные различными участками поверхности, когерентно складываются. Видно, что в одном и том же направлении θ_p волны, рассеянные участками поверхности, сдвинутыми друг от друга на период $L_p, 2L_p, \dots, nL_p$, будут иметь оптические разности хода $\Delta, 2\Delta, \dots, n\Delta$, где $\Delta = L_p \sin \theta_p$. Рассеянное от всех участков поверхности излучение будет синфазно, если $\Delta = \pm m\lambda$ ($m = 0, 1, 2, \dots$). В результате мы приходим к условию

$L_p \sin \theta_p = \pm m\lambda$. При $m = 0$ угол синфазного отражения совпадает с падающим углом $\theta_p = \theta_0 = 0$. Случаю $m = 1$ соответствует первая отраженная гармоника с углами отражения $\theta_p = \theta_{1,2} = \mp \arcsin(\lambda/L_p)$ и т.д.

По мере роста m интенсивности рассеянных гармоник быстро убывают. Самыми интенсивными являются гармоники с $m = 0$ и $m = 1$. В приближении слабошероховатых неоднородностей, когда $k\sigma_\xi \ll 1$ ($\lambda \gg \sigma_\xi$), в рассеянном поле учитываются лишь

гармоники с $m=0$ и $m=1$. При этом углы рассеяния для первой гармоники равны $\theta_p = \theta_{1,2} \pm \arcsin(\lambda/L_p)$ и зависят от длины волны λ падающего излучения. Полученное соотношение физически означает, что, несмотря на то что рассеянное излучение формируется всей поверхностью, синфазно рассеивают лишь те точки поверхности, пространственное разнесение которых удовлетворяет условию $L_p \sin \theta_p = \pm \lambda$.

2. При тех же предположениях, что и в задаче 1, рассчитать методом возмущений распределение интенсивности рассеянной волны для случайной поверхности вида

$$z(x, y) = \xi(x, y) \sin(\alpha x + \nu) \sin(\beta y + \psi). \quad (1)$$

Здесь α, β - постоянные величины, определяющие периоды решетки L_{px}, L_{py} вдоль направлений x и y ($\alpha = 2\pi/L_{px}, \beta = 2\pi/L_{py}$). Случайные величины ξ, ν и ψ независимы, причем ν и ψ равномерно распределены в интервале $[-\pi, \pi]$, а $\xi(\vec{r})$ - статистически однородное и изотропное нормально распределенное поле амплитуд возвышений. Построить схематический график $\bar{I}_1(\theta_p, \varphi_p)$.

Решение. Используем алгоритм и результаты вычислений, приведенные в задаче 1:

$$z(x, y) \rightarrow B_z(\vec{r}', \vec{r}) \rightarrow S_z(\vec{q}_\perp) \rightarrow \bar{I}_1(\theta, \varphi).$$

Согласно этой схеме, для заданной поверхности $z(x, y)$ построим вначале автокорреляционную функцию $B_z(\vec{r}', \vec{r})$:

$$\begin{aligned} B_z(\vec{r}', \vec{r}) &= \langle \xi(\vec{r}') \xi(\vec{r}) \rangle_\xi \langle \sin(\alpha x' + \nu) \sin(\alpha x + \nu) \rangle_\nu \langle \sin(\beta y' + \psi) \sin(\beta y + \psi) \rangle_\psi = \\ &= \frac{\sigma_\xi^2}{4} e^{-(\rho_x^2 + \rho_y^2)/l_\xi^2} \cos(\alpha \rho_x) \cos(\beta \rho_y). \end{aligned} \quad (2)$$

По найденному виду $B_z(\vec{\rho})$ и формуле Винера-Хинчина определяем $S_z(\vec{q}_\perp)$:

$$S_z(\vec{q}_\perp) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} B_z(\vec{\rho}) e^{-i\vec{q}_\perp \vec{\rho}} d\vec{\rho} = \frac{\sigma_\xi^2}{16\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\rho_x^2 + \rho_y^2)/l_\xi^2} \cos \alpha \rho_x \cos \beta \rho_y \times$$

$$\times e^{-i(q_x \rho_x + q_y \rho_y)} d\rho_x d\rho_y = \frac{\sigma_\xi^2}{16\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\alpha \rho_x) e^{-\rho_x^2/l_x^2 - i q_x \rho_x} d\rho_x \int_{-\infty}^{\infty} \cos \beta \rho_y e^{-\rho_y^2/l_y^2 - i q_y \rho_y} d\rho_y. \quad (5)$$

Каждый из интегралов вычисляется аналогично тому, как это было сделано в задаче 1. В результате мы приходим к следующему выражению:

$$S_z(\vec{q}_\perp) = \frac{\sigma_\xi^2 l_\xi^2}{32\pi} \left[e^{-(q_x + \alpha)^2 l_\xi^2/4} + e^{-(q_x - \alpha)^2 l_\xi^2/4} \right] \left[e^{-(q_y + \beta)^2 l_\xi^2/4} + e^{-(q_y - \beta)^2 l_\xi^2/4} \right]. \quad (6)$$

Согласно (19.28) значение $\bar{I}_1(\theta, \varphi)$ равно

$$\bar{I}_1(\theta_p, \varphi_p) = I_0 \frac{k^4 \sigma_\xi^2 l_\xi^2 \Sigma_0 \cos^2 \theta_0 \cos^2 \theta_p}{8R_p^2} \times$$

$$\times \left[e^{-(q_x + \alpha)^2 l_\xi^2/4} + e^{-(q_x - \alpha)^2 l_\xi^2/4} \right] \left[e^{-(q_y + \beta)^2 l_\xi^2/4} + e^{-(q_y - \beta)^2 l_\xi^2/4} \right]. \quad (7)$$

Из найденного выражения видно, что максимумы излучения наблюдаются под углами, для которых выполняются следующие равенства: $q_x = \mp \alpha$, $q_{\perp y} = \mp \beta$, т.е.

$$\begin{cases} \sin \theta_p \cos \varphi_p = \sin \theta_0 \mp \frac{\alpha}{k}, \\ \sin \theta_p \sin \varphi_p = \mp \frac{\beta}{k}. \end{cases}, \quad (8)$$

Анализ данной системы уравнений показывает, что для рассматриваемой поверхности характерны четыре “выброса” рассеянного излучения под углами $\theta_p = \theta_{1,2}$, $\varphi_p = \varphi_{1-4}$, где

$$\begin{cases}
 \theta_1 = \arcsin \sqrt{\left(\sin \theta_0 - \frac{\alpha}{k}\right)^2 + \frac{\beta^2}{k^2}}, \\
 \varphi_{1,3} = \pm \operatorname{arctg} \left(\frac{\beta}{k \sin \theta_0 + \alpha} \right), \\
 \theta_2 = \arcsin \sqrt{\left(\sin \theta_0 + \frac{\alpha}{k}\right)^2 + \frac{\beta^2}{k^2}}, \\
 \varphi_{2,4} = \pm \operatorname{arctg} \left(\frac{\beta}{k \sin \theta_0 - \alpha} \right).
 \end{cases} \quad (9)$$

Таким образом, для рассматриваемой поверхности рассеянное излучение $\bar{I}_1(\theta, \varphi)$ имеет сложную многолепестковую структуру, схематическое изображение которой показано на рис 19.11.

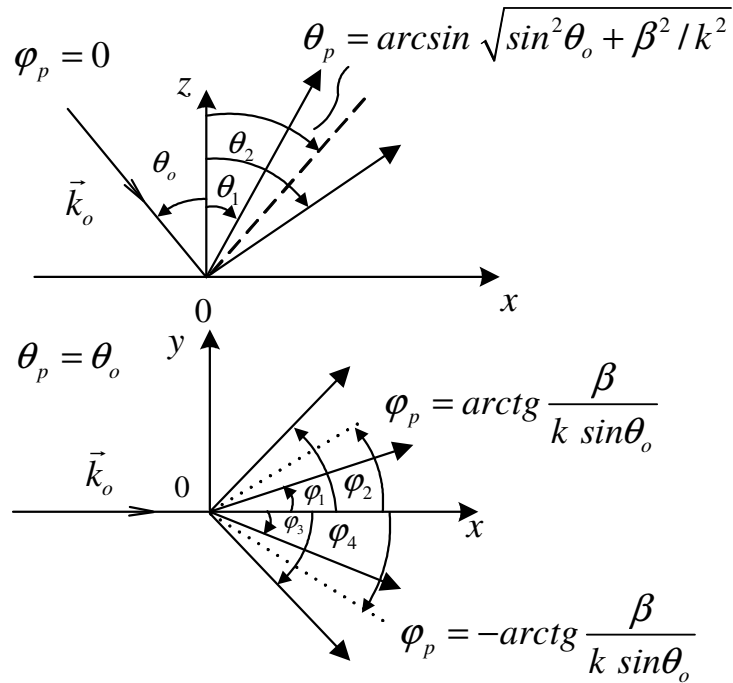


Рис. 19.11

§ 20. Рассеяние на поверхности с большими неровностями (метод Кирхгофа)

Приведенные в конце предыдущего параграфа неравенства (19.47) и (19.50) ограничивают область применимости полученных с помощью теории возмущений результатов либо малыми неровностями, либо достаточно длинными волнами. В данном же разделе мы рассмотрим обратный предельный случай, когда размеры неровностей могут быть сколь угодно велики по сравнению с длиной волны падающего на поверхность излучения. Фактически речь будет идти о приближении физической оптики в задаче отражения (рассеяния) волн от неплоской (криволинейной) границы раздела двух сред.

20.1. Граничные условия

Так же, как и в § 19, будем решать задачу рассеяния скалярного поля U на неровностях в среднем плоской поверхности $\Sigma(\vec{R})$, с которой мы совместим плоскость $z = 0$ декартовой системы координат XYZ (рис. 20.1).

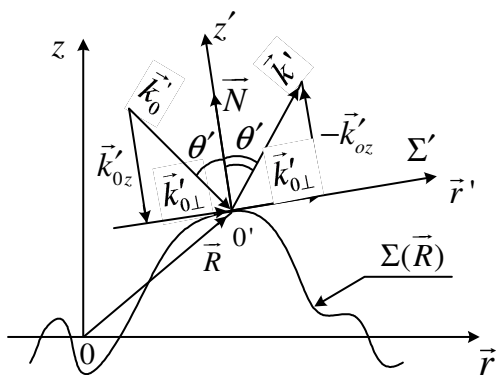


Рис. 20.1.

Для определения вида граничных условий произведем вначале некоторые вспомогательные преобразования. Так, в произвольной точке $\vec{R} = (x, y, z)$ поверхности $\Sigma(\vec{R})$ проведем касательную плоскость Σ' и поместим в точку касания O' начало новой штрихованной декартовой системы координат $X'Y'Z'$. Ось $O'Z'$ направим вдоль вектора нормали \vec{N} к поверхности $\Sigma(\vec{R})$ (см. рис. 20.1). В построенной таким образом системе

координат $X'Y'Z'$ уравнение касательной плоскости Σ' определяется как $z' = 0$, а радиус-вектор имеет компоненты $\vec{R}' = (x', y', z')$. Искомое поле $U(\vec{R}')$ в небольшой окрестности точки O' так же, как и в предыдущем параграфе, представим в виде суммы заданного падающего $U_{nad}(\vec{R}')$ и отраженного $U_{omp}(\vec{R}')$ полей: $U(\vec{R}') = U_{nad}(\vec{R}') + U_{omp}(\vec{R}')$. При этом, естественно, предполагается что, во-первых, точка O' не затенена другими участками поверхности относительно падающего излучения, и, во-вторых, что в нее, кроме U_{nad} , не приходят никакие другие волны, уже испытавшие отражение от других участков поверхности. Иными словами, мы будем предполагать, что затенения поверхности и многократные отражения от нее не играют существенной роли, и ими можно пренебречь. Очевидно, что выполнение этих требований возможно только для достаточно пологих неровностей ($\sigma_\xi/l_\xi \ll 1$) и при не очень скользком облучении ($\Psi_0 \gg \sigma_\xi/l_\xi$).

Предположим далее, что длина волны λ , падающего на поверхность $\Sigma(\vec{R})$ излучения, достаточно мала и размеры первой зоны Френеля вблизи $\Sigma(\vec{R})$ намного меньше характерных масштабов изменения $\Sigma(\vec{R})$ во всех направлениях (в качестве последних могут, например, выступать радиусы кривизн поверхности). В этом случае в малой окрестности точки O' можно приближенно считать, что, во-первых, поле падающей волны $U_{nad}(\vec{R}')$ является плоской (квазиплоской) волной:

$$U_{nad}(\vec{R}') = A(\vec{R}') e^{i\vec{k}'_0 \vec{R}'} = A(\vec{R}') e^{i(\vec{k}'_{0\perp} \vec{r} + k'_{0z} z')}, \quad (20.1)$$

где $A(\vec{R}')$ - медленно изменяющаяся (по сравнению с экспоненциальным множителем) амплитуда падающего излучения, \vec{k}'_0 - волновой вектор падающей волны, имеющий соответственно тангенциальную - $\vec{k}'_{0\perp}$ и нормальную - $\vec{k}'_{0z} = k'_{0z} \vec{e}'_z$ составляющие: $\vec{k}'_0 = \vec{k}'_{0\perp} + \vec{k}'_{0z}$ (зависящий от времени множитель $e^{-i\omega t}$, как всегда, опускается). Во-вторых, процесс отражения $U_{nad}(\vec{R}')$ от истинной криволинейной поверхности $\Sigma(\vec{R})$ можно рассматривать как отражение от касательной плоскости Σ' ($z' = 0$). При этом отраженное от плоскости $z' = 0$ по законам геометрической оптики волновое поле

$U_{omp}(\vec{R}')$ также является плоской (квазиплоской) волной, амплитуда которой отличается от $A(\vec{R}')$ на множитель R , называемый **коэффициентом отражения**, а волновой вектор $\vec{k}'_{omp} = (\vec{k}'_{\perp omp}, \vec{k}'_{z omp})$, имеет следующие компоненты: тангенциальная (касательная к поверхности Σ' , т.е. лежащая в плоскости $z' = 0$) компонента сохраняется ($\vec{k}'_{\perp omp} = \vec{k}'_{0\perp}$), а нормальная (направленная вдоль оси $O'Z'$) изменяет знак на противоположный ($\vec{k}'_{z omp} = -\vec{k}'_{0z}$):

$$U_{omp}(\vec{R}') = R A(\vec{R}') e^{i\vec{k}'_{omp}\vec{R}'} = R A(\vec{R}') e^{i(\vec{k}'_{0\perp}\vec{r}' - k'_{0z}z')}. \quad (20.2)$$

Проделанные упрощения позволяют теперь нам выразить значение полного поля $U(\vec{R}') = U_{nad}(\vec{R}') + U_{omp}(\vec{R}')$ на касательной плоскости $z' = 0$ через заданное поле $U_{nad}(\vec{R}')$, падающего на поверхность излучения. Так, из формул (20.1) и (20.2) получим следующие соотношения:

$$U(\vec{R}')\Big|_{z'=0} = [U_{nad}(\vec{R}') + U_{omp}(\vec{R}')]_{z'=0} = (1+R)U_{nad}(\vec{R}')\Big|_{z'=0}. \quad (20.3-a)$$

Аналогичным путем вычисляется и значение нормальной производной

$$\frac{\partial U(\vec{R}')}{\partial N}\Big|_{z'=0} = \frac{\partial}{\partial z'} [U_{nad}(\vec{R}') + U_{omp}(\vec{R}')]_{z'=0} = (1-R) \frac{\partial}{\partial z'} U_{nad}(\vec{R}')\Big|_{z'=0} \quad (20.3-b)$$

(при выводе этой формулы амплитуду $A(\vec{R}')$ можно приближенно считать постоянной величиной в малой окрестности точки O' и пренебречь производной от нее по $\partial z'$).

Возвращаясь теперь в старую (нештрихованную) систему координат XYZ , мы можем записать

$$U(\vec{R})\Big|_{\Sigma} = [U_{nad}(\vec{R}) + U_{omp}(\vec{R})]_{\Sigma} = (1+R)U_{nad}(\vec{R})\Big|_{\Sigma}, \quad (20.4-a)$$

$$\left. \frac{\partial U(\vec{R})}{\partial N} \right|_{\Sigma} = \frac{\partial}{\partial N} [U_{nad}(\vec{R}) + U_{omp}(\vec{R})]_{\Sigma} = (1-R) \left. \frac{\partial}{\partial N} U_{nad}(\vec{R}) \right|_{\Sigma}. \quad (20.4-б)$$

Следует заметить, что найденная связь между полями и их нормальными производными является точной для плоской волны, падающей на плоскую границу раздела, и приближенно справедлива для локально плоской волны (20.1), падающей на локально плоскую поверхность Σ , т.е. на поверхность с плавными неровностями.

20.2. Построение приближенного динамического решения

Формулы (20.4) определяют значения поля U и его нормальной производной $\partial U/\partial N$ в каждой точке \vec{R} поверхности $\Sigma(\vec{R})$, и для нахождения поля U в произвольной точке наблюдения \vec{R}_p можно воспользоваться формулой Грина (17.8). Для этого дополним рассеивающую неровную поверхность $\Sigma(\vec{R})$ до замкнутой поверхности (см. рис. 20.2) с помощью полусферы C_a (достаточно большого радиуса a и с центром в начале координат O) и плоскими участками Σ_{nl} (от границы Σ в плоскости $z=0$ до окружности радиуса a).

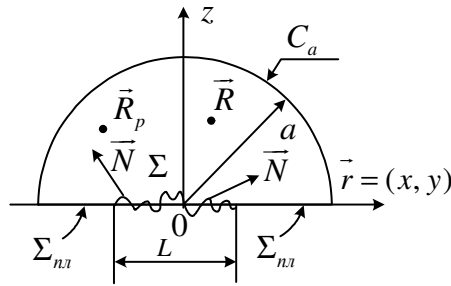


Рис. 20.2.

Тогда согласно (17.8) имеем

$$U(\vec{R}_p) = \int_V G(\vec{R}, \vec{R}_p) Q(\vec{R}) d\vec{R} + \frac{1}{4\pi} \oint_{\Sigma + \Sigma_{nl} + C_a} \left[U(\vec{R}) \frac{\partial G(\vec{R}, \vec{R}_p)}{\partial N} - G(\vec{R}, \vec{R}_p) \frac{\partial U(\vec{R})}{\partial N} \right] d\Sigma. \quad (20.5)$$

Здесь нормаль \vec{N} направлена внутрь замкнутой поверхности, с этим и связано отличие в

знаке перед вторым интегралом в (20.5) по сравнению с (17.8). В первом слагаемом интегрирование проводится по объему V , ограниченному поверхностью $\Sigma + \Sigma_{nl} + C_a$. Если в качестве функции $G(\vec{R}, \vec{R}_p)$ взять функцию Грина неограниченного (свободного) пространства

$$G(\vec{R}, \vec{R}_p) = \frac{e^{ik|\vec{R}-\vec{R}_p|}}{|\vec{R}-\vec{R}_p|}, \quad (20.6)$$

то объемный интеграл в (20.5) описывает поле заданных источников $Q(\vec{R})$ в свободном пространстве (в отсутствие отражающей поверхности Σ), т.е. дает поле падающей волны:

$$U_{nad}(\vec{R}_p) = \int_V \frac{e^{ik|\vec{R}-\vec{R}_p|}}{|\vec{R}-\vec{R}_p|} Q(\vec{R}) d\vec{R}, \quad (20.7)$$

а поверхностный интеграл описывает рассеяние этого поля на поверхности.

Если в поверхностном интеграле в (20.5) вместо полного поля U подставить только поле падающей волны U_{nad} , то этот интеграл тождественно обратится в нуль:

$$\frac{1}{4\pi} \oint_{\Sigma + \Sigma_{nl} + C_a} \left[U_{nad}(\vec{R}) \frac{\partial}{\partial N} \frac{e^{ik|\vec{R}-\vec{R}_p|}}{|\vec{R}-\vec{R}_p|} - \frac{e^{ik|\vec{R}-\vec{R}_p|}}{|\vec{R}-\vec{R}_p|} \frac{\partial U_{nad}(\vec{R})}{\partial N} \right] d\Sigma \equiv 0. \quad (20.8)$$

Для доказательства данного утверждения рассмотрим безграничное пространство с заданным распределением источников $Q(\vec{R})$ и проведем в нем воображаемую поверхность, совпадающую с замкнутой поверхностью $\Sigma + \Sigma_{nl} + C_a$. Формула Грина (20.5) будет справедлива и в этом случае. Для функции Грина $G(\vec{R}, \vec{R}_p)$, соответствующей безграничному пространству, объемный интеграл определяет поле падающей волны U_{nad} . Полное же поле U , стоящее в левой части равенства (20.5), также должно совпасть с U_{nad} ($U = U_{nad}$) (других полей, кроме U_{nad} , в пространстве нет). В результате формула Грина (20.5) принимает вид

$$U_{na\delta}(\vec{R}_p) = U_{na\delta}(\vec{R}_p) + \frac{1}{4\pi} \oint_{\Sigma + \Sigma_{nl} + C_a} \left[U_{na\delta}(\vec{R}) \frac{\partial}{\partial N} \frac{e^{ik|\vec{R}-\vec{R}_p|}}{|\vec{R}-\vec{R}_p|} - \frac{e^{ik|\vec{R}-\vec{R}_p|}}{|\vec{R}-\vec{R}_p|} \frac{\partial U_{na\delta}(\vec{R})}{\partial N} \right] d\Sigma.$$

Данное равенство может удовлетвориться только при выполнении условия (20.8). Таким образом, замена полного поля U на поле падающей волны $U_{na\delta}$ в каждой точке поверхности $\Sigma + \Sigma_{nl} + C_a$ означает отсутствие какой-либо реальной физической поверхности вообще, ибо на реальной поверхности обязательно возникают отраженные волны, и полное поле U отличается от поля $U_{na\delta}$ свободного пространства.

Вычтем теперь из правой части (20.5) выражение (20.8). Левая часть формулы (20.5) при этом не должна измениться, т.к. вычитаемая величина (20.8) равна нулю,

$$U(\vec{R}_p) = U_{na\delta}(\vec{R}_p) + \frac{1}{4\pi} \oint_{\Sigma + \Sigma_{nl} + C_a} \left\{ [U(\vec{R}) - U_{na\delta}(\vec{R})] \frac{\partial}{\partial N} G(\vec{R}, \vec{R}_p) - G(\vec{R}, \vec{R}_p) \frac{\partial}{\partial N} [U(\vec{R}) - U_{na\delta}(\vec{R})] \right\} d\Sigma \equiv 0. \quad (20.9)$$

Так же, как и в МФЭ (см.(17.9)), устремим радиус полусферы a к бесконечности ($a \rightarrow \infty$). При этом интеграл по C_a исчезает (в силу принципа излучения). Кроме того, на воображаемой поверхности Σ_{nl} полное поле U заменим полем падающей волны $U_{na\delta}$, пренебрегая рассеянными на реальной поверхности Σ волнами. Этот прием был применен еще Кирхгофом при решении задач дифракции волн на плоских экранах: поле на поверхности, дополняющей экран до полной плоскости, предполагалось таким же, каким оно было бы в отсутствие экрана, т.е. совпадающим с полем падающей волны $U_{na\delta}$. Отсюда происходит еще одно, очень часто употребляемое название излагаемого метода расчета поля, рассеянного на неровной поверхности, - **метод Кирхгофа**. После замены U на $U_{na\delta}$ на Σ_{nl} интеграл по поверхности Σ_{nl} обращается в нуль (за счет равенства нулю подынтегрального выражения). На реальной же поверхности Σ воспользуемся формулами (20.4), связывающими U и $\partial U/\partial N$ с полем падающей волны. В результате формула (20.9) принимает следующий вид:

$$U(\vec{R}_p) = U_{na\delta}(\vec{R}_p) + \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \left\{ R \frac{\partial}{\partial N} [U_{na\delta}(\vec{R}) G(\vec{R}, \vec{R}_p)] \right\} d\Sigma. \quad (20.10)$$

Формула (20.10) решает (конечно, приближенно) "динамическую" часть задачи, представляя рассеянное на неровной поверхности волновое поле в виде интеграла от известных функций. Если поверхность Σ является случайной, поле $U(\vec{R}_p)$ также оказывается случайным, и для его описания необходим статистический подход. В дальнейшем мы ограничимся вычислением первых двух моментов поля U - когерентной составляющей - $\langle U \rangle$ (среднего поля) и средней интенсивности $\langle I \rangle = \langle |U|^2 \rangle$. Прежде чем вычислять указанные статистические моменты поля U , примем ряд упрощающих предположений.

1. В качестве $Q(\vec{R})$ рассмотрим точечный единичный источник, расположенный в точке \vec{R}_s :

$$Q(\vec{R}) = \delta(\vec{R} - \vec{R}_s) \quad (20.11)$$

и порождающий U_{nao} в виде расходящейся сферической волны:

$$U_{nao}(\vec{R}) = \frac{e^{ik|\vec{R}-\vec{R}_s|}}{|\vec{R}-\vec{R}_s|}. \quad (20.12)$$

Эта формула следует из (20.7) после подстановки в нее (20.11) и выполнения интегрирования по объему с помощью δ -функции.

2. Коэффициент отражения R приближенно будем считать постоянной величиной во всех точках поверхности Σ , что позволяет вынести его за знак интеграла в формуле (20.10). Подставляя (20.6) и (20.12) в (20.10), для рассеянного поля $U_{pac}(\vec{R}_p) = U(\vec{R}_p) - U_{nao}(\vec{R}_p)$ получаем

$$U_{pac}(\vec{R}_p) = \frac{R}{4\pi} \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial N} \frac{e^{ik(|\vec{R}_p-\vec{R}|+|\vec{R}_s-\vec{R}|)}}{|\vec{R}_p-\vec{R}||\vec{R}_s-\vec{R}|} d\Sigma. \quad (20.13)$$

3. Если источник поля \vec{R}_s и точка наблюдения \vec{R}_p находятся достаточно далеко от рассеивающей поверхности Σ (в зоне Фраунгофера) и выполняются неравенства

$$\frac{L}{R_p}, \frac{kL^2}{R_p} \ll 1; \quad \frac{L}{R_s}, \frac{kL^2}{R_s} \ll 1, \quad (20.14)$$

(здесь, как и в предыдущем параграфе, через L обозначен линейный размер рассеивающей поверхности в плоскости $z=0$ (см. рис. 20.2)), то расстояния $|\vec{R}_p - \vec{R}|$ и $|\vec{R}_s - \vec{R}|$ могут быть разложены в ряд Тейлора по малым величинам $R/R_s, R/R_p \ll 1$:

$$|\vec{R}_p - \vec{R}| \approx R_p - \frac{\vec{R}_p \vec{R}}{R_p}, \quad |\vec{R}_s - \vec{R}| \approx R_s - \frac{\vec{R}_s \vec{R}}{R_s}.$$

При этом формула (20.13) существенно упрощается:

$$U_{pac}(\vec{R}_p) \approx \frac{R}{4\pi R_p R_s} e^{ik(R_p + R_s)} \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial N} e^{-i\vec{q}\vec{R}} d\Sigma. \quad (20.15)$$

Здесь $\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}_0$ - вектор рассеяния ($\vec{k} = k \frac{\vec{R}_p}{R_p}$ - волновой вектор рассеянного поля в точке наблюдения, $\vec{k}_0 = -k \frac{\vec{R}_s}{R_s}$ - волновой вектор падающей волны вблизи поверхности Σ).

4. Радиус-вектор \vec{R} точек, принадлежащих поверхности Σ , можно записать в виде суммы двух ортогональных векторов (рис. 20.3):

$$\vec{R} = \vec{r} + \xi(\vec{r}) \vec{e}_z, \quad (20.16)$$

где $\vec{r} = (x, y)$ - проекция \vec{R} на плоскость $z=0$, а $\xi(\vec{r})$ - случайная функция, описывающая отклонения поверхности Σ от средней плоскости. Производная по нормали N в формуле (20.15) легко вычисляется по известному правилу вычисления

производной вдоль заданного направления:

$$\frac{\partial}{\partial N} e^{-i\vec{q}\vec{R}} = (\vec{N}\vec{\nabla}_{\vec{R}}) e^{-i\vec{q}\vec{R}} = -i(\vec{N}\vec{q}) e^{-i\vec{q}\vec{R}}. \quad (20.17)$$

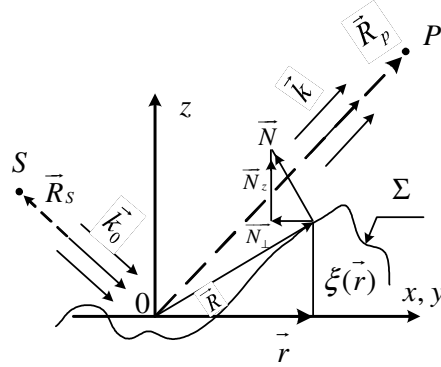


Рис. 20.3.

Единичный вектор нормали \vec{N} к поверхности Σ в текущей точке имеет компоненты $\vec{N} = (\vec{N}_{\perp}, \vec{N}_z)$, где

$$\vec{N}_{\perp} = -\frac{\vec{\gamma}}{\sqrt{1+\gamma^2}}, \quad \vec{N}_z = \frac{\vec{e}_z}{\sqrt{1+\gamma^2}}, \quad (20.18)$$

а $\vec{\gamma} = \vec{\gamma}(\vec{r}) = \vec{\nabla}_{\vec{r}}\xi(\vec{r})$ - векторное поле градиентов возвышений $\xi(\vec{r})$ случайной поверхности Σ .

5. Наконец, в формуле (20.15) перейдем от интегрирования по криволинейной поверхности Σ к интегрированию по ее проекции Σ_0 на плоскость $z = 0$ (см. рис. 20.4):

$$d\Sigma = \frac{d\Sigma_0}{N_z} = \frac{d\vec{r}}{N_z}. \quad (20.19)$$

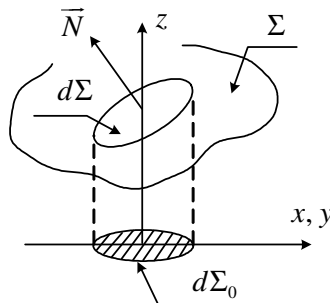


Рис. 20.4.
440

После проделанных упрощений для рассеянного поля в дальней зоне получим

$$U_{рас}(\vec{R}_p) \approx \frac{R}{4\pi i R_s R_p} e^{ik(R_p + R_s)} \int_{\Sigma_0} [q_z - \vec{q}_\perp \vec{\gamma}(\vec{r})] e^{-i[\vec{q}_\perp \vec{r} + q_z \xi(\vec{r})]} d\vec{r}, \quad (20.20)$$

где $\vec{q}_\perp = (q_x, q_y)$ - проекция вектора \vec{q} на плоскость $z = 0$.

6. При рассеянии коротких волн на высоких неровностях наблюдаются большие флуктуации фазы в показателе экспоненты, что, в свою очередь, приводит к быстрым осцилляциям подынтегральной функции в (20.20). В этом случае при оценке интеграла можно воспользоваться методом стационарной фазы (см. § 19). Роль случайной фазы в (20.20) играет величина $S(\vec{r}) = \vec{q}_\perp \vec{r} + q_z \xi(\vec{r})$, описывающая дополнительный набег фазы в каждой точке (экрана) \vec{r} за счет отклонения поверхности Σ от плоскости $z = 0$ на величину $\xi(\vec{r})$. В коротковолновом приближении основной вклад в интеграл (20.20) дают точки, где функция $S(\vec{r})$ достигает экстремума:

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} S(\vec{r}) = \vec{q}_\perp + q_z \vec{\gamma}(\vec{r}) = 0. \quad (20.21)$$

Предположим, что векторное уравнение (абберационное) имеет действительные корни $\vec{r} = \vec{r}_m$, $m = 1, 2, \dots$. Согласно (20.21) в точках стационарности фазы наклоны поверхности $\vec{\gamma}(\vec{r})$ имеют одно и то же не зависящее от m значение,:

$$\vec{\gamma}(\vec{r} = \vec{r}_m) = -\frac{\vec{q}_\perp}{q_z}. \quad (20.22)$$

Отсюда следует, что и вектор нормали \vec{N} , проведенный к поверхности в точках $\vec{r} = \vec{r}_m$, также не зависит от m . Действительно, согласно (20.18) имеем

$$\vec{N}(\vec{r}_m) = \frac{-\vec{\gamma}(\vec{r}_m) + \vec{e}_z}{\sqrt{1 + \gamma^2(\vec{r}_m)}} = \frac{\vec{q}_\perp + q_z \vec{e}_z}{\sqrt{q_\perp^2 + q_z^2}} = \frac{\vec{q}}{q}. \quad (20.23)$$

Видно, что нормали $\vec{N}(\vec{r}_m)$ направлены вдоль фиксированного вектора рассеяния $\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}_0$ для всех без исключения стационарных точек. В свою очередь, вектор \vec{q} направлен по биссектрисе угла между \vec{k}_0 и \vec{k} . Отсюда следует, что нормаль \vec{N} в точках стационарной фазы $\vec{r} = \vec{r}_m$, как видно из рис. 20.5, образует равные углы θ' с волновыми векторами \vec{k}_0 и \vec{k} .

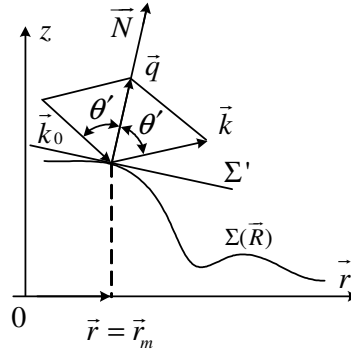


Рис. 20.5.

Таким образом, нормаль \vec{N} в стационарных точках направлена так, что падающая волна (с волновым вектором \vec{k}_0) зеркально отражается от касательной плоскости ($z' = 0$) в направлении \vec{k} , т.е. в точку наблюдения. Следовательно, **точки стационарной фазы подынтегрального выражения (20.20) являются зеркальными точками**, которые и дают основной вклад в поле U_{pac} , рассеянное в заданном направлении \vec{k} .

Согласно методу стационарной фазы, предэкспоненциальный множитель в (20.20) может быть вынесен за знак интеграла в точках $\vec{r} = \vec{r}_m$:

$$[q_z - \vec{q}_\perp \vec{\gamma}(\vec{r})]_{\vec{r}=\vec{r}_m} = q_z + \frac{q_\perp^2}{q_z} = \frac{q^2}{q_z}, \quad (20.24)$$

после чего формула (20.20) представляется в виде

$$U_{pac}(\vec{R}_p) \approx \frac{R}{4\pi i R_s R_p} \cdot \frac{q^2}{q_z} e^{ik(R_p + R_s)} \int_{\Sigma_0} d\vec{r} e^{-i[\vec{q}_\perp \vec{r} + q_z \xi(\vec{r})]}. \quad (20.25)$$

Заметим, что при получении (20.25) мы использовали метод стационарной фазы

лишь частично, вынося предэкспоненциальный множитель $q_z - \bar{q}_\perp \bar{\gamma}(\bar{r})$ в точках стационарной фазы за знак интеграла, но не раскладывая фазу $S(\bar{r}) = \bar{q}_\perp \bar{r} + q_z \xi(\bar{r})$ в ряд Тейлора в точках экстремума и не суммируя вклады от всех точек $\bar{r} = \bar{r}_m$.

20.3. Среднее рассеянное поле

В формулу (20.25) в явном виде входит лишь случайное поле возвышений $\xi(\bar{r})$. Учитывая это запишем выражение для среднего рассеянного поля в точке наблюдения:

$$\langle U_{pac}(\bar{R}_p) \rangle \approx \frac{R}{4\pi i R_s R_p} \cdot \frac{q^2}{q_z} e^{ik(R_p + R_s)} \int_{\Sigma_0} d\bar{r} e^{-i\bar{q}_\perp \bar{r}} \langle e^{-iq_z \xi(\bar{r})} \rangle. \quad (20.26)$$

Для упрощения задачи будем считать, что $\xi(\bar{r})$ является нормальным (гауссовым) пространственно однородным ("стационарным" по пространственным переменным) случайным полем. В этом случае имеем

$$\langle e^{-iq_z \xi(\bar{r})} \rangle = e^{-\frac{1}{2} q_z^2 \sigma_\xi^2},$$

где $\sigma_\xi^2 = \langle \xi^2 \rangle = Const$ и учтено, что $\langle \xi \rangle = 0$.

В результате выражение (20.26) приводится к виду

$$\langle U_{pac}(\bar{R}_p) \rangle = R_{эфф} U_d(\bar{R}_p). \quad (20.27)$$

Здесь

$$U_d(\bar{R}_p) = \frac{1}{4\pi i R_s R_p} \cdot \frac{q^2}{q_z} e^{ik(R_p + R_s)} \int_{\Sigma_0} d\bar{r} e^{-i\bar{q}_\perp \bar{r}} - \quad (20.28)$$

- поле в точке наблюдения, возникающее в дальней зоне при отражении от идеально отражающей ($R = 1$) плоской поверхности Σ_0 , а

$$R_{эфф} = R e^{-\frac{1}{2} q_z^2 \sigma_\xi^2} - \quad (20.29)$$

- эффективный коэффициент отражения среднего поля.

Если линейные размеры отражающей поверхности Σ_0 во всех направлениях (в плоскости $z=0$) достаточно велики по сравнению с длиной волны, то интеграл (20.28) отличен от нуля только в направлении зеркального отражения ($\vec{q}_\perp = 0$) от средней плоскости $z=0$. Действительно,

$$\lim_{k^2 \Sigma_0 \rightarrow \infty} \int_{\Sigma_0} d\vec{r} e^{-i\vec{q}_\perp \vec{r}} = \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r} e^{-i\vec{q}_\perp \vec{r}} = (2\pi)^2 \delta(\vec{q}_\perp). \quad (20.30)$$

Таким образом, и среднее рассеянное поле $\langle U_{pac} \rangle$ оказывается отличным от нуля только в направлении зеркального отражения от средней плоскости $z=0$, причем коэффициент отражения $R_{эфф}$ отличается от коэффициента отражения от плоской поверхности R тем же экспоненциальным множителем, который возникает и при дифракции на хаотическом фазовом экране (см. (17.60)).

Учитывая, что в направлении зеркального отражения $\vec{q}_\perp = 0$, а $q_z = 2k \cos \theta_0$, формула (20.29) может быть переписана в виде

$$R_{эфф} = R e^{-P^2/2}, \quad (20.31)$$

где $P = 2k\sigma_\xi \cos \theta_0$ - введенный ранее параметр Релея.

20.4. Средняя интенсивность

Так же, как и при рассмотрении среднего поля, при вычислении средней интенсивности $\langle I_{pac} \rangle = \langle |U_{pac}|^2 \rangle$ ограничимся лишь случаем больших значений параметра Релея ($P \gg 1$), имея в виду, что обратный предельный случай ($P \ll 1$) был подробно исследован в предыдущем параграфе методом малых возмущений. Большим значениям параметра Релея соответствует рассеяние коротких волн на высоких неровностях. Согласно (20.25) вычисление второго момента поля сводится к усреднению двойного интеграла по поверхности Σ_0 (т.е. четырехкратного интеграла):

$$\langle I_{pac}(\bar{R}_p) \rangle \approx \frac{|R|^2}{(4\pi R_s R_p)^2} \cdot \frac{q^4}{q_z^2} \int_{\Sigma_0} d\bar{r}' \int_{\Sigma_0} d\bar{r}'' e^{-iq_\perp(\bar{r}' - \bar{r}'')} \langle e^{-iq_z[\xi(\bar{r}') - \xi(\bar{r}'')] } \rangle. \quad (20.32)$$

Если случайное поле отклонений поверхности $\xi(\bar{r})$ статистически однородно и нормально распределено, то усреднение под знаком интеграла приводит к следующему результату (см. (17.62)):

$$\langle e^{-iq_z[\xi(\bar{r}') - \xi(\bar{r}'')] } \rangle = e^{-\frac{1}{2}q_z^2 D_\xi(\bar{r}' - \bar{r}'')}, \quad (20.33-a)$$

где

$$D_\xi(\bar{r}', \bar{r}'') = \langle [\xi(\bar{r}') - \xi(\bar{r}'')]^2 \rangle = 2\sigma_\xi^2 - 2B_\xi(\bar{r}' - \bar{r}'') = 2\sigma_\xi^2 [1 - K_\xi(\bar{r}' - \bar{r}'')] -$$

- структурная функция неровностей, легко выражаемая через автокорреляционную функцию $B_\xi(\bar{r}' - \bar{r}'')$ или коэффициент корреляции $K_\xi(\bar{r}' - \bar{r}'') = B_\xi(\bar{r}' - \bar{r}'')/\sigma_\xi^2$. Для изотропного поля флуктуаций возвышений $D_s(\bar{r}' - \bar{r}'') = D_s(|\bar{r}' - \bar{r}''|) = D_s(\rho)$ и в коротковолновом приближении ($q_z^2 \sigma_\xi^2 \gg 1$) аналогично (17.68) можно воспользоваться упрощением

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}q_z^2 D_\xi(\rho)\right\} \approx \exp\left\{-\frac{q_z^2 \sigma_\xi^2}{2l_\xi^2} \rho^2\right\}. \quad (20.33-b)$$

Здесь $\bar{\rho} = \bar{r}' - \bar{r}''$, а $l_\xi = \left[-\frac{d^2 K''(\rho)}{d\rho^2} \right]_{\rho=0}^{-1/2}$ - характерный масштаб убывания

(горизонтальный размер неоднородностей) коэффициента корреляции.

Перейдем теперь в (20.32) от интегрирования по $d\bar{r}', d\bar{r}''$ к новым суммарным $\bar{r} = \frac{1}{2}(\bar{r}' + \bar{r}'')$ и разностным $\bar{\rho} = \bar{r}' - \bar{r}''$ переменным. Если характерный размер неоднородностей l_ξ значительно меньше линейных размеров L ($L \gg l_\xi$) всей рассеивающей поверхности Σ_0 ($L \sim \sqrt{\Sigma_0}$), то интегрирование по $\bar{\rho}$ можно провести в бесконечных пределах, а область интегрирования по $d\bar{r}$ будет практически совпадать со

старой $-\Sigma_0$. С учетом вышеизложенного формула (20.32) принимает вид

$$\langle I_{pac}(\bar{R}_p) \rangle \approx \frac{|R|^2}{(4\pi R_s R_p)^2} \cdot \frac{q^4}{q_z^2} \int_{\Sigma_0} d\bar{r} \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{\rho} e^{-\frac{q_z^2 \sigma_\xi^2}{2l_\xi^2} \rho^2 - i\bar{q}_\perp \bar{\rho}}. \quad (20.34)$$

Мы снова пришли к результату, когда четырехкратный интеграл распался на произведение двух двукратных причем, интеграл по $d\bar{r}$ равен рассеивающей площади Σ_0 , а вычисление интеграла по $d\bar{\rho}$ было проведено в § 17 (см. (17.73):

$$\langle I_{pac}(\bar{R}_p) \rangle \approx \frac{|R|^2 \Sigma_0}{(2R_s R_p)^2} \cdot \frac{q^4}{q_z^4} \cdot \frac{1}{\pi \sigma_\gamma^2} \cdot e^{-\frac{q_\perp^2}{q_z^2 \sigma_\gamma^2}}. \quad (20.35)$$

Здесь, по аналогии с (17.80), учтена связь между дисперсией высот - σ_ξ^2 случайного поля возвышений $\xi(\bar{r})$ и дисперсией наклонов - σ_γ^2 случайного поля градиентов $\bar{\gamma} = \bar{\nabla}_{\bar{r}} \xi(\bar{r})$:

$$\sigma_\gamma^2 = 2 \frac{\sigma_\xi^2}{l_\xi^2}. \quad (20.36)$$

Расширим теперь возможности оценки исходного интегрального представления, не накладывая заранее условия нормальности распределения высот $\xi(\bar{r})$. Для этого переишем (20.32) в суммарных и разностных координатах:

$$\langle I_{pac}(\bar{R}_p) \rangle \approx \frac{|R|^2}{(4\pi R_s R_p)^2} \cdot \frac{q^4}{q_z^2} \int_{\Sigma_r} d\bar{r} \int_{\Sigma_\rho} d\bar{\rho} e^{-i\bar{q}_\perp \bar{\rho}} \langle e^{-iq_z [\xi(\bar{r} + \bar{\rho}/2) - \xi(\bar{r} - \bar{\rho}/2)]} \rangle. \quad (20.37)$$

Здесь $\Sigma_{r,\rho}$ - соответствующие области интегрирования по $d\bar{r}$ и $d\bar{\rho}$. Из предыдущего рассмотрения нормального распределения $\xi(\bar{r})$ следовало, что в коротковолновом приближении основной вклад в интеграл по $d\bar{\rho}$ дают лишь небольшие участки поверхности, лежащие вблизи точек, где $\bar{\rho} = 0$. Воспользуемся этим и разложим разность

$\xi(\vec{r} + \vec{\rho}/2) - \xi(\vec{r} - \vec{\rho}/2)$ в ряд Тейлора в точке $\vec{\rho} = 0$. В результате, с точностью до линейных членов получим (см.(17.70))

$$\xi(\vec{r} + \vec{\rho}/2) - \xi(\vec{r} - \vec{\rho}/2) \approx \vec{\nabla}_{\vec{r}} \xi(\vec{r}) \vec{\rho} = \vec{\gamma}(\vec{r}) \vec{\rho}. \quad (20.38)$$

Кроме того, пределы интегрирования по $d\vec{\rho}$ можно распространить на всю бесконечную плоскость, а $\Sigma_{\vec{r}}$ практически совпадает с исходной поверхностью Σ_0 . В результате получим

$$\begin{aligned} \langle I_{pac}(\vec{R}_p) \rangle &\approx \frac{|R|^2}{(4\pi R_s R_p)^2} \cdot \frac{q^4}{q_z^2} \int_{\Sigma_0} d\vec{r} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\rho} \langle e^{-i[\vec{q}_{\perp} + q_z \vec{\gamma}(\vec{r})] \vec{\rho}} \rangle = \\ &= \frac{|R|^2}{(2R_s R_p)^2} \cdot \frac{q^4}{q_z^2} \int_{\Sigma_0} d\vec{r} \langle \delta[\vec{q}_{\perp} + q_z \vec{\gamma}(\vec{r})] \rangle. \end{aligned} \quad (20.39)$$

Усреднение по случайным наклонам $\vec{\gamma}$ можно произвести обычным способом, пользуясь плотностью распределения вероятностей $W_{\gamma}(\vec{\gamma})$. Если $f(\vec{\gamma})$ есть детерминированная функция случайного аргумента $\vec{\gamma}$, то среднее значение $\langle f(\vec{\gamma}) \rangle$ вычисляется по формуле

$$\langle f(\vec{\gamma}) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{\gamma}) W_{\gamma}(\vec{\gamma}) d\vec{\gamma}. \quad (20.40)$$

В результате усреднения формула (20.39) принимает следующий окончательный вид:

$$\begin{aligned} \langle I_{pac}(\vec{R}_p) \rangle &\approx \frac{|R|^2}{(2R_s R_p)^2} \cdot \frac{q^4}{q_z^2} \int_{\Sigma_0} d\vec{r} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\gamma} \delta[\vec{q}_{\perp} + q_z \vec{\gamma}(\vec{r})] W_{\gamma}(\vec{\gamma}) = \\ &= \frac{|R|^2 \Sigma_0}{(2R_s R_p)^2} \cdot \frac{q^4}{q_z} W_{\gamma}\left(\frac{\vec{q}_{\perp}}{q_z}\right). \end{aligned} \quad (20.41)$$

При вычислении интеграла по $d\vec{\gamma}$ мы воспользовались известным свойством δ -

функции:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(a+bx) dx = \frac{1}{b} f\left(-\frac{a}{b}\right).$$

Легко проверить, что для нормального закона распределения наклонов

$$W_\gamma(\vec{\gamma}) = \frac{1}{\pi\sigma_\gamma^2} e^{-\gamma^2/\sigma_\gamma^2} \quad (20.42)$$

формула (20.41) в точности переходит в ранее найденную (20.35).

20.5. Индикатриса рассеяния

Согласно (19.31), индикатриса рассеяния $F(\theta_p, \varphi_p)$ была определена как отношение средней интенсивности, рассеянной в произвольном направлении \vec{k} , к интенсивности в зеркальном направлении ($\vec{q}_\perp = 0$):

$$F(\theta_p, \varphi_p) = \frac{\langle I_p(\theta_p, \varphi_p) \rangle}{\langle I_p(\theta_0, 0) \rangle} = \frac{q^4}{q_z^4} \cdot \frac{W_\gamma(-\vec{q}_\perp/q_z)}{W_\gamma(0)}. \quad (20.43)$$

Для количественных оценок рассмотрим нормальный закон распределения (20.42), для которого формула (20.43) принимает конкретный вид

$$F(\theta_p, \varphi_p) = \frac{q^4}{q_z^4} \cdot e^{-\frac{q_\perp^2}{q_z^2 \sigma_\gamma^2}}. \quad (20.44)$$

Воспользовавшись значениями проекций вектора $\vec{q} = (q_x, q_y, q_z)$, записанных в сферических координатах (см.(19.32)), получим

$$F(\theta_p, \varphi_p) = 4 \frac{(1 + \cos \theta_p \cos \theta_0 - \sin \theta_p \sin \theta_0 \cos \varphi_p)^2}{(\cos \theta_p + \cos \theta_0)^4} \times \exp \left\{ - \frac{\sin^2 \theta_p + \sin^2 \theta_0 - 2 \sin \theta_p \sin \theta_0 \cos \varphi_p}{\sigma_\gamma^2 (\cos \theta_p + \cos \theta_0)^2} \right\}. \quad (20.45)$$

Для пологих неоднородностей, когда $\sigma_\gamma^2 \ll 1$, можно отвлечься от медленно изменяющегося с углами θ_p и φ_p предэкспоненциального множителя в (20.45) и считать, что ширина индикатрисы рассеяния определяется в основном показателе степени экспоненты, т.е. той областью углов (θ_p, φ_p) , в которой показатель степени экспоненты в (20.45) не превышает единицы (по порядку величины):

$$\frac{\sin^2 \theta_p + \sin^2 \theta_0 - 2 \sin \theta_p \sin \theta_0 \cos \varphi_p}{\sigma_\gamma^2 (\cos \theta_p + \cos \theta_0)^2} \leq 1. \quad (20.46)$$

Так же, как и в предыдущем параграфе, оценим вначале ширину $\Delta\theta_p$ индикатрисы в плоскости падения. Полагая в (20.46) $\varphi_p = 0$, получаем

$$\frac{(\sin \theta_p - \sin \theta_0)^2}{\sigma_\gamma^2 (\cos \theta_p + \cos \theta_0)^2} \leq 1.$$

При $\sigma_\gamma^2 \ll 1$ данное неравенство может выполняться только для углов θ_p , отличающихся от θ_0 на малую величину $\Delta\theta_p$. Положив $\theta_p = \theta_0 + \Delta\theta_p$, с точностью до линейных слагаемых по $\Delta\theta_p$ имеем $\sin \theta_p - \sin \theta_0 = \sin(\theta_0 + \Delta\theta_p) - \sin \theta_0 \approx \Delta\theta_p \cos \theta_0$, $\cos \theta_p + \cos \theta_0 \approx 2 \cos \theta_0$. При этом показатель степени приближенно представится в виде

$$\frac{(\sin \theta_p - \sin \theta_0)^2}{\sigma_\gamma^2 (\cos \theta_p + \cos \theta_0)^2} \approx \frac{(\Delta\theta_p)^2}{4\sigma_\gamma^2}. \quad (20.47)$$

Предэкспоненциальный множитель в (20.45) можно приближенно определить для

фиксированных значениях углов $\theta_p = \theta_0, \varphi_p = 0$, соответствующих максимальному значению экспоненты:

$$4 \frac{(1 + \cos \theta_p \cos \theta_0 - \sin \theta_p \sin \theta_0 \cos \varphi_p)^2}{(\cos \theta_p + \cos \theta_0)^4} \Big|_{\substack{\theta_p = \theta_0 \\ \varphi_p = 0}} = 1. \quad (20.48)$$

В результате для индикатрисы рассеяния в плоскости падения получаем следующее приближенное представление:

$$F(\theta_p, 0) \approx e^{-(\Delta\theta_p)^2 / 4\sigma_\gamma^2}. \quad (20.49)$$

Видно, что максимум индикатрисы приходится на направление зеркального отражения от средней плоскости ($\Delta\theta_p = 0, \varphi_p = 0$), а зависимость $F(\theta_p, 0)$ вблизи θ_0 имеет вид гауссовой кривой с характерной шириной

$$\Delta\theta_p = 2\sigma_\gamma. \quad (20.50)$$

Для оценки ширины $F(\theta_p, \varphi_p)$ по углу φ_p (в плоскости, перпендикулярной плоскости падения - XOZ) положим в показателе степени экспоненты в (20.45) $\theta_p = \theta_0$, а $\cos \varphi_p$ представим в виде $\cos \varphi_p \approx 1 - \frac{1}{2}\varphi_p^2$. При этом формула (20.45) вблизи направления зеркального отражения ($\theta_p = \theta_0, \varphi_p \ll 1$) принимает вид

$$F(\theta_0, \varphi_p) \approx \exp \left\{ -\frac{\varphi_p^2}{4\sigma_\gamma^2 \text{ctg}^2 \theta_0} \right\}. \quad (20.51)$$

Отсюда видно, что характерная ширина индикатрисы рассеяния по углу φ_p равна

$$\Delta\varphi_p = 2\sigma_\gamma \text{ctg} \theta_0. \quad (20.52)$$

Выводы

Из формул (20.49) и (20.51) следует, что индикатриса рассеяния при $\sigma_\gamma^2 \ll 1$ имеет резкий максимум в направлении зеркального отражения ($\theta_p = \theta_0, \varphi_p = 0$) от средней плоскости. Зависимость $F(\theta_p, \varphi_p)$ в окрестности максимума имеет вид гауссовой кривой. Характерные “размеры” $F(\theta_p, \varphi_p)$ по углам θ_p и φ_p , равные $\Delta\theta_p = 2\sigma_\gamma$ и $\Delta\varphi_p = 2\sigma_\gamma \text{ctg}\theta_0$, определяются дисперсией углов наклона неровностей поверхности - σ_γ^2 .

Формулы (20.50) и (20.52) позволяют сделать важный в практическом отношении вывод о том, что при скользящем распространении ($\theta_0 \rightarrow \pi/2$) ширина индикатрисы рассеяния в горизонтальной плоскости (по азимуту) может быть во много раз меньше ширины в вертикальной плоскости. Действительно, согласно (20.50) и (20.52) имеем

$$\frac{\Delta\varphi_p}{\Delta\theta_p} = \text{ctg}\theta_0, \quad (20.53)$$

т.е. при скользящем облучении поверхности $\theta_0 \rightarrow \pi/2$, $\text{ctg}\theta_0 \rightarrow 0$, и рассеяние излучения происходит, в основном, в вертикальной плоскости, а не в горизонтальной. Следует, однако, напомнить, что приведенные выше результаты не учитывают затенений и многократных отражений, поэтому всегда предполагается выполнение неравенства $\text{ctg}\theta_0 \gg \sigma_\gamma$.

ЗАДАЧИ

1. В приближении Кирхгофа рассчитать индикатрису рассеяния для случайной поверхности

$$\xi(x, y) = \alpha x + \beta y, \quad (1)$$

где α и β – независимые случайные величины, распределенные по нормальному закону с нулевыми средними ($\bar{\alpha} = \bar{\beta} = 0$) и дисперсиями $\sigma_\alpha^2 = \alpha_0^2$ и $\sigma_\beta^2 = \beta_0^2$. Построить схематический график индикатрисы рассеяния.

Решение. Заданная поверхность рассеяния является случайно ориентированной в пространстве плоскостью. При этом коэффициенты α и β являются тангенсами углов

наклонов плоскости по отношению к осям координат x и y соответственно ($\alpha = \frac{\partial \xi}{\partial x} = \gamma_x$, $\beta = \frac{\partial \xi}{\partial y} = \gamma_y$). Вследствие независимости величин γ_x и γ_y для плотности вероятности наклонов $W_\gamma(\vec{\gamma})$ имеет место соотношение $W_\gamma(\gamma_x, \gamma_y) = W_\gamma(\gamma_x)W_\gamma(\gamma_y)$. Следовательно, с учетом нормальности распределения наклонов γ_x и γ_y получаем

$$W_\gamma(\vec{\gamma}) = \frac{1}{2\pi \alpha_0 \beta_0} \exp \left\{ -\frac{\gamma_x^2}{2\alpha_0^2} - \frac{\gamma_y^2}{2\beta_0^2} \right\}. \quad (2)$$

Для определения индикатрисы рассеяния мы должны, согласно (20.43), произвести в (2) замену $\vec{\gamma} \rightarrow -\vec{q}_\perp/q_z$, в результате чего (2) принимает вид

$$W_\gamma(\vec{\gamma}) \Big|_{\vec{\gamma} = -\vec{q}_\perp/q_z} = \frac{1}{2\pi \alpha_0 \beta_0} \exp \left\{ -\frac{q_x^2}{2\alpha_0^2 q_z^2} - \frac{q_y^2}{2\beta_0^2 q_z^2} \right\} = \frac{1}{2\pi \alpha_0 \beta_0} \exp \left\{ -\frac{q_x^2 \beta_0^2 + q_y^2 \alpha_0^2}{2q_z^2 \alpha_0^2 \beta_0^2} \right\}. \quad (3)$$

Вычислим $W_\gamma(\vec{\gamma})$ в направлении зеркального отражения, когда $\vec{q}_\perp = 0$:

$$W_\gamma(0) = \frac{1}{2\pi \alpha_0 \beta_0}. \quad (4)$$

Подставляя теперь найденные значения (3) и (4) в формулу (20.43), получаем выражение для индикатрисы рассеяния:

$$F(\theta_p, \varphi_p) = \frac{q^4}{q_z^4} \exp \left\{ -\frac{q_x^2 \beta_0^2 + q_y^2 \alpha_0^2}{2q_z^2 \alpha_0^2 \beta_0^2} \right\}. \quad (5)$$

Учитывая связь (19.32) между проекциями вектора рассеяния q_x , q_y и q_z и углами наблюдения θ_p и φ_p , окончательно получим

$$F(\theta_p, \varphi_p) = \frac{4(1 + \cos \theta_p \cos \theta_0 - \sin \theta_p \sin \theta_0 \cos \varphi_p)^2}{(\cos \theta_p + \cos \theta_0)^4} \times \exp \left\{ - \frac{\beta_0^2 (\sin \theta_p \cos \varphi_p - \sin \theta_0)^2 + \alpha_0^2 \sin^2 \theta_p \sin^2 \varphi_p}{2\alpha_0^2 \beta_0^2 (\cos \theta_p + \cos \theta_0)^2} \right\}. \quad (6)$$

Построим схематическое изображение $F(\theta_p, \varphi_p)$ в двух плоскостях: $XOZ - F(\theta_p, 0)$ и $XOY - F(\theta_0, \varphi_p)$. Эти частные случаи легко получаются из выражения (6):

$$F(\theta_p, 0) = \frac{4[1 + \cos(\theta_p + \theta_0)]^2}{(\cos \theta_p + \cos \theta_0)^4} \exp \left\{ - \frac{(\sin \theta_p - \sin \theta_0)^2}{2\alpha_0^2 (\cos \theta_p + \cos \theta_0)^2} \right\}, \quad (7)$$

$$F(\theta_0, \varphi_p) = \frac{(1 + \cos^2 \theta_0 - \sin^2 \theta_0 \cos \varphi_p)^2}{4\cos^4 \theta_0} \times \exp \left\{ - \frac{\text{tg}^2 \theta_0}{8\alpha_0^2 \beta_0^2} \cdot [\beta_0^2 (1 - \cos \varphi_p)^2 + \alpha_0^2 \sin^2 \varphi_p] \right\}. \quad (8)$$

Согласно (7) и (8) при $\alpha_0^2 \ll 1$ и $\beta_0^2 \ll 1$ в распределениях $F(\theta_p, \varphi_p)$ будут наблюдаться острые максимумы (рис.20.6)

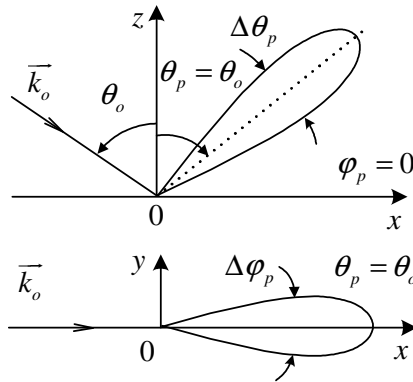


Рис. 20.6

под углами $\theta_p = \theta_0$ - для $F(\theta_p, 0)$ и $\varphi_p = 0$ - для $F(\theta_0, \varphi_p)$ Характерную ширину индикатрисы рассеяния по уровню e^{-1} легко оценить с помощью простых оценок. Так, учитывая, что при $\alpha_0^2, \beta_0^2 \ll 1$ предэкспоненциальные множители в (7) и (8) медленно изменяются по сравнению с экспонентами, приближенно возьмем их для фиксированных углов $\theta_p = \theta_0$ и $\varphi_p = 0$:

$$\left. \frac{4[1 + \cos(\theta_p + \theta_0)]^2}{(\cos \theta_p + \cos \theta_0)^4} \right|_{\theta_p = \theta_0} = 1 \text{ для } F(\theta_p, 0), \quad (9)$$

$$\left. \frac{(1 + \cos^2 \theta_0 - \sin^2 \theta_0 \cos \varphi_p)^2}{4 \cos^4 \theta_0} \right|_{\varphi_p = 0} = 1 \text{ для } F(\theta_0, \varphi_p). \quad (10)$$

В показателе степени (7) положим $\theta_p = \theta_0 + \Delta\theta_p$ и, считая $\Delta\theta_p \ll \theta_0$, проведем упрощение

$$\frac{(\sin \theta_p - \sin \theta_0)^2}{2\alpha_0^2 (\cos \theta_p + \cos \theta_0)^2} = \frac{[\sin(\theta_0 + \Delta\theta_p) - \sin \theta_0]^2}{2\alpha_0^2 [\cos(\theta_0 + \Delta\theta_p) + \cos \theta_0]^2} \approx \frac{(\Delta\theta_p)^2}{8\alpha_0^2}. \quad (11)$$

Аналогично и для (8) с точностью до квадратичных слагаемых по $\alpha_0^2, \beta_0^2, \varphi^2 \ll 1$ находим упрощенное представление

$$\frac{[\beta_0^2 (1 - \cos \varphi_p)^2 + \alpha_0^2 \sin^2 \varphi_p] \sin^2 \theta_0}{8\alpha_0^2 \beta_0^2 \cos^2 \theta_0} \approx \frac{\varphi_p^2}{8\beta_0^2 \text{ctg}^2 \theta_0}. \quad (12)$$

В результате получаем следующие приближенные распределения индикатрисы рассеяния вблизи максимумов:

$$F(\theta_p, 0) \approx \exp \left\{ -\frac{(\Delta\theta_p)^2}{8\alpha_0^2} \right\} \quad (13)$$

и

$$F(\theta_0, \varphi_p) \approx \exp \left\{ -\frac{\varphi_p^2}{8\beta_0^2 \text{ctg}^2 \theta_0} \right\}. \quad (14)$$

Отсюда характерные масштабы изменения индикатрисы рассеяния по углам θ_p и φ_p равны

$$\begin{aligned} \Delta\theta_p &\approx 2\sqrt{2}\alpha_0, \\ \Delta\varphi_p &\approx 2\sqrt{2}\beta_0 \text{ctg} \theta_0. \end{aligned}$$

2. Осуществить переход в рассмотренном в предыдущей задаче анизотропном распределении наклонов к изотропному случаю.

Решение. Для изотропного распределения наклонов в плотности вероятности (2) задачи 1 мы должны положить $\sigma_\alpha^2 = \sigma_\beta^2 = \sigma^2$. С другой стороны, с учетом того, что

$$\vec{\gamma} = \gamma_x \vec{e}_x + \gamma_y \vec{e}_y = \alpha \vec{e}_x + \beta \vec{e}_y,$$

для дисперсий модуля и проекций получаем следующую связь:

$$\sigma_\gamma^2 = \sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2 = 2\sigma^2.$$

С учетом вышеизложенного формулы (2) и (6) предыдущей задачи приводятся к виду (см. (20.42) и (20.45))

$$\begin{aligned} W_\gamma(\vec{\gamma}) &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp \left\{ -\frac{\gamma_x^2 + \gamma_y^2}{2\sigma^2} \right\} = \frac{1}{\pi\sigma_\gamma^2} \exp \left\{ -\frac{\gamma^2}{\sigma_\gamma^2} \right\} = W_\gamma(\gamma), \\ F(\theta_p, \varphi_p) &= \frac{4(1 + \cos \theta_p \cos \theta_0 - \sin \theta_p \sin \theta_0 \cos \varphi_p)^2}{(\cos \theta_p + \cos \theta_0)^4} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{\sin^2 \theta_p + \sin^2 \theta_0 - 2 \sin \theta_p \sin \theta_0 \cos \varphi_p}{\sigma_\gamma^2 (\cos \theta_p + \cos \theta_0)^2} \right\}. \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Блюх П.В. Статистическая радиофизика.- Харьков: Институт радиофизики и электроники АН УССР, 1976. – 126 с.
2. Фукс И.М. Статистическая радиофизика и теория информации// Препринт. Харьковский госуниверситет: Часть 1, 1985. -.- 60 с; Часть II, 1986. - 88 с; Часть III, 1992. -91 с.
3. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. - М.: Сов. Радио, 1974. - 550 с.
4. Тихонов В.И., Харисов В.Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. – М.: Радио и связь, 1991.- 608 с.
5. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. Часть I. Случайные процессы. - М.: Наука, 1976.- 494 с.
6. Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. Часть II. Случайные поля. - М.: Наука, 1978. - 463 с.
7. Басс Ф.Г., Фукс И.М. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. - М.: Наука, 1972. – 424 с.

Дополнительные источники

1. Татарский В.И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. – М.: Наука, 1967. – 548 с.
2. Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. - М.: Наука, 1981. – 640 с.
3. Стратонович Р.Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Сов. Радио 1961. - 558 с.
4. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. М.: Радио и связь, 1982.- 624 с.
5. Вайнштейн Л.А., Зубаков В.Д. Выделение сигналов на фоне случайных помех. М.: Сов. Радио, 1960. – 447 с.
6. Харкевич А.А. Борьба с помехами. М.: ГИФМЛ, 1963. – 276 с.
7. Гуткин Л.С. Теория оптимальных методов радиоприема при флуктуационных помехах. М.: Сов. Радио, 1972. – 448 с.
8. Федорюк М.В. Асимптотика: Интегралы и ряды. – М: Наука, 1987.- 544 с.

Учебное издание

**Минаков Анатолий Алексеевич
Тырнов Олег Федорович**

СТАТИСТИЧЕСКАЯ РАДИОФИЗИКА

Ответственный за выпуск Цымбал А. М.

Подп. к печати

Усл. печ. листов 17,9

Формат 60 × 84/16

Уч.-изд. листов 22,4

Тираж 250 экз.

Цена договорная

61077, пл. Свободы, 4, Издательский центр

Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина